17. EUKLIDOVSKÉ PROSTORY

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Pozorování

1. Konvexní množina (např. úsečka) v $\mathbb{R}^n$ je souvislá.
2. S^n je souvislá.
3. B^n je souvislá.
4. Doplněk nadroviny v $\mathbb{R}^n$ je tvořen dvěma komponentami souvislosti.

Pozorování

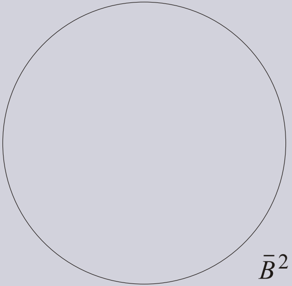
1. Konvexní množina (např. úsečka) v $\mathbb{R}^n$ je souvislá.
2. S^n je souvislá.
3. B^n je souvislá.
4. Doplněk nadroviny v $\mathbb{R}^n$ je tvořen dvěma komponentami souvislosti.

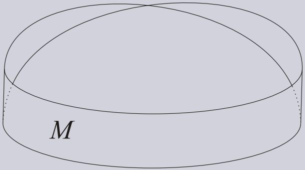
Pozorování

1. Konvexní množina (např. úsečka) v $\mathbb{R}^n$ je souvislá.
2. S^n je souvislá.
3. B^n je souvislá.
4. Doplněk nadroviny v $\mathbb{R}^n$ je tvořen dvěma komponentami souvislosti.

Pozorování

1. Projektivní rovina je homeomorfní kruhu, k jehož okraji je svým krajem připojena Moebiusova páska. Toto nelze uskutečnit v $\mathbb{R}^3$, ale lze v $\mathbb{R}^4$.





Pozorování

1. Podmnožina Euklidova prostoru je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
2. Podmnožina Euklidova prostoru je úplná právě když je uzavřená.
3. Otevřená podmnožina A Euklidova prostoru je souvislá právě když každé dva její body lze v A spojit polámanou úsečkou.

Pozorování

1. Nechť kompaktní konvezní podmnožina A v Euklidově prostoru obsahuje vnitřní bod a. Pak každá polopřímka vycházející z a protíná hranici A právě v jednom bodu. Navíc je A homeomorfní uzavřené jednotkové kouli. Hranice si navzájem odpovídají.
2. Tedy koule je homeomorfní krychli.
3. Uzavřená a kompaktní podmnožina v Euklidově prostoru jdou oddělit nadrovinou.
4. Uzavřená konvezní podmnožina Euklidova prostoru je průnikem uzavřených poloprostorů ji obsahujících.

Pozorování

1. Geometrické vnitřky různých simplexů v komplexu jsou disjunktní.

Pozorování

1. Komplex je souvislý právě když je jím triangulovaný mnohostěn souvislý.
2. Sjednocení, průnik i kartézský součin mnohostěnů je mnohostěn.

Pozorování

1. Hvězdy vrcholů komplexu $\mathcal{K}$ pokrývají mnohostěn $\bar{\mathcal{K}}$.

Pozorování

Opakovaným barycentrickým dělením dostaneme dělení s libovolně malými simplexy.

Pozorování

Dimenze simplexního obrazu komplexu může být menší než dimenze vzoru.

Pozorování

Sféru S^2 lze spojitě zobrazit na kružnici S^1, Zobrazení bude homotopické s konstantním zobrazením. Sféru S^3 však lze spojitě zobrazit na sféru S^2 s použitím fíbru S^1 zobrazením, které není homotopické s konstantním zobrazení (Hopfova fibrace). Podobně existuje zobrazení z S^7 na S^4 s fíbrem S^3.
[Hint. Zobrazíme sféru S^3 reprezentovanou

$$S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

zobrazením $(x, y, z, t) \mapsto (x + iy)/(z + it)$ do rozšířené komplexní roviny, kterou následně identifikujeme se sférou S^2 pomocí stereografické projekce. Vzory bodů jsou kružnice S^1 a celé fibrovací schéma funguje.]

Příklady

1. Zjistete fundamentální grupu pro torus [Hint. Uvažte torus jako sjednocení kruhu a slepení dvou kružnic.]
2. Zjistete fundamentální grupu slepení k kružnic.
3. Zjistete fundamentální grupu povrchu anuloidu s vystřiženým kroužkem.
4. Zjistete fundamentální grupu Moebiusova pásku.

Příklady

1. Zjistete fundamentální grupu pro torus [Hint. Uvažte torus jako sjednocení kruhu a slepení dvou kružnic.]
2. Zjistete fundamentální grupu slepení k kružnic.
3. Zjistete fundamentální grupu povrchu anuloidu s vystřiženým kroužkem.
4. Zjistete fundamentální grupu Moebiusova pásku.

Příklady

1. Zjistete fundamentální grupu pro torus [Hint. Uvažte torus jako sjednocení kruhu a slepení dvou kružnic.]
2. Zjistete fundamentální grupu slepení k kružnic.
3. Zjistete fundamentální grupu povrchu anuloidu s vystřiženým kroužkem.
4. Zjistete fundamentální grupu Moebiusova pásku.

Pozorování

1. Identita je esenciální.
2. Esenciální zobrazení je na.
3. Zobrazení $f : S^{m-1} \to S^{m-1}$ není esenciální právě když existuje spojité rozšíření na kouli B^m.
4. Je-li X mnohostěn a $\dim X < m - 1$, pak žádné spojité zobrazení $f : X \to S^{m-1}$ není esenciální.
5. Zobrazení $f : S^{k-1} \to S^{m-1}$ není esenciální pokud $k < m$.
6. Hopfova fibrace $f : S^3 \to S^2$je esenciální.
7. Které křivky rozdělují torus?
8. Dvě homeomorfní kompaktní podmnožiny S^{m-1} ji rozdělují obě nebo zádná.
9. Dvě homeomorfní kompaktní podmnožiny R^m prostor rozdělují obě nebo zádná.
10. Sféra S^{m-1} rozděluje $\mathbb{R}^m$.

Pozorování

1. Žádný oblouk nerozděluje $\mathbb{R}^m$.
2. Nechť $U, V \subset \mathbb{R}^m$ a $h : U \to V$ je homeomorfismus. Pak $u \in \int U$ právě když $h(u) \in \int V$. Je-li U otevřená, je i V otevřená.
3. Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ jsou homeomorfní právě pro $n = m$.
4. Jsou-li dvě podmnožiny $\mathbb{R}^m$ homeomorfní, musí být zároveň husté, s neprázdným vnitřkem, ...
5. Jednoduchá uzavřená křivka nerozděluje prostor $\mathbb{R}^m$ pro $m > 2$.

Pozorování

Nalezněte v $\mathbb{R}$ dvě homeomorfní množiny, které nejsou ekvivalentně vnořené.

Pozorování

1. Projektivní rovina je varieta bez hranice.
2. Uzavřená koule $\bar{B}^m$ je m-rozměrná varieta s hranicí tvořenou S^{m-1}.
3. Kartézský součin m-rozměrné variety X a n-rozměrné variety Y je $(m+n)$-rozměrná varieta. Její vnitřek je součin vnitřků X a Y.
4. Anuloid $S^1 \times S^1$ je 2-rozměrná varieta bez hranice.
5. Válec $S^1 \times I$ je dvourozměrná varieta s hranicí.
6. Je-li hranice m-rozměrné variety neprázdná, pak je hranicí $(m-1)$-rozměrná varieta bez hranice.
7. Varieta má konečný počet komponent souvislosti.
8. Souvislá varieta je obloukově souvislá.
9. Vnitřek souvislé variety je souvislý.

Pozorování

1. Hranice orientovatelné triangulované variety je orientovatelná varieta.
2. Triangulovaná varieta vrovině je orientovatelná.
3. Anuloid je orientovatelná varieta.

Pozorování

Každá souvislá jednorozměrná varieta je homeomorfní s kružnicí S^1 nebo intervalem I.

Pozorování

Každá souvislá jednorozměrná varieta je homeomorfní s kružnicí S^1 nebo intervalem I.

Pozorování

Každá souvislá jednorozměrná varieta je homeomorfní s kružnicí S^1 nebo intervalem I.