18. PEVNÝ BOD

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Důkaz.

Nechť $r, s : X \leftrightarrows Y$ je retrakce a Y má FPP. Vezměme spojité zobrazení $f : X \longrightarrow X$. Pak zobrazení $sfr : Y \longrightarrow Y$ má pevný bod y_0. Zřejmě je $r(y_0)$ pevný bod zobrazení f. □

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X neprázdný úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Důkaz.

Nechť (X, d) je neprázdný úplný metrický prostor a $f : X \to X$ je kontrakce s konstantou $k < 1$. Pokud je $f(x_0) = x_0$, $f(x_0') = x_0'$, je $d(x_0, x_0') = d(f(x_0), f(x_0')) \le kd(x_0, x_0')$, což je možné jen $d(x_0, x_0') = 0$. Zbývá tedy dokázat existenci pevného bodu.
Nechť $z_0 \in X$ a $z_n = f^n(z_0)$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde horní index u f^n značí n-násobné složení f se sebou. Pak je $d(z_2, z_1) \le kd(z_1, z_0)$ a indukcí $d(z_{n+1}, z_n) \le k^n d(z_1, z_0)$. Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro $n > m$

$$d(z_{n+1}, z_m) \le d(z_1, z_0) \sum_{i=m}^{n} k^i = k^m \frac{1 - k^{n+1-m}}{1 - k} .$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{z_n\}$ je cauchyovská a tedy má limitu x_0. Protože $x_0 = \lim z_{n+1} = \lim f(z_n) = f(\lim z_n) = f(x_0)$, je x_0 hledaný pevný bod. $\square$

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.

Důkaz.

Nechť $k < 1$ je konstanta kontrakce f. Položme $F(x) = (f(x) + x)/2$. Pak

$$\frac{1}{2}\left|f(x) + x - (f(y) + y)\right| \leq \frac{1}{2}\left(k|x-y| + |x-y|\right) = \frac{k+1}{2}|x-y|\,,$$

což jednak znamená, že F je kontrakce a zobrazuje B do B (stačí odhadnout $|x + (f(x) - f(x/|x|)) + f(x/|x|)|/2$). Toto zobrazení tedy má pevný bod x_0, což je zřejmě i pevný bod zobrazení f. $\square$

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

Důkaz.

Nechť dimenze S je rovna n, S má vrcholy $a_0, a_1, \dots, a_n$ a p_n je počet simplexů v $\mathcal{S}$, které F zobrazí na S. Dokážeme indukcí podle n, že p_n je liché. Pro $n = 0$ je tvrzení triviální (i pro $n = 1$ je snadné). Předpokládejme, že tvrzení platí pro dimenzi $n - 1$ a označme $\mathcal{S}'$ všechny $(n-1)$-dimenzionální simplexy v $\mathcal{S}$, které se zobrazí na stranu S' simplexu S s vrcholy $a_1, \dots, a_n$. Počet simplexů z $\mathcal{S}'$, které leží na S', je podle předpokladu liché číslo p_{n-1} (na jiných stranách simplexy z $\mathcal{S}'$ neleží).

Pro každý n-dimenzionální simplex T z $\mathcal{S}$ označme q_T počet jeho stran, které leží v $\mathcal{S}'$ – to může být 1 (pak se T počítá do p_n) nebo 2 nebo 0. To znamená, že p_n se liší od součtu všech čísel q_T o sudé číslo. Strana v $\mathcal{S}'$, která leží na S' (a tedy se počítá do p_{n-1}) náleží do jediného simplexu T, strana c $\mathcal{S}'$, která neleží na S', je stranou dvou simplexů T a tedy je v součtu čísel q_T počítána dvakrát; tento součet se tedy liší od p_{n-1} o sudé číslo, což znamená, že i p_n se liší od p_{n-1} o sudé číslo. □

TVRZENÍ (Věta Ljusterníka a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \dots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \dots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \dots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap \{F_i; i = 1 \dots n+1\} \neq \emptyset$.

Důkaz.

Nechť je $\bigcap F_i = \emptyset$ a $r > 0$ je Lebesgueovo číslo pokrytí $\{X \setminus F_i\}$. Zvolme rozdělení $\mathcal{S}$ simplexu S, které má průměry simplexů menší než r (a tedy každý simplex z $\mathcal{S}$ je disjunktní s nějakou množinou F_i). Nosič každého vrcholu v z $\mathcal{S}$ (řekněme, že je určen vrcholy $a_{k_1}, \dots, a_{k_j}$) je podle předpokladu tvrzení částí $F_{k_1} \cup \dots \cup F_{k_j}$ a tedy existuje a_{k_i} tak, že $v \in F_{k_i}$. Toto přiřazení vrcholů S vrcholům $\mathcal{S}$ splňuje předpoklady Spernerova lemmatu a tedy existuje simplex S' v $\mathcal{S}$, jehož vrcholy se zobrazí na na všechny vrcholy v S. Podle konstrukce zobrazení to ovšem znamená, že S' protíná všechny množiny F_i, což je spor s volbou dělení $\mathcal{S}$. □

TVRZENÍ (Brouwerova věta o pevném bodě)

Každá uzavřená koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu.

Důkaz.

Místo uzavřené koule budeme zkoumat homeomorfní n-dimenzionální simplex S s vrcholy $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Každý bod $p \in S$ se dá jednoznačně vyjádřit jako konvexní kombinace $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(p) a_i$, kde $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(p) = 1$ a $\lambda_i(p) \geq 0$ pro všechna i.
Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení. Pro každé $x \in S$ označme $F_i = \{p \in S; \lambda_i(f(x)) \leq \lambda_i(x)\}$. Soustava $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ splňuje podmínky předchozí věty (opravdu, je-li p bod strany určené vrcholy $a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}$, je $\sum_{i=1}^{j} \lambda_{k_i}(p) = 1$ a tedy $\sum_{i=1}^{j} \lambda_{k_i}(f(p)) \leq \sum_{i=1}^{j} \lambda_{k_i}(p)$ – to znamená, že pro nějaký index k_i je $\lambda_{k_i}(f(p)) \leq \lambda_{k_i}(p)$.)
Podle předchozí věty existuje $x \in \bigcap \{F_i; i = 1 \ldots n+1\}$, což nutně znamená, že pro každé $i = 1, \ldots, n1+$ je $\lambda_i(f(x)) \leq \lambda_i(x)$, a tedy $f(x) = x$. □