OBECNÁ TOPOLOGIE

15. TOPOLOGICKÉ GRUPY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

Topologie samozřejmě není izolovaná část matematiky a prolíná se s jinými oblastmi, hodně s funkcionální analýzou a s geometrií. Zajímavé je spojení topologie s algebrou.

Existuje jednak algebraická topologie, která zkoumá topologické vlastnosti pomocí algebraických struktur přiřazených vhodným způsobem topologickým strukturám, a jednak topologická algebra, kde naopak jsou topologické struktury vhodně přiřazovány algebraickým strukturám.

My se v této kapitole budeme věnovat druhé uvedené možnosti (základy algebraické topologie by zabraly skoro rozsah těchto skript), a to topologiím na grupách. Grupy jsou totiž velmi vhodným reprezentantem algebraických struktur a z následujícího popisu se snadno odvodí postupy i pro jiné algebraické struktury.

Budeme používat pojmy a značení z teorie grup – viz Poznámky pro definici grup a další pojmy.

Topologie samozřejmě není izolovaná část matematiky a prolíná se s jinými oblastmi, hodně s funkcionální analýzou a s geometrií. Zajímavé je spojení topologie s algebrou.

Existuje jednak algebraická topologie, která zkoumá topologické vlastnosti pomocí algebraických struktur přiřazených vhodným způsobem topologickým strukturám, a jednak topologická algebra, kde naopak jsou topologické struktury vhodně přiřazovány algebraickým strukturám.

My se v této kapitole budeme věnovat druhé uvedené možnosti (základy algebraické topologie by zabraly skoro rozsah těchto skript), a to topologiím na grupách. Grupy jsou totiž velmi vhodným reprezentantem algebraických struktur a z následujícího popisu se snadno odvodí postupy i pro jiné algebraické struktury.

Budeme používat pojmy a značení z teorie grup – viz Poznámky pro definici grup a další pojmy.

Topologie samozřejmě není izolovaná část matematiky a prolíná se s jinými oblastmi, hodně s funkcionální analýzou a s geometrií. Zajímavé je spojení topologie s algebrou.

Existuje jednak algebraická topologie, která zkoumá topologické vlastnosti pomocí algebraických struktur přiřazených vhodným způsobem topologickým strukturám, a jednak topologická algebra, kde naopak jsou topologické struktury vhodně přiřazovány algebraickým strukturám.

My se v této kapitole budeme věnovat druhé uvedené možnosti (základy algebraické topologie by zabraly skoro rozsah těchto skript), a to topologiím na grupách. Grupy jsou totiž velmi vhodným reprezentantem algebraických struktur a z následujícího popisu se snadno odvodí postupy i pro jiné algebraické struktury.

Budeme používat pojmy a značení z teorie grup – viz Poznámky pro definici grup a další pojmy.

Topologie samozřejmě není izolovaná část matematiky a prolíná se s jinými oblastmi, hodně s funkcionální analýzou a s geometrií. Zajímavé je spojení topologie s algebrou.

Existuje jednak algebraická topologie, která zkoumá topologické vlastnosti pomocí algebraických struktur přiřazených vhodným způsobem topologickým strukturám, a jednak topologická algebra, kde naopak jsou topologické struktury vhodně přiřazovány algebraickým strukturám.

My se v této kapitole budeme věnovat druhé uvedené možnosti (základy algebraické topologie by zabraly skoro rozsah těchto skript), a to topologiím na grupách. Grupy jsou totiž velmi vhodným reprezentantem algebraických struktur a z následujícího popisu se snadno odvodí postupy i pro jiné algebraické struktury.

Budeme používat pojmy a značení z teorie grup – viz Poznámky pro definici grup a další pojmy.

$\Rightarrow$

Vhodné přiřazení topologie dané grupě znamená vhodně spojit algebraické operace s topologickými pojmy. Algebraická operace na množině G je zobrazení z nějaké mocniny G^κ do G. Nabízí se volit takovou topologii, při které je toto zobrazení spojité.

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \to G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \to G$.
Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \to G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \to G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \to G$.
Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \longrightarrow G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \longrightarrow G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme jakoukoli grupovou strukturu na $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \longrightarrow G$.

Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \to G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \to G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme jakoukoli grupovou strukturu na $\mathbb{R}$.

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \longrightarrow G$.

Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Grupy mají ještě nulární operaci, která určuje neutrální prvek. Toto zobrazení je konstantní a tedy vždy spojité.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \leadsto xa : G \longrightarrow G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \leadsto ax : G \longrightarrow G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme jakoukoli grupovou strukturu na $\mathbb{R}$.

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \longrightarrow G$.
Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Podobně lze definovat i uniformní grupy, požaduje-li se stejnoměrná spojitost grupových operací. Později uvidíme, že takto definované struktury mohou být chápaný jako část topologických grup.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \longrightarrow G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \longrightarrow G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \longrightarrow G$.

Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Snadným důsledkem definice je následující pozorování (uvědomte si, že každé posunutí má inverzní posunutí).

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \to G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \to G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme jakoukoli grupovou strukturu na $\mathbb{R}$.

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \longrightarrow G$.

Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \to G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \to G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme jakoukoli grupovou strukturu na $\mathbb{R}$.

DEFINICE (Definice topologických grup)

Topologická grupa G je množina, na které je dána grupová struktura a topologie taková, že grupové operace jsou spojité, tj. binární operace je spojité zobrazení $G \times G \longrightarrow G$ a inverzní operace je spojité zobrazení $G \longrightarrow G$.
Tato topologie se pak nazývá kompatibilní s grupou G.

Jak vyplývá z 1.semestru Matematické analýzy, $\mathbb{R}$ chápaná jako grupa je v obvyklé topologii topologickou grupou. Je zřejmé, že diskrétní a indiskrétní topologie jsou kompatibilní s každou grupou.

Homeomorfismus translací

Všechna pravá posunutí $\rho_a = \{x \rightsquigarrow xa : G \to G\}$ a levá posunutí $\lambda_a = \{x \rightsquigarrow ax : G \to G\}$ pro $a \in G$ jsou spojitá a tedy homeomorfní zobrazení.

Uvedené pozorování znamená, že je-li U okolí bodu x, je jeho pravé posunutí Ua o a okolím bodu xa. Odtud vyplývá, že např. Michaelova přímka není topologickou grupou ať vezmeme jakoukoli grupovou strukturu na $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$

Vzhledem k předchozímu pozorování stačí pro zavedení kompatibilní topologie na grupu definovat okolí neutrálního prvku. Všechna okolí např. bodu X se dostanou posunutím okolí neutrálního prvku o x. Pravá i levá posunutí musí dát stejná okolí. Napíšeme nyní vlastnosti soustavy okolí neutrálního prvku, které zaručí, že posunutím dostaneme topologii kompatibilní s danou grupou.

TVRZENÍ (Popis topologie kompatibilní s grupou)

Nechť $\mathcal{U}$ je filtr podmnožin grupy G mající následující vlastnosti.

1. $e \in \bigcap \mathcal{U}$;
2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, tj. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$ tj., pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ s vlastností $V^2 \subset U$;
4. $x\mathcal{U}x^{-1} = \mathcal{U}$ pro každé $x \in G$, tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ s vlastností $xVx^{-1} \subset U$.

Pak existuje jediná topologie na G, která je kompatibilní s grupou G a má za okolí neutrálního prvku právě soustavu $\mathcal{U}$.
Pokud je dána topologie kompatibilní s grupou G, pak soustava $\mathcal{U}$ okolí neutrálního prvku má vlastnosti 1–4.

Důkaz

TVRZENÍ (Popis topologie kompatibilní s grupou)

Nechť $\mathcal{U}$ je filtr podmnožin grupy G mající následující vlastnosti.

1. $e \in \bigcap \mathcal{U}$;
2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, *tj.* $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$ *tj., pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *s vlastností* $V^2 \subset U$;
4. $x\mathcal{U}x^{-1} = \mathcal{U}$ *pro každé* $x \in G$, *tj. pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *s vlastností* $xVx^{-1} \subset U$.

Pak existuje jediná topologie na G, která je kompatibilní s grupou G a má za okolí neutrálního prvku právě soustavu $\mathcal{U}$.
Pokud je dána topologie kompatibilní s grupou G, pak soustava $\mathcal{U}$ okolí neutrálního prvku má vlastnosti 1–4.

Důkaz

TVRZENÍ (Popis topologie kompatibilní s grupou)

Nechť $\mathcal{U}$ je filtr podmnožin grupy G mající následující vlastnosti.

1. $e \in \bigcap \mathcal{U}$;
2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, *tj.* $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$ *tj., pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *s vlastností* $V^2 \subset U$;
4. $x\mathcal{U}x^{-1} = \mathcal{U}$ *pro každé* $x \in G$, *tj. pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *s vlastností* $xVx^{-1} \subset U$.

Pak existuje jediná topologie na G, která je kompatibilní s grupou G a má za okolí neutrálního prvku právě soustavu $\mathcal{U}$.
Pokud je dána topologie kompatibilní s grupou G, pak soustava $\mathcal{U}$ okolí neutrálního prvku má vlastnosti 1–4.

Důkaz

Je dobré si uvědomit, že třetí vlastnost soustavy $\mathcal{U}$ implikuje čtvrtou vlastnost soustav okolí v topologickém prostoru, že každé okolí x je okolím menšího okolí x.

TVRZENÍ (Popis topologie kompatibilní s grupou)

Nechť $\mathcal{U}$ je filtr podmnožin grupy G mající následující vlastnosti.

1. $e \in \bigcap \mathcal{U}$;
2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, *tj.* $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$ *tj., pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *s vlastností* $V^2 \subset U$;
4. $x\mathcal{U}x^{-1} = \mathcal{U}$ *pro každé* $x \in G$, *tj. pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje* $V \in \mathcal{U}$ *s vlastností* $xVx^{-1} \subset U$.

Pak existuje jediná topologie na G, která je kompatibilní s grupou G a má za okolí neutrálního prvku právě soustavu $\mathcal{U}$.
Pokud je dána topologie kompatibilní s grupou G, pak soustava $\mathcal{U}$ okolí neutrálního prvku má vlastnosti 1–4.

Důkaz

Je dobré si uvědomit, že třetí vlastnost soustavy $\mathcal{U}$ implikuje čtvrtou vlastnost soustav okolí v topologickém prostoru, že každé okolí x je okolím menšího okolí x.

Je zřejmé, že pro komutativní grupu G je podmínka 4 splněna automaticky.
Jednoduché důsledky popisu topologie na grupách jsou uvedeny na začátku Otázek.

$\Rightarrow$

Je zřejmé, jaká zobrazení se berou mezi topologickými grupami: spojitá zobrazení, která jsou současně grupovými homomorfizmy. Budeme v tomto případě mluvit o spojitých homomorfizmech. Protože topologie je určena soustavou okolí v neutrálním prvku e, dá se očekávat, že spojitost bude dána spojitostí v e. Důkaz je triviální.

TVRZENÍ (Spojitost homomorfizmu)

Homomorfizmus $f : G \to H$ topologických grup G, H je spojitý právě když je spojitý v neutrálním prvku e.

Je zřejmé, jaká zobrazení se berou mezi topologickými grupami: spojitá zobrazení, která jsou současně grupovými homomorfizmy. Budeme v tomto případě mluvit o spojitých homomorfizmech. Protože topologie je určena soustavou okolí v neutrálním prvku e, dá se očekávat, že spojitost bude dána spojitostí v e. Důkaz je triviální.

TVRZENÍ (Spojitost homomorfizmu)

Homomorfizmus $f : G \to H$ topologických grup G, H je spojitý právě když je spojitý v neutrálním prvku e.

Je zřejmé, jaká zobrazení se berou mezi topologickými grupami: spojitá zobrazení, která jsou současně grupovými homomorfizmy. Budeme v tomto případě mluvit o spojitých homomorfizmech. Protože topologie je určena soustavou okolí v neutrálním prvku e, dá se očekávat, že spojitost bude dána spojitostí v e. Důkaz je triviální.

TVRZENÍ (Spojitost homomorfizmu)

Homomorfizmus $f : G \to H$ topologických grup G, H je spojitý právě když je spojitý v neutrálním prvku e.

Později uvidíme, že i jiné vlastnosti homomorfizmů jsou určovány vlastnostmi v e.

$\Rightarrow$

Pomocí vlastností soustavy okolí v e lze snadno definovat uniformity na grupě. Např. na $\mathbb{R}$ má obvyklá uniformita bázi $\{(x,y); |x-y| < r\}$ – prvky báze jsou tedy složeny z těch dvojic bodů, jejichž rozdíl (tj. xy^{-1}) padne do r-okolí 0.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U},$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}, \text{ resp. },$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G *je topologická grupa a* $\mathcal{U}$ *je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin* $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,,$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,,\ \text{resp.}\,,$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{U}_l$ *resp., indukujících topologii* G.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,,$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,, \text{ resp. },$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

Ověření axiómů uniformit je přímočaré.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,,$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,, \text{ resp. },$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

Následující tvrzení plyne ihned z vlastností uniformit.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \textit{ pro } U \in \mathcal{U}\,,$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \textit{ pro } U \in \mathcal{U}\,,\ \textit{resp.}\,,$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

Následující tvrzení plyne ihned z vlastností uniformit.

DŮSLEDEK (Metrizovatelnost a úplná regularita)

1. *Topologická grupa je úplně regulární.*
2. *Topologická grupa je pseudometrizovatelná právě když má spočetnou bázi okolí neutrálního prvku.*

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,,$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,, \text{ resp.}\,,$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r$, $\mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

Uvědomte si, že množiny $\widetilde{U}_r$ jsou invariantní vůči pravé translaci (tj., $(x,y) \in \widetilde{U}_r \Leftrightarrow (xz, yz) \in \widetilde{U}_r$ pro libovolné $z \in G$), množiny $\widetilde{U}_l$ jsou invariantní vůči levé translaci. To odůvodňuje přívlastky uniformit v následující definici.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x, y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U},$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x, y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}, \text{ resp. },$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

Uvědomte si, že množiny $\widetilde{U}_r$ jsou invariantní vůči pravé translaci (tj., $(x, y) \in \widetilde{U}_r \Leftrightarrow (xz, yz) \in \widetilde{U}_r$ pro libovolné $z \in G$), množiny $\widetilde{U}_l$ jsou invariantní vůči levé translaci. To odůvodňuje přívlastky uniformit v následující definici.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

TVRZENÍ (Uniformity na topologické grupě)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Pak soustavy následujících podmnožin $G \times G$

$$\widetilde{U}_r = \{(x,y); xy^{-1} \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,,$$

$$\widetilde{U}_l = \{(x,y); x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,, \text{ resp. },$$

jsou bázemi uniformit $\mathcal{U}_r, \mathcal{U}_l$ resp., indukujících topologii G.

DEFINICE (Levá a pravá uniformita)

Uniformita $\mathcal{U}_r$ (nebo $\mathcal{U}_l$) na topologické grupě G se nazývá pravá (levá, resp.) uniformita na G.

Levá a pravá uniformita (i dále definovaná oboustranná uniformita) mají hezký popis pomocí uniformních pokrytí – viz Cvičení.

$\Rightarrow$

Je zřejmé, že pravá a levá uniformita splývají na komutativní grupě. Mohou však splývat i na nekomutativní grupě. Dá se očekávat, že topologické grupy, na nichž jejich pravé a levé uniformity splývají, mají další hezké vlastnosti a je vhodné jim dát nějaký název. Příklad topologické grupy, na které levá a pravá uniformita nesplývají, je uveden v Příkladech.

DEFINICE (Souměrné grupy)

Topologická grupa se nazývá uniformní, jestliže její pravá uniformita splývá s levou uniformitou.

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

Důkaz

Vnitřní charakterizaci uniformních grup (pomocí okolí neutrálního prvku) naleznete ve Cvičeních.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Souměrné grupy)

Topologická grupa se nazývá uniformní, jestliže její pravá uniformita splývá s levou uniformitou.

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

Důkaz

Vnitřní charakterizaci uniformních grup (pomocí okolí neutrálního prvku) naleznete ve Cvičeních.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Souměrné grupy)

Topologická grupa se nazývá uniformní, jestliže její pravá uniformita splývá s levou uniformitou.

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

Důkaz

Vnitřní charakterizaci uniformních grup (pomocí okolí neutrálního prvku) naleznete ve Cvičeních.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Souměrné grupy)

Topologická grupa se nazývá uniformní, jestliže její pravá uniformita splývá s levou uniformitou.

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

▸ Důkaz

Vnitřní charakterizaci uniformních grup (pomocí okolí neutrálního prvku) naleznete ve Cvičeních.

$\Rightarrow$

Je přirozenou otázkou, zda existují další uniformity na topologické grupě vhodně svázané s grupovou strukturou. Z levé a pravé uniformity můžeme vytvořit supremum a infimum. Obecně však supremum dvou uniformit na topologickém prostoru nemusí indukovat danou topologii. Vzhledem k existenci jemných uniformit je situace u infima jiná (o supremu levé a pravé uniformity více v Poznámkách).

DEFINICE (Oboustranná uniformita)

Nechť G je topologická grupa. Nejhrubší uniformita jemnější než levá a pravá uniformita na G se nazývá oboustranná uniformita na G a značí se symbolem $\mathcal{U}_f$.

TVRZENÍ (Popis oboustranné uniformity)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Uniformita $\mathcal{U}_f$ indukuje topologii prostoru G a má za bázi následující množiny

$$\widetilde{U}_r \cap \widetilde{U}_l = \{(x,y); xy^{-1}, x^{-1}y \in U\} \ \textit{pro} \ U \in \mathcal{U}\,.$$

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost homomorfizmů)

Nechť $f : G \to H$ je spojitý homomorfismus mezi topologickými grupami. Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity na G, H resp., je $f : (G,\mathcal{U}) \to (H,\mathcal{V})$ stejnoměrně spojité zobrazení.

DEFINICE (Oboustranná uniformita)

Nechť G je topologická grupa. Nejhrubší uniformita jemnější než levá a pravá uniformita na G se nazývá oboustranná uniformita na G a značí se symbolem $\mathcal{U}_f$.

TVRZENÍ (Popis oboustranné uniformity)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Uniformita $\mathcal{U}_f$ indukuje topologii prostoru G a má za bázi následující množiny

$$\widetilde{U}_r \cap \widetilde{U}_l = \{(x,y); xy^{-1}, x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}.$$

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost homomorfizmů)

Nechť $f : G \to H$ je spojitý homomorfismus mezi topologickými grupami. Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity na G, H resp., je $f : (G,\mathcal{U}) \to (H,\mathcal{V})$ stejnoměrně spojité zobrazení.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Oboustranná uniformita)

Nechť G je topologická grupa. Nejhrubší uniformita jemnější než levá a pravá uniformita na G se nazývá oboustranná uniformita na G a značí se symbolem $\mathcal{U}_f$.

Z popisu infima uniformit a z existence jemné uniformity vyplývá ihned následující tvrzení.

TVRZENÍ (Popis oboustranné uniformity)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Uniformita $\mathcal{U}_f$ indukuje topologii prostoru G a má za bázi následující množiny

$$\widetilde{U}_r \cap \widetilde{U}_l = \{(x,y); xy^{-1}, x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,.$$

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost homomorfizmů)

Nechť $f : G \to H$ je spojitý homomorfismus mezi topologickými grupami. Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity na G, H resp., je $f : (G,\mathcal{U}) \to (H,\mathcal{V})$ stejnoměrně spojité zobrazení.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Oboustranná uniformita)

Nechť G je topologická grupa. Nejhrubší uniformita jemnější než levá a pravá uniformita na G se nazývá oboustranná uniformita na G a značí se symbolem $\mathcal{U}_f$.

Z popisu infima uniformit a z existence jemné uniformity vyplývá ihned následující tvrzení.

TVRZENÍ (Popis oboustranné uniformity)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Uniformita $\mathcal{U}_f$ indukuje topologii prostoru G a má za bázi následující množiny

$$\widetilde{U}_r \cap \widetilde{U}_l = \{(x,y); xy^{-1}, x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}.$$

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost homomorfizmů)

Nechť $f : G \to H$ je spojitý homomorfismus mezi topologickými grupami. Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity na G, H resp., je $f : (G,\mathcal{U}) \to (H,\mathcal{V})$ stejnoměrně spojité zobrazení.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Oboustranná uniformita)

Nechť G je topologická grupa. Nejhrubší uniformita jemnější než levá a pravá uniformita na G se nazývá oboustranná uniformita na G a značí se symbolem $\mathcal{U}_f$.

TVRZENÍ (Popis oboustranné uniformity)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Uniformita $\mathcal{U}_f$ indukuje topologii prostoru G a má za bázi následující množiny

$$\widetilde{U}_r \cap \widetilde{U}_l = \{(x,y); xy^{-1}, x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}.$$

Následující tvrzení se dokáže přímo z definic.

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost homomorfizmů)

Nechť $f : G \to H$ je spojitý homomorfismus mezi topologickými grupami. Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity na G, H resp., je $f : (G, \mathcal{U}) \to (H, \mathcal{V})$ stejnoměrně spojité zobrazení.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Oboustranná uniformita)

Nechť G je topologická grupa. Nejhrubší uniformita jemnější než levá a pravá uniformita na G se nazývá oboustranná uniformita na G a značí se symbolem $\mathcal{U}_f$.

TVRZENÍ (Popis oboustranné uniformity)

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku. Uniformita $\mathcal{U}_f$ indukuje topologii prostoru G a má za bázi následující množiny

$$\widetilde{U}_r \cap \widetilde{U}_l = \{(x,y); xy^{-1}, x^{-1}y \in U\} \text{ pro } U \in \mathcal{U}\,.$$

Následující tvrzení se dokáže přímo z definic.

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost homomorfizmů)

Nechť $f : G \to H$ je spojitý homomorfismus mezi topologickými grupami. Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity na G, H resp., je $f : (G,\mathcal{U}) \to (H,\mathcal{V})$ stejnoměrně spojité zobrazení.

$\Rightarrow$

Aby bylo možné použít znalostí z kapitoly o konstrukcích topologií, musíme nejdříve najít rozložení topologií kompatibilních s nějakou grupou mezi všemi topologiemi.

TVRZENÍ (Kompatibilní modifikace)

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Existuje topologie τ_g na G kompatibilní s grupou G mající následující vlastnost:
Homomorfizmus $f : (G, \tau) \to H$ do topologické grupy H je spojitý právě když je $f : (G, \tau_g) \to H$ spojitý.

Důkaz

DEFINICE (G-modifikace)

Topologii τ_g z předchozího tvrzení nazveme G-modifikací topologie τ.

DŮSLEDEK

Topologie τ_g z předchozího tvrzení je nejjemnější topologie kompatibilní s G, která je hrubší než τ.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Kompatibilní modifikace)

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Existuje topologie τ_g na G kompatibilní s grupou G mající následující vlastnost:
Homomorfizmus $f : (G, \tau) \to H$ do topologické grupy H je spojitý právě když je $f : (G, \tau_g) \to H$ spojitý.

Důkaz

DEFINICE (G-modifikace)

Topologii τ_g z předchozího tvrzení nazveme G-modifikací topologie τ.

DŮSLEDEK

Topologie τ_g z předchozího tvrzení je nejjemnější topologie kompatibilní s G, která je hrubší než τ.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Kompatibilní modifikace)

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Existuje topologie τ_g na G kompatibilní s grupou G mající následující vlastnost:
Homomorfizmus $f:(G,\tau)\to H$ do topologické grupy H je spojitý právě když je $f:(G,\tau_g)\to H$ spojitý.

Důkaz

DEFINICE (G-modifikace)

Topologii τ_g z předchozího tvrzení nazveme G-modifikací topologie τ.

DŮSLEDEK

Topologie τ_g z předchozího tvrzení je nejjemnější topologie kompatibilní s G, která je hrubší než τ.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Kompatibilní modifikace)

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Existuje topologie τ_g na G kompatibilní s grupou G mající následující vlastnost:
Homomorfizmus $f:(G,\tau)\to H$ do topologické grupy H je spojitý právě když je $f:(G,\tau_g)\to H$ spojitý.

Důkaz

DEFINICE (G-modifikace)

Topologii τ_g z předchozího tvrzení nazveme G-modifikací topologie τ.

DŮSLEDEK

Topologie τ_g z předchozího tvrzení je nejjemnější topologie kompatibilní s G, která je hrubší než τ.

$\Rightarrow$

Víme již, že diskrétní a indiskrétní topologie na grupě jsou s ní kompatibilní a že infima topologií kompatibilních s danou grupou je s ní opět kompatibilní. Z toho ihned plyne následující tvrzení. Za uspořádání bereme, stejně jako u všech topologií, opačnou inkluzi, tj. spojitost identického zobrazení z „menší" topologie do „větší" topologie.

TVRZENÍ (Úplný svaz kompatibilních topologií)

Množina všech kompatibilních topologií na dané grupě je úplný svaz.

TVRZENÍ (Homomorfizmy na supremech a infimech)

Nechť G, H jsou grupy a G_i (nebo H_i) pro $i \in I$ jsou topologické grupy na G (nebo H, resp.). Je-li f spojitý homomorfizmus $G_i \to H_i$ pro každé $i \in I$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \sup_I \mathcal{H}_i)$ a $(X, \inf_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \inf_I \mathcal{H}_I)$, kde suprema a infima se berou v množině všech kompatibilních topologií s G (s H, resp.).

Z předchozí věty ihned vyplývá, že lze definovat slabé a silné topologie (kompatibilní s nějakou grupou) vzhledem k systémům homomorfizmů do nebo z topologických grup. Slabé topologie splývají se slabými topologiemi vytvořenými v topologických prostorech, silné topologie se dostanou jako G-modifikace silných topologií vytvořených v topologických prostorech.

TVRZENÍ (Úplný svaz kompatibilních topologií)

Množina všech kompatibilních topologií na dané grupě je úplný svaz.

TVRZENÍ (Homomorfizmy na supremech a infimech)

Nechť G, H jsou grupy a G_i (nebo H_i) pro $i \in I$ jsou topologické grupy na G (nebo H, resp.). Je-li f spojitý homomorfizmus $G_i \to H_i$ pro každé $i \in I$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \sup_I \mathcal{H}_i)$ a $(X, \inf_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \inf_I \mathcal{H}_I)$, kde suprema a infima se berou v množině všech kompatibilních topologií s G (s H, resp.).

Z předchozí věty ihned vyplývá, že lze definovat slabé a silné topologie (kompatibilní s nějakou grupou) vzhledem k systémům homomorfizmů do nebo z topologických grup. Slabé topologie splývají se slabými topologiemi vytvořenými v topologických prostorech, silné topologie se dostanou jako G-modifikace silných topologií vytvořených v topologických prostorech.

TVRZENÍ (Úplný svaz kompatibilních topologií)

Množina všech kompatibilních topologií na dané grupě je úplný svaz.

Pokud bychom zúžili zkoumání jen na Hausdorffovy topologické grupy, vyvstává problém, zda kromě diskrétní topologie existuje na každé grupě ještě další kompatibilní topologie. Odpověď je kladná pro komutativní grupy, pro nekomutativní je kladná za dalších předpokladů teorie množin (obecná odpověď známa není).

TVRZENÍ (Homomorfizmy na supremech a infimech)

Nechť G, H jsou grupy a G_i (nebo H_i) pro $i \in I$ jsou topologické grupy na G (nebo H, resp.). Je-li f spojitý homomorfizmus $G_i \to H_i$ pro každé $i \in I$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \sup_I \mathcal{H}_i)$ a $(X, \inf_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \inf_I \mathcal{H}_I)$, kde suprema a infima se berou v množině všech kompatibilních topologií s G (s H, resp.).

Z předchozí věty ihned vyplývá, že lze definovat slabé a silné topologie (kompatibilní s nějakou grupou) vzhledem k systémům homomorfizmů do nebo z topologických grup. Slabé topologie splývají se slabými topologiemi vytvořenými v topologických prostorech, silné topologie se dostanou jako G-modifikace silných topologií vytvořených v topologických prostorech.

TVRZENÍ (Úplný svaz kompatibilních topologií)

Množina všech kompatibilních topologií na dané grupě je úplný svaz.

Pro použití předchozích výsledků potřebujeme, stejně jako u topologických a uniformních prostorů, následující vlastnosti suprem a infim kompatibilních topologií. Tvrzení vyplývá snadno z popisu G-modifikace a z příslušné věty pro topologie.

TVRZENÍ (Homomorfizmy na supremech a infimech)

Nechť G, H jsou grupy a G_i (nebo H_i) pro $i \in I$ jsou topologické grupy na G (nebo H, resp.). Je-li f spojitý homomorfizmus $G_i \to H_i$ pro každé $i \in I$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \sup_I \mathcal{H}_i)$ a $(X, \inf_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \inf_I \mathcal{H}_I)$, kde suprema a infima se berou v množině všech kompatibilních topologií s G (s H, resp.).

Z předchozí věty ihned vyplývá, že lze definovat slabé a silné topologie (kompatibilní s nějakou grupou) vzhledem k systémům homomorfizmů do nebo z topologických grup. Slabé topologie splývají se slabými topologiemi vytvořenými v topologických prostorech, silné topologie se dostanou jako G-modifikace silných topologií vytvořených v topologických prostorech.

TVRZENÍ (Úplný svaz kompatibilních topologií)

Množina všech kompatibilních topologií na dané grupě je úplný svaz.

TVRZENÍ (Homomorfizmy na supremech a infimech)

Nechť G, H *jsou grupy a* G_i *(nebo* H_i*) pro* $i \in I$ *jsou topologické grupy na* G *(nebo* H*, resp.). Je-li* f *spojitý homomorfizmus* $G_i \to H_i$ *pro každé* $i \in I$*, pak je* f *spojité i jako zobrazení* $(X, \sup_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \sup_I \mathcal{H}_i)$ *a* $(X, \inf_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \inf_I \mathcal{H}_I)$*, kde suprema a infima se berou v množině všech kompatibilních topologií s* G *(s* H*, resp.).*

Z předchozí věty ihned vyplývá, že lze definovat slabé a silné topologie (kompatibilní s nějakou grupou) vzhledem k systémům homomorfizmů do nebo z topologických grup. Slabé topologie splývají se slabými topologiemi vytvořenými v topologických prostorech, silné topologie se dostanou jako G-modifikace silných topologií vytvořených v topologických prostorech.

TVRZENÍ (Úplný svaz kompatibilních topologií)

Množina všech kompatibilních topologií na dané grupě je úplný svaz.

TVRZENÍ (Homomorfizmy na supremech a infimech)

Nechť G, H jsou grupy a G_i (nebo H_i) pro $i \in I$ jsou topologické grupy na G (nebo H, resp.). Je-li f spojitý homomorfizmus $G_i \to H_i$ pro každé $i \in I$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \sup_I \mathcal{H}_i)$ a $(X, \inf_I \mathcal{G}_i) \to (Y, \inf_I \mathcal{H}_I)$, kde suprema a infima se berou v množině všech kompatibilních topologií s G (s H, resp.).

Z předchozí věty ihned vyplývá, že lze definovat slabé a silné topologie (kompatibilní s nějakou grupou) vzhledem k systémům homomorfizmů do nebo z topologických grup. Slabé topologie splývají se slabými topologiemi vytvořenými v topologických prostorech, silné topologie se dostanou jako G-modifikace silných topologií vytvořených v topologických prostorech.

Následující tvrzení je jednoduchým důsledkem poslední úvahy na předchozí straně a definice součinu topologií.

TVRZENÍ (Součin topologických grup)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ je soustava topologických grup. Pak $\prod_I G_i$ je topologická grupa, kde se na kartézském součinu bere obvyklá grupová součinová struktura (definovaná po souřadnicích) a topologie součinu topologických prostorů.

Topologie $\prod_I G_i$ je slabá kompatibilní topologie vzhledem ke všem projekcím $\prod_I G_i \to G_i$.

Topologickou grupu $\prod_I G_i$ budeme nazývat součinem topologických grup.

Dostáváme důležitý příklad topologických grup, totiž topologickou grupu $F_p(X)$ všech reálných funkcí na dané množině X s topologií bodové konvergence (neboť tuto grupu lze chápat jako mocninu $\mathbb{R}^X$).

TVRZENÍ (Součin topologických grup)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ *je soustava topologických grup. Pak* $\prod_I G_i$ *je topologická grupa, kde se na kartézském součinu bere obvyklá grupová součinová struktura (definovaná po souřadnicích) a topologie součinu topologických prostorů.*
Topologie $\prod_I G_i$ *je slabá kompatibilní topologie vzhledem ke všem projekcím* $\prod_I G_i \to G_i$.

Topologickou grupu $\prod_I G_i$ budeme nazývat součinem topologických grup.

Dostáváme důležitý příklad topologických grup, totiž topologickou grupu $F_p(X)$ všech reálných funkcí na dané množině X s topologií bodové konvergence (neboť tuto grupu lze chápat jako mocninu $\mathbb{R}^X$).

TVRZENÍ (Součin topologických grup)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ *je soustava topologických grup. Pak* $\prod_I G_i$ *je topologická grupa, kde se na kartézském součinu bere obvyklá grupová součinová struktura (definovaná po souřadnicích) a topologie součinu topologických prostorů.*
Topologie $\prod_I G_i$ *je slabá kompatibilní topologie vzhledem ke všem projekcím* $\prod_I G_i \to G_i$.

Topologickou grupu $\prod_I G_i$ budeme nazývat součinem topologických grup.

Dostáváme důležitý příklad topologických grup, totiž topologickou grupu $F_p(X)$ všech reálných funkcí na dané množině X s topologií bodové konvergence (neboť tuto grupu lze chápat jako mocninu $\mathbb{R}^X$).

TVRZENÍ (Součin topologických grup)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ je soustava topologických grup. Pak $\prod_I G_i$ je topologická grupa, kde se na kartézském součinu bere obvyklá grupová součinová struktura (definovaná po souřadnicích) a topologie součinu topologických prostorů.
Topologie $\prod_I G_i$ je slabá kompatibilní topologie vzhledem ke všem projekcím $\prod_I G_i \to G_i$.

Topologickou grupu $\prod_I G_i$ budeme nazývat součinem topologických grup.

Dostáváme důležitý příklad topologických grup, totiž topologickou grupu $F_p(X)$ všech reálných funkcí na dané množině X s topologií bodové konvergence (neboť tuto grupu lze chápat jako mocninu $\mathbb{R}^X$).

Podobně, jako součiny se pěkně chovají i podgrupy.

TVRZENÍ (Topologická podgrupa)

Nechť G je topologická grupa a H její podgrupa. Pak H s topologií podprostoru G je topologická grupa. Topologie na H je slabá kompatibilní topologie vzhledem k identickému homomorfizmu $H \to G$.

Topologickou grupu H z předchozího tvrzení budeme nazývat topologickou podgrupou topologické grupy G.

Důležitým příkladem je topologická grupa $C_p(X)$ všech spojitých reálných funkcí na topologickém prostoru X s bodovou konvergencí (chápaná jako podgrupa topologické grupy $F_p(X)$ z předchozí strany). Její topologickou podgrupou je i $C_p^*(X)$ (omezené funkce), nebo $U_p(X)$ (všechny stejnoměrně spojité funkce). V Příkladech jsou uvedeny další důležité příklady grup funkcí.

TVRZENÍ (Topologická podgrupa)

Nechť G je topologická grupa a H její podgrupa. Pak H s topologií podprostoru G je topologická grupa. Topologie na H je slabá kompatibilní topologie vzhledem k identickému homomorfizmu $H \to G$.

Topologickou grupu H z předchozího tvrzení budeme nazývat topologickou podgrupou topologické grupy G.

Důležitým příkladem je topologická grupa $C_p(X)$ všech spojitých reálných funkcí na topologickém prostoru X s bodovou konvergencí (chápaná jako podgrupa topologické grupy $F_p(X)$ z předchozí strany). Její topologickou podgrupou je i $C_p^*(X)$ (omezené funkce), nebo $U_p(X)$ (všechny stejnoměrně spojité funkce). V Příkladech jsou uvedeny další důležité příklady grup funkcí.

TVRZENÍ (Topologická podgrupa)

Nechť G je topologická grupa a H její podgrupa. Pak H s topologií podprostoru G je topologická grupa. Topologie na H je slabá kompatibilní topologie vzhledem k identickému homomorfizmu $H \to G$.

Topologickou grupu H z předchozího tvrzení budeme nazývat topologickou podgrupou topologické grupy G.

Důležitým příkladem je topologická grupa $C_p(X)$ všech spojitých reálných funkcí na topologickém prostoru X s bodovou konvergencí (chápaná jako podgrupa topologické grupy $F_p(X)$ z předchozí strany). Její topologickou podgrupou je i $C_p^*(X)$ (omezené funkce), nebo $U_p(X)$ (všechny stejnoměrně spojité funkce). V Příkladech jsou uvedeny další důležité příklady grup funkcí.

TVRZENÍ (Topologická podgrupa)

Nechť G je topologická grupa a H její podgrupa. Pak H s topologií podprostoru G je topologická grupa. Topologie na H je slabá kompatibilní topologie vzhledem k identickému homomorfizmu $H \to G$.

Topologickou grupu H z předchozího tvrzení budeme nazývat topologickou podgrupou topologické grupy G.

Důležitým příkladem je topologická grupa $C_p(X)$ všech spojitých reálných funkcí na topologickém prostoru X s bodovou konvergencí (chápaná jako podgrupa topologické grupy $F_p(X)$ z předchozí strany). Její topologickou podgrupou je i $C_p^*(X)$ (omezené funkce), nebo $U_p(X)$ (všechny stejnoměrně spojité funkce). V Příkladech jsou uvedeny další důležité příklady grup funkcí.

Silné topologie ve třídě topologických prostorů sice obecně nezachovávají kompatibilitu s nějakou grupou, ale existují speciální případy, kdy se kompatibilita zachovává. Patří k nim tzv faktorové grupy, neboli kvocienty grup.

Musíme si uvědomit, že kvocient grupy G podle podgrupy H je možný jen pro normální podgrupy (tj., $xHx^{-1} = H$ pro každé $x \in G$), pokud chceme dostat opět grupu. Nutno dodat, že se používají i případy, kdy H je obecně nenormální podgrupa – výsledkem je algebraická struktura blízká grupě a řada tvrzení pro kvocienty podle normálních podgrup platí i pro uvedený obecnější případ.
Připomeňme ještě, že kvocientem G podle H je grupa G/H tříd ekvivalence $x \sim y$ jestliže $xy^{-1} \in H$.

TVRZENÍ (Kvocient topologické grupy)

Nechť G je topologická grupa a H je její normální podgrupa. Pak topologický kvocient G/H je topologickou grupou, tj. kvocientová topologie je kompatibilní s grupou G/H. Kvocientové zobrazení je otevřené.

Důkaz

Nyní by měla následovat část odpovídající „součtům” topologických grup. Ta je oproti situaci v topologických prostorech značně složitější a bude odložena po části o volných topologických grupách.

Silné topologie ve třídě topologických prostorů sice obecně nezachovávají kompatibilitu s nějakou grupou, ale existují speciální případy, kdy se kompatibilita zachovává. Patří k nim tzv faktorové grupy, neboli kvocienty grup.

Musíme si uvědomit, že kvocient grupy G podle podgrupy H je možný jen pro normální podgrupy (tj., $xHx^{-1} = H$ pro každé $x \in G$), pokud chceme dostat opět grupu. Nutno dodat, že se používají i případy, kdy H je obecně nenormální podgrupa – výsledkem je algebraická struktura blízká grupě a řada tvrzení pro kvocienty podle normálních podgrup platí i pro uvedený obecnější případ.
Připomeňme ještě, že kvocientem G podle H je grupa G/H tříd ekvivalence $x \sim y$ jestliže $xy^{-1} \in H$.

TVRZENÍ (Kvocient topologické grupy)

Nechť G je topologická grupa a H je její normální podgrupa. Pak topologický kvocient G/H je topologickou grupou, tj. kvocientová topologie je kompatibilní s grupou G/H. Kvocientové zobrazení je otevřené.

Důkaz

Nyní by měla následovat část odpovídající „součtům” topologických grup. Ta je oproti situaci v topologických prostorech značně složitější a bude odložena po části o volných topologických grupách.

Silné topologie ve třídě topologických prostorů sice obecně nezachovávají kompatibilitu s nějakou grupou, ale existují speciální případy, kdy se kompatibilita zachovává. Patří k nim tzv faktorové grupy, neboli kvocienty grup.

Musíme si uvědomit, že kvocient grupy G podle podgrupy H je možný jen pro normální podgrupy (tj., $xHx^{-1} = H$ pro každé $x \in G$), pokud chceme dostat opět grupu. Nutno dodat, že se používají i případy, kdy H je obecně nenormální podgrupa – výsledkem je algebraická struktura blízká grupě a řada tvrzení pro kvocienty podle normálních podgrup platí i pro uvedený obecnější případ.
Připomeňme ještě, že kvocientem G podle H je grupa G/H tříd ekvivalence $x \sim y$ jestliže $xy^{-1} \in H$.

TVRZENÍ (Kvocient topologické grupy)

Nechť G je topologická grupa a H je její normální podgrupa. Pak topologický kvocient G/H je topologickou grupou, tj. kvocientová topologie je kompatibilní s grupou G/H. Kvocientové zobrazení je otevřené.

Důkaz

Nyní by měla následovat část odpovídající „součtům” topologických grup. Ta je oproti situaci v topologických prostorech značně složitější a bude odložena po části o volných topologických grupách.

Silné topologie ve třídě topologických prostorů sice obecně nezachovávají kompatibilitu s nějakou grupou, ale existují speciální případy, kdy se kompatibilita zachovává. Patří k nim tzv faktorové grupy, neboli kvocienty grup.

Musíme si uvědomit, že kvocient grupy G podle podgrupy H je možný jen pro normální podgrupy (tj., $xHx^{-1} = H$ pro každé $x \in G$), pokud chceme dostat opět grupu. Nutno dodat, že se používají i případy, kdy H je obecně nenormální podgrupa – výsledkem je algebraická struktura blízká grupě a řada tvrzení pro kvocienty podle normálních podgrup platí i pro uvedený obecnější případ.
Připomeňme ještě, že kvocientem G podle H je grupa G/H tříd ekvivalence $x \sim y$ jestliže $xy^{-1} \in H$.

TVRZENÍ (Kvocient topologické grupy)

Nechť G je topologická grupa a H je její normální podgrupa. Pak topologický kvocient G/H je topologickou grupou, tj. kvocientová topologie je kompatibilní s grupou G/H. Kvocientové zobrazení je otevřené.

Důkaz

Nyní by měla následovat část odpovídající „součtům” topologických grup. Ta je oproti situaci v topologických prostorech značně složitější a bude odložena po části o volných topologických grupách.

Následující situace je důležitá pro aplikace v různých třídách objektů.
Je-li X množina, existuje v topologických nebo uniformních prostorech jakýsi „nejmenší" takový prostor $Free(X)$ vytvořený množinou X. Nejmenší ve smyslu, že existuje kanonické zobrazení $e : X \to Free(X)$ a jakékoli zobrazení $f : X \to Y$ do topologického (nebo uniformního) prostoru jednoznačně určuje spojité (nebo stejnoměrně spojité) zobrazení $\widetilde{f} : Free(X) \to Y$ tak, že $f = \widetilde{f}e$. Je jasné, že $Free(X)$ je množina X s diskrétní topologií (nebo uniformně diskrétní uniformitou).
Situace je ale mnohem složitější, pokud chceme, aby $Free(X)$ byla grupa nebo topologická grupa (a stejně tak ony objekty Y) a f byly (spojité) homomorfizmy. Protože podrobný výklad by byl dlouhý, nebudeme trvat na úplné přesnosti.

DEFINICE (Volná grupa)

Nechť X je množina. Mějme množinu všech „slov" $s = (x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n})$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, x_i jsou body X a $n_i = \pm 1$.
Prázdné slovo (pro $n = 0$) se označí jako e. Pro slovo s značí s^{-1} slovo, které se od s liší obráceným pořadím a záměnou znamének u n_i.
Volná grupa nad množinou X je množina ekvivalencí všech výše uvedených slov podle ekvivalence $sx^k x^{-k} t \sim st$. Binární operace st dvou slov s a t je složení těchto slov: slovo t se zařadí za slovo s.
Neutrálním prvkem je prázdné slovo (pro $n = 0$, bude se značit jako e). Inverzním prvkem slova $(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n})$ je slovo $(x_n^{-k_n}, \dots, x_2^{-k_2}, x_1^{-k_1})$.
Tuto grupu označíme jako $F(X)$. Zobrazení $X \to F(X)$, které přiřazuje prvku x slovo (x) se bude značit

DEFINICE (Volná grupa)

Nechť X je množina. Mějme množinu všech „slov” $s = (x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n})$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, x_i jsou body X a $n_i = \pm 1$.
Prázdné slovo (pro $n = 0$) se označí jako e. Pro slovo s značí s^{-1} slovo, které se od s liší obráceným pořadím a záměnou znamének u n_i.
Volná grupa nad množinou X je množina ekvivalencí všech výše uvedených slov podle ekvivalence $sx^k x^{-k} t \sim st$. Binární operace st dvou slov s a t je složení těchto slov: slovo t se zařadí za slovo s.
Neutrálním prvkem je prázdné slovo (pro $n = 0$, bude se značit jako e). Inverzním prvkem slova $(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n})$ je slovo $(x_n^{-k_n}, \dots, x_2^{-k_2}, x_1^{-k_1})$.
Tuto grupu označíme jako $F(X)$. Zobrazení $X \to F(X)$, které přiřazuje prvku x slovo (x) se bude značit jako i_X.

Snadno se dokáže následující tvrzení (že je to opravdu charakterizace, je uvedeno v Otázkách).

TVRZENÍ (Charakterizace volné grupy)

Pro každé zobrazení f množiny X do grupy G existuje jediný homomorfismus $\tilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\tilde{f} i_X = f$.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Volná grupa)

Nechť X je množina. Mějme množinu všech „slov" $s = (x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, ..., x_n^{k_n})$, kde $n = 0, 1, 2, 3, ...$, x_i jsou body X a $n_i = \pm 1$.
Prázdné slovo (pro $n = 0$) se označí jako e. Pro slovo s značí s^{-1} slovo, které se od s liší obráceným pořadím a záměnou znamének u n_i.
Volná grupa nad množinou X je množina ekvivalencí všech výše uvedených slov podle ekvivalence $sx^kx^{-k}t \sim st$. Binární operace st dvou slov s a t je složení těchto slov: slovo t se zařadí za slovo s.
Neutrálním prvkem je prázdné slovo (pro $n = 0$, bude se značit jako e). Inverzním prvkem slova $(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, ..., x_n^{k_n})$ je slovo $(x_n^{-k_n}, ..., x_2^{-k_2}, x_1^{-k_1})$.
Tuto grupu označíme jako $F(X)$. Zobrazení $X \to F(X)$, které přiřazuje prvku x slovo (x) se bude značit jako i_X.

Snadno se dokáže následující tvrzení (že je to opravdu charakterizace, je uvedeno v Otázkách).

TVRZENÍ (Charakterizace volné grupy)

Pro každé zobrazení f množiny X do grupy G existuje jediný homomorfismus $\tilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\tilde{f} i_X = f$.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Volná grupa)

Nechť X je množina. Mějme množinu všech „slov” $s = (x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n})$, kde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, x_i jsou body X a $n_i = \pm 1$.
Prázdné slovo (pro $n = 0$) se označí jako e. Pro slovo s značí s^{-1} slovo, které se od s liší obráceným pořadím a záměnou znamének u n_i.
Volná grupa nad množinou X je množina ekvivalencí všech výše uvedených slov podle ekvivalence $sx^k x^{-k} t \sim st$. Binární operace st dvou slov s a t je složení těchto slov: slovo t se zařadí za slovo s.
Neutrálním prvkem je prázdné slovo (pro $n = 0$, bude se značit jako e). Inverzním prvkem slova $(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n})$ je slovo $(x_n^{-k_n}, \dots, x_2^{-k_2}, x_1^{-k_1})$.
Tuto grupu označíme jako $F(X)$. Zobrazení $X \to F(X)$, které přiřazuje prvku x slovo (x) se bude značit jako i_X.

Snadno se dokáže následující tvrzení (že je to opravdu charakterizace, je uvedeno v Otázkách).

TVRZENÍ (Charakterizace volné grupy)

Pro každé zobrazení f množiny X do grupy G existuje jediný homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\widetilde{f} i_X = f$.

⇒

K $F(X)$ je nyní nutné přidat topologii tak, abychom dostali topologickou grupu a platila předchozí věta. Uvedeme jen existenci této topologie a vnější popis. Vnitřní popis je velmi komplikovaný.

TVRZENÍ (Topologie na volné grupě)

Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Na volné grupě $F(X)$ existuje grupová topologie taková, že pro každé spojité zobrazení f prostoru X do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\widetilde{f} i_X = f$.

Důkaz

DEFINICE (Volné topologické grupy)

V situaci předchozí věty se volná grupa s uvedenou topologií nazývá volná topologická grupa.

TVRZENÍ (Topologie na volné grupě)

Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Na volné grupě $F(X)$ existuje grupová topologie taková, že pro každé spojité zobrazení f prostoru X do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\widetilde{f} i_X = f$.

Důkaz

DEFINICE (Volné topologické grupy)

V situaci předchozí věty se volná grupa s uvedenou topologií nazývá volná topologická grupa.

TVRZENÍ (Topologie na volné grupě)

Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Na volné grupě $F(X)$ existuje grupová topologie taková, že pro každé spojité zobrazení f prostoru X do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\widetilde{f} i_X = f$.

▸ Důkaz

DEFINICE (Volné topologické grupy)

V situaci předchozí věty se volná grupa s uvedenou topologií nazývá volná topologická grupa.

Direktní součet grup je obdoba disjunktních součtů topologických prostorů. Jenže disjunktní součet grup není grupa. Nejdříve se musí všechny tyto grupy „slepit" ve svých neutrálních prvcích a pak dodefinovat binární operace xy pro x,y z různých grup. Důkaz správností následující konstrukce není složitý a nebudeme jej uvádět.

TVRZENÍ (Zavedení direktního součtu)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ je soubor topologických grup s neutrálními prvky e_i. Nechť X je disjunktní součet množin $G_i, i \in I$. Na volné grupě $F(X)$ se zavede ekvivalence generovaná rovnostmi $(x)(y) = (xy)$ pro $x, y \in G_i$ a $e_i = e$ pro libovolné i. Vzniklý kvocient G je grupou, kvocientové zobrazení je homomorfismus a kvocientová topologie má následující vlastnost:

1. *Kanonické zobrazení $q_i : G_i \to G$ je homomorfismus a topologické vložení pro každé i.*
2. *Pro každý soubor $\{f_i; i \in I\}$ spojitých homomorfizmů $f_i : G_i \to H$, kde H je topologická grupa, existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : G \to H$ takový, že $\widetilde{f}\, q_i = f_i$ pro každé i.*

DEFINICE (Direktní součet topologických grup)

Topologická grupa G z předchozí věty se nazývá direktní součet topologických grup G_i a značí se $\sum_I G_i$.

TVRZENÍ (Zavedení direktního součtu)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ je soubor topologických grup s neutrálními prvky e_i. Nechť X je disjunktní součet množin $G_i, i \in I$. Na volné grupě $F(X)$ se zavede ekvivalence generovaná rovnostmi $(x)(y) = (xy)$ pro $x, y \in G_i$ a $e_i = e$ pro libovolné i. Vzniklý kvocient G je grupou, kvocientové zobrazení je homomorfismus a kvocientová topologie má následující vlastnost:

1. *Kanonické zobrazení $q_i : G_i \to G$ je homomorfismus a topologické vložení pro každé i.*
2. *Pro každý soubor $\{f_i; i \in I\}$ spojitých homomorfizmů $f_i : G_i \to H$, kde H je topologická grupa, existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : G \to H$ takový, že $f\, q_i = f_i$ pro každé i.*

DEFINICE (Direktní součet topologických grup)

Topologická grupa G z předchozí věty se nazývá direktní součet topologických grup G_i a značí se $\sum_I G_i$.

TVRZENÍ (Zavedení direktního součtu)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ *je soubor topologických grup s neutrálními prvky* e_i. *Nechť* X *je disjunktní součet množin* $G_i, i \in I$. *Na volné grupě* $F(X)$ *se zavede ekvivalence generovaná rovnostmi* $(x)(y) = (xy)$ *pro* $x, y \in G_i$ *a* $e_i = e$ *pro libovolné* i. *Vzniklý kvocient* G *je grupou, kvocientové zobrazení je homomorfismus a kvocientová topologie má následující vlastnost:*

1. *Kanonické zobrazení* $q_i : G_i \to G$ *je homomorfismus a topologické vložení pro každé* i.
2. *Pro každý soubor* $\{f_i; i \in I\}$ *spojitých homomorfizmů* $f_i : G_i \to H$, *kde* H *je topologická grupa, existuje jediný spojitý homomorfismus* $\widetilde{f} : G \to H$ *takový, že* $f\, q_i = f_i$ *pro každé* i.

DEFINICE (Direktní součet topologických grup)

Topologická grupa G z předchozí věty se nazývá direktní součet topologických grup G_i a značí se $\sum_I G_i$.

TVRZENÍ (Zavedení direktního součtu)

Nechť $\{G_i; i \in I\}$ je soubor topologických grup s neutrálními prvky e_i. Nechť X je disjunktní součet množin $G_i, i \in I$. Na volné grupě $F(X)$ se zavede ekvivalence generovaná rovnostmi $(x)(y) = (xy)$ pro $x, y \in G_i$ a $e_i = e$ pro libovolné i. Vzniklý kvocient G je grupou, kvocientové zobrazení je homomorfismus a kvocientová topologie má následující vlastnost:

1. *Kanonické zobrazení $q_i : G_i \to G$ je homomorfismus a topologické vložení pro každé i.*
2. *Pro každý soubor $\{f_i; i \in I\}$ spojitých homomorfizmů $f_i : G_i \to H$, kde H je topologická grupa, existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : G \to H$ takový, že $f\, q_i = f_i$ pro každé i.*

DEFINICE (Direktní součet topologických grup)

Topologická grupa G z předchozí věty se nazývá direktní součet topologických grup G_i a značí se $\sum_I G_i$.

U direktního součtu komutativních grup (chceme-li, aby výsledek byl opět komutativní) je konstrukce ještě jednodušší než u komutativních volných grup: direktní součet grup $\{G_i; i \in I\}$ je grupově izomorfní podgrupě součinu $\Pi_i G_i$ sestávající z prvků $\{x_i\}$ mající jen konečně mnoho nenulovývh prvků. Topologie direktního součinu však obecně není podprostorem součinu!

Je zřejmé, že kompaktní topologické grupy mají nějaké význačné vlastnosti oproti obecným topologickým grupám (viz Poznámky). Existuje v topologických grupách obdoba Čechovy-Stoneovy kompaktifikace? Odpověď je ano i ne.

TVRZENÍ (Kompaktifikace grup)

Pro každou Hausdorffovu topologickou grupu G existuje Hausdorffova kompaktní grupa bG a spojitý homomorfismus $b : G \to bG$ s následující vlastností:
Pro každý spojitý homomorfismus f na G do Hausdorffovy kompaktní grupy H existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : bG \to H$ tak, že $\widetilde{f} b = f$.

Důkaz

DEFINICE (Bohrova kompaktifikace)

Kompaktní grupa bG z předchozí věty se nazývá Bohrova kompaktifikace grupy G.

TVRZENÍ (Kompaktifikace grup)

Pro každou Hausdorffovu topologickou grupu G existuje Hausdorffova kompaktní grupa bG a spojitý homomorfismus $b : G \to bG$ s následující vlastností:
Pro každý spojitý homomorfismus f na G do Hausdorffovy kompaktní grupy H existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : bG \to H$ tak, že $\widetilde{f}b = f$.

▸ Důkaz

DEFINICE (Bohrova kompaktifikace)

Kompaktní grupa bG z předchozí věty se nazývá Bohrova kompaktifikace grupy G.

TVRZENÍ (Kompaktifikace grup)

Pro každou Hausdorffovu topologickou grupu G existuje Hausdorffova kompaktní grupa bG a spojitý homomorfismus $b : G \to bG$ s následující vlastností:
Pro každý spojitý homomorfismus f na G do Hausdorffovy kompaktní grupy H existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : bG \to H$ tak, že $\widetilde{f}\, b = f$.

▸ Důkaz

DEFINICE (Bohrova kompaktifikace)

Kompaktní grupa bG z předchozí věty se nazývá Bohrova kompaktifikace grupy G.

TVRZENÍ (Kompaktifikace grup)

Pro každou Hausdorffovu topologickou grupu G existuje Hausdorffova kompaktní grupa bG a spojitý homomorfismus $b : G \to bG$ s následující vlastností:
Pro každý spojitý homomorfismus f na G do Hausdorffovy kompaktní grupy H existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : bG \to H$ tak, že $\widetilde{f} b = f$.

Důkaz

DEFINICE (Bohrova kompaktifikace)

Kompaktní grupa bG z předchozí věty se nazývá Bohrova kompaktifikace grupy G.

Obecně není zobrazení b prosté. Např., je-li G lokálně kompaktní nekompaktní grupa, nemůže být podgrupou žádné kompaktní grupy (jako lokálně kompaktní by byla otevřenou podgrupou, a tedy uzavřenou podgrupou).

Topologická grupa má několik přirozených uniformit. Jsou alespoň zúplnění těchto uniformit topologické grupy? Odpověď je opět ano i ne, tentokrát však z jiných důvodů. U některých uniformit je odpověď ano, u některých ne.

TVRZENÍ (Zúplnění oboustranné uniformity)

Na zúplnění H topologické grupy G s oboustrannou uniformitou lze definovat grupovou strukturu tak, že G je topologickou podgrupou H.

Důkaz

TVRZENÍ (Zúplnění oboustranné uniformity)

Na zúplnění H topologické grupy G s oboustrannou uniformitou lze definovat grupovou strukturu tak, že G je topologickou podgrupou H.

Důkaz

TVRZENÍ (Zúplnění oboustranné uniformity)

Na zúplnění H topologické grupy G s oboustrannou uniformitou lze definovat grupovou strukturu tak, že G je topologickou podgrupou H.

Důkaz

Zúplnění jednostranné uniformity nemusí mít vhodnou grupovou strukturu. Příslušné příklady nejsou jednoduché.
Samozřejmě, pokud se levá a pravá uniformita shodují (např. na komutativní grupě), je jejich zúplnění topologická grupa. Existují topologické grupy, jejichž levá a pravá uniformita se neshodují a přesto jejich zúplnění je topologická grupa.

$\Rightarrow$

Dualita mezi dvěma třídami struktur obvykle znamená, že mezi oběma třídami existuje vzájemně jednoznačný vztah, který je vytvořen nějakým přirozeným způsobem, obvykle pomoci jistých množin zobrazení do specifického prostoru.
Jednou ze známých dualit je Stoneova dualita mezi kompaktními nuldimenzionálními prostory a Booleovými algebrami (používají se zobrazení do dvoubodových prostorů).
Nyní se podíváme na dualitu mezi komutativnimi grupami a kompaktnimi komutativnimi grupami.

DEFINICE (Duální grupa)

Označíme symbolem $\mathbb{T}$ multiplikativní grupu komplexních čísel majících absolutní hodnotu rovnou 1 a topologii podprostoru roviny. Dále pro topologickou komutativní grupu G označíme G^* topologickou grupu všech spojitých homomorfizmů $G \to \mathbb{T}$ s kompaktní otevřenou topologií. Topologická grupa G^* se nazývá duální k G

TVRZENÍ (Pontrjaginova dualita)

Je-li G kompaktní Hausdorffova (nebo diskrétní) grupa, je duální grupa G^* diskrétní (resp. kompaktní Hausdorffova) a platí $(G^*)^* = G$.

Důkaz

DEFINICE (Duální grupa)

Označíme symbolem $\mathbb{T}$ multiplikativní grupu komplexních čísel majících absolutní hodnotu rovnou 1 a topologii podprostoru roviny. Dále pro topologickou komutativní grupu G označíme G^* topologickou grupu všech spojitých homomorfizmů $G \to \mathbb{T}$ s kompaktní otevřenou topologií. Topologická grupa G^* se nazývá duální k G

TVRZENÍ (Pontrjaginova dualita)

Je-li G kompaktní Hausdorffova (nebo diskrétní) grupa, je duální grupa G^* diskrétní (resp. kompaktní Hausdorffova) a platí $(G^*)^* = G$.

Důkaz

DEFINICE (Duální grupa)

Označíme symbolem $\mathbb{T}$ multiplikativní grupu komplexních čísel majících absolutní hodnotu rovnou 1 a topologii podprostoru roviny. Dále pro topologickou komutativní grupu G označíme G^* topologickou grupu všech spojitých homomorfizmů $G \to \mathbb{T}$ s kompaktní otevřenou topologií. Topologická grupa G^* se nazývá duální k G

Grupa $\mathbb{T}$ je topologicky izomorfní s kvocientovou grupou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

TVRZENÍ (Pontrjaginova dualita)

Je-li G kompaktní Hausdorffova (nebo diskrétní) grupa, je duální grupa G^* diskrétní (resp. kompaktní Hausdorffova) a platí $(G^*)^* = G$.

Důkaz

DEFINICE (Duální grupa)

Označíme symbolem $\mathbb{T}$ multiplikativní grupu komplexních čísel majících absolutní hodnotu rovnou 1 a topologii podprostoru roviny. Dále pro topologickou komutativní grupu G označíme G^* topologickou grupu všech spojitých homomorfizmů $G \to \mathbb{T}$ s kompaktní otevřenou topologií. Topologická grupa G^* se nazývá duální k G

TVRZENÍ (Pontrjaginova dualita)

Je-li G kompaktní Hausdorffova (nebo diskrétní) grupa, je duální grupa G^* diskrétní (resp. kompaktní Hausdorffova) a platí $(G^*)^* = G$.

Důkaz

DEFINICE (Duální grupa)

Označíme symbolem $\mathbb{T}$ multiplikativní grupu komplexních čísel majících absolutní hodnotu rovnou 1 a topologii podprostoru roviny. Dále pro topologickou komutativní grupu G označíme G^* topologickou grupu všech spojitých homomorfizmů $G \to \mathbb{T}$ s kompaktní otevřenou topologií. Topologická grupa G^* se nazývá duální k G

TVRZENÍ (Pontrjaginova dualita)

Je-li G kompaktní Hausdorffova (nebo diskrétní) grupa, je duální grupa G^* diskrétní (resp. kompaktní Hausdorffova) a platí $(G^*)^* = G$.

▸ Důkaz

V Poznámkách jsou uvedeny další vlastnosti uvedené duality,