15. TOPOLOGICKÉ GRUPY

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Zopakujeme z algebry základní informace o grupách.

Definice grupy

Grupa je množina G spolu s třemi operacemi:

- *nulární* (tj. $G^0 \to G$), která pevně vybírá z G jeden bod, tzv. *neutrální prvek*, často značený písmenem e;
- *unární* (tj. $G \to G$), která každému prvku $x \in G$ přiřazuje prvek značený x^{-1} a nazývaný *inverzní prvek*;
- *binární* (tj. $G^2 \to G$), která každým dvěma prvkům $x, y \in G$ přiřazuje prvek značený xy a nazývaný součin prvku x a prvku y.

  Tyto operace splňuje následující axiómy pro každé $x, y, z \in G$:

  1. *asociativitu*, tj. $(xy)z = x(yz)$;
  2. $xe = ex = x$;
  3. $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

$\Longrightarrow$

Definice grupy

Grupa je množina G spolu s třemi operacemi:

- *nulární* (tj. $G^0 \to G$), která pevně vybírá z G jeden bod, tzv. *neutrální prvek*, často značený písmenem e;
- *unární* (tj. $G \to G$), která každému prvku $x \in G$ přiřazuje prvek značený x^{-1} a nazývaný *inverzní prvek*;
- *binární* (tj. $G^2 \to G$), která každým dvěma prvkům $x, y \in G$ přiřazuje prvek značený xy a nazývaný součin prvku x a prvku y.

  Tyto operace splňuje následující axiómy pro každé $x, y, z \in G$:

  1. *asociativitu*, tj. $(xy)z = x(yz)$;
  2. $xe = ex = x$;
  3. $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

$\Rightarrow$

Komutativní grupa

Pokud v grupě G platí $xy = yx$, říkáme, že grupa G je komutativní nebo abelovská. Potom se binární operace často značí jako sčítání $x + y$, inverzní prvek jako $-x$ a neutrální prvek jako 0.

Snadno se dokáže, že prvek e je jediný s uvedenými vlastnostmi a že prvek x^{-1} je také jediný s uvedenou vlastností.
V grupě G se pro $A, B \subset G$ značí $A^{-1} = \{x^{-1}; x \in A\}$, $AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$.

Podgrupa

Je-li G grupa a $H \subset G$ má tu vlastnost, že obsahuje e, prvky inverzní ke svým prvkům a součin dvou prvků z H leží opět v H, je H s operacemi zděděnými z G grupa a nazývá se *podgrupa* grupy G.
Pokud navíc platí $xHx^{-1} \subset H$ pro každé $x \in G$, nazývá se H *normální* (nebo invariantní) podgrupa.

Zřejmě je $H \subset G$ podgrupou právě když $HH^{-1} \subset H$.

$\Rightarrow$

Komutativní grupa

Pokud v grupě G platí $xy = yx$, říkáme, že grupa G je komutativní nebo abelovská. Potom se binární operace často značí jako sčítání $x + y$, inverzní prvek jako $-x$ a neutrální prvek jako 0.

Snadno se dokáže, že prvek e je jediný s uvedenými vlastnostmi a že prvek x^{-1} je také jediný s uvedenou vlastností.
V grupě G se pro $A, B \subset G$ značí $A^{-1} = \{x^{-1}; x \in A\}$, $AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$.

Podgrupa

Je-li G grupa a $H \subset G$ má tu vlastnost, že obsahuje e, prvky inverzní ke svým prvkům a součin dvou prvků z H leží opět v H, je H s operacemi zděděnými z G grupa a nazývá se *podgrupa* grupy G.
Pokud navíc platí $xHx^{-1} \subset H$ pro každé $x \in G$, nazývá se H *normální* (nebo invariantní) podgrupa.

Zřejmě je $H \subset G$ podgrupou právě když $HH^{-1} \subset H$.

$\Rightarrow$

Komutativní grupa

Pokud v grupě G platí $xy = yx$, říkáme, že grupa G je komutativní nebo abelovská. Potom se binární operace často značí jako sčítání $x + y$, inverzní prvek jako $-x$ a neutrální prvek jako 0.

Snadno se dokáže, že prvek e je jediný s uvedenými vlastnostmi a že prvek x^{-1} je také jediný s uvedenou vlastností.
V grupě G se pro $A, B \subset G$ značí $A^{-1} = \{x^{-1}; x \in A\}$, $AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$.

Podgrupa

Je-li G grupa a $H \subset G$ má tu vlastnost, že obsahuje e, prvky inverzní ke svým prvkům a součin dvou prvků z H leží opět v H, je H s operacemi zděděnými z G grupa a nazývá se *podgrupa* grupy G.
Pokud navíc platí $xHx^{-1} \subset H$ pro každé $x \in G$, nazývá se H *normální* (nebo invariantní) podgrupa.

Zřejmě je $H \subset G$ podgrupou právě když $HH^{-1} \subset H$.

$\Rightarrow$

Komutativní grupa

Pokud v grupě G platí $xy = yx$, říkáme, že grupa G je komutativní nebo abelovská. Potom se binární operace často značí jako sčítání $x + y$, inverzní prvek jako $-x$ a neutrální prvek jako 0.

Snadno se dokáže, že prvek e je jediný s uvedenými vlastnostmi a že prvek x^{-1} je také jediný s uvedenou vlastností.
V grupě G se pro $A, B \subset G$ značí $A^{-1} = \{x^{-1}; x \in A\}$, $AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$.

Podgrupa

Je-li G grupa a $H \subset G$ má tu vlastnost, že obsahuje e, prvky inverzní ke svým prvkům a součin dvou prvků z H leží opět v H, je H s operacemi zděděnými z G grupa a nazývá se *podgrupa* grupy G.
Pokud navíc platí $xHx^{-1} \subset H$ pro každé $x \in G$, nazývá se H *normální* (nebo invariantní) podgrupa.

Zřejmě je $H \subset G$ podgrupou právě když $HH^{-1} \subset H$.

$\Rightarrow$

Homomorfizmy

Zobrazení $f : G \to H$ grupy G do grupy H se nazývá *homomorfizmus*, jestliže zachovává všechny tři grupové operace (stručně vyjádřeno, pro libovolná $x, y \in G$ platí $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1}$).

Kvocient

Je-li H normální podgrupa grupy G a ekvivalence $x \sim y$ v G znamená $xy^{-1} \in H$ (označme ekvivalentní třídu obsahující prvek x symbolem $[x]$), je kvocient G/H grupy G podle této ekvivalence grupou s jednotkovým prvkem $[e] = H$, inverzními prvky $[x]^{-1} = [x^{-1}]$ a součinem $[x][y] = [xy]$. Zobrazení $x \rightsquigarrow [x] : G \to G/H$ je homomorfizmus.

Grupa G/H se také nazývá faktorgrupou G podle H.

$\Rightarrow$

Homomorfizmy

Zobrazení $f : G \to H$ grupy G do grupy H se nazývá *homomorfizmus*, jestliže zachovává všechny tři grupové operace (stručně vyjádřeno, pro libovolná $x, y \in G$ platí $f(xy^{-1}) = f(x)(f(y))^{-1}$).

Kvocient

Je-li H normální podgrupa grupy G a ekvivalence $x \sim y$ v G znamená $xy^{-1} \in H$ (označme ekvivalentní třídu obsahující prvek x symbolem $[x]$), je kvocient G/H grupy G podle této ekvivalence grupou s jednotkovým prvkem $[e] = H$, inverzními prvky $[x]^{-1} = [x^{-1}]$ a součinem $[x][y] = [xy]$.
Zobrazení $x \rightsquigarrow [x] : G \to G/H$ je homomorfizmus.

Grupa G/H se také nazývá faktorgrupou G podle H.

$\Rightarrow$

Součin grup

Nechť G_i, pro $i \in I$, jsou grupy. *Součin* těchto grup je kartézský součin $\Pi_I G_i$ množin G_i s grupovými operacemi:

- neutrální prvek je prvek $\{e_i\}$, kde e_i je neutrální prvek v G_i;
- inverzní prvek k $\{x_i\}$ je prvek $\{x_i^{-1}\}$;
- součin prvků $\{x_i\}$ a $\{y_i\}$ je prvek $\{x_i y_i\}$.

Součin lze charakterizovat jako grupu G s homomorfizmy $p_i : G \longrightarrow G_i$, které mají tu vlastnost, že pro každý soubor homomorfizmů $f_i : H \longrightarrow G_i$ z libovolné grupy H existuje jediný homomorfizmus $f : H \longrightarrow G$ tak, že $p_i f = f_i$ pro každé i.

$\Rightarrow$

Direktní součet

Direktní součet grup G_i, pro $i \in I$, je grupa G s homomorfizmy $q_i : G_i \to G$, které mají tu vlastnost, že pro každý soubor homomorfizmů $f_i : G_i \to H$ do libovolné grupy H existuje jediný homomorfizmus $f : G \to H$ tak, že $fq_i = f_i$ pro každé i.

Popis direktního součtu je uveden (pomocí volných grup) v hlavním textu. Je jednoduchý pro komutativní grupy, složitý pro nekomutativní grupy.

Direktní součet

Direktní součet grup G_i, pro $i \in I$, je grupa G s homomorfizmy $q_i : G_i \to G$, které mají tu vlastnost, že pro každý soubor homomorfizmů $f_i : G_i \to H$ do libovolné grupy H existuje jediný homomorfizmus $f : G \to H$ tak, že $fq_i = f_i$ pro každé i.

Popis direktního součtu je uveden (pomocí volných grup) v hlavním textu. Je jednoduchý pro komutativní grupy, složitý pro nekomutativní grupy.

$\Rightarrow$

Poznámky k základům topologických grup

1. Každá topologická grupa g je homogenní topologický prostor (tj., pro každé dva jeho body x, y existuje homeomorfizmus G na G, který zobrazí x na y). Opak samozřejmě neplatí (najděte příklad nekompatibilní homogenní úplně regulární topologie na grupě).
2. Třetí vlastnost soustavy $\mathcal{U}$ okolí e implikuje čtvrtou vlastnost soustav okolí v topologickém prostoru, že každé okolí x je okolím menšího okolí x, stejnoměrně. Je-li $V.V \subset U$, je xV okolí x ležící v U pro každé $x \in V$.
3. Je otázkou, zda na dané nekonečné grupě G existuje nediskrétní Hausdorffova topologie kompatibilní s G. Odpověď je kladná pro komutativní grupy, pro nekomutativní grupy zatím jen za dodatečných předpokladů teorie množin.
4. Součin topologických grup zachovává mnoho topologických vlastností, i takové, které nejsou zachovávány součiny topologických prostorů (např. pseudokompaktnost je jedna taková vlastnost).
5. Víme, že každá topologická grupa je úplně regulární a tedy, je-li navíc Hausdorffova, lze vnořit do součinu přímek, nebo jako uniformní prostor do součinu pseudometrických prostorů, které jsou grupy. Nelze však požadovat, aby vnoření do $\mathbb{R}^\kappa$ bylo homomorfismem, nebo aby ony pseudometrické topologie byly kompatibilní s grupovými strukturami (ale příslušné vnoření je homomorfismus). Lze však požadovat, aby pseudometriky byly zleva nebo zprava invariantní vůči grupové operaci.

$\Rightarrow$

Uniformity na grupách

1. Souměrné grupy se také nazývají SIN-grupy nebo uniformní grupy.
2. Někteří autoři berou uspořádání topologií a uniformit podle inkluze a potom oboustranná topologie je větší než levá i pravá uniformita a nazývají ji horní topologie.
3. Supremum levé a pravé uniformity na topologické grupě (tj., nejmenší uniformita větší než obě zmíněné) je kompatibilní s grupovou strukturou. V souladu s předchozím odstavcem ji někteří autoři nazývají dolní uniformitou, častěji je však nazývána *Roelckeho* uniformitou (podle svého nedávného objevitele). Podle našeho přístupu by mohla být nazývána hrubou uniformitou na topologické grupě.
4. Zúplnění Roelckeho uniformity nemusí být grupou.
5. Každá topologická grupa má hrubší modifikaci v uniformních grupách (a je to reflekce).

$\Rightarrow$

Kompaktní grupy mají mnoho specifických vlastností, které zdaleka neplatí pro všechny kompaktní prostory. Důkazy všech následujících tvrzení jsou dosti obtížné.

Kompaktní grupy

1. Na každé kompaktní grupě G existuje jediná regulární borelovská míra μ, která je nenulová na každé otevřené množině, $\mu(G) = 1$ a je invariantní vůči levému posunutí. Tato míra se nazývá *Haarova* míra.
2. Každá kompaktní grupa je spojitým obrazem součinu 2^κ; za κ lze vzít mohutnost $w(G)$ nejmenší báze v G. Spojité obrazy Cantorova prostoru 2^κ se nazývají *dyadické* prostory; ty mají mnoho vlastností, které obecné kompaktní prostory nemají.
3. Pro každou nekonečnou kompaktní grupu G existuje spojité zobrazení G na mocninu $2^{w(G)}$.

$\Rightarrow$

Kompaktní grupy mají mnoho specifických vlastností, které zdaleka neplatí pro všechny kompaktní prostory. Důkazy všech následujících tvrzení jsou dosti obtížné.

Kompaktní grupy

1. Na každé kompaktní grupě G existuje jediná regulární borelovská míra μ, která je nenulová na každé otevřené množině, $\mu(G) = 1$ a je invariantní vůči levému posunutí. Tato míra se nazývá *Haarova* míra.
2. Každá kompaktní grupa je spojitým obrazem součinu 2^κ; za κ lze vzít mohutnost $w(G)$ nejmenší báze v G. Spojité obrazy Cantorova prostoru 2^κ se nazývají *dyadické* prostory; ty mají mnoho vlastností, které obecné kompaktní prostory nemají.
3. Pro každou nekonečnou kompaktní grupu G existuje spojité zobrazení G na mocninu $2^{w(G)}$.

$\Rightarrow$

Některé z vlastností kompaktních grup uvedených v hlavním textu nebo v otázkách nebo v předchozí podsekci, se dají vhodně zobecnit na lokálně kompaktní grupy. Uvedeme i jiné vlastnosti, které lokálně kompaktní grupy mají.

Lokálně kompaktní grupy

1. Na lokálně kompaktních grupách existuje Haarova míra, která ovšem může mít nekonečné hodnoty, konečné má na všech kompaktních podmnožinách.
2. Na lokálně kompaktní Hausdorffovy komutativní podgrupy G lze zobecnit Pontrjaginovu dualitu. Vezme se opět množina $G^\star$ všech spojitých homomorpfismů G do $\mathbb{T}$ s kompaktně otevřenou topologií - dostane se lokálně kompaktní grupa, opakováním dostaneme původní grupu (až na izomorfizmus, samozřejmě). Tato dualita $G \rightsquigarrow G^\star \rightsquigarrow G$ je tzv. funktoriální, převádí spojité homomorfizmy $f : G \to H$ na spojité homomorfizmy $f^\star : H^\star \to G^\star$.
3. Každá lokálně kompaktní grupa je parakompaktní (dokonce silně parakompaktní).
4. Každá souvislá lokálně kompaktní grupa je σ-kompaktní (sjednocením spočetně mnoha kompaktních podmnožin).
5. Každá lokálně kompaktní a totálně nesouvislá grupa má bázi okolí e složenou z otevřených kompaktních normálních podgrup.

Některé z vlastností kompaktních grup uvedených v hlavním textu nebo v otázkách nebo v předchozí podsekci, se dají vhodně zobecnit na lokálně kompaktní grupy. Uvedeme i jiné vlastnosti, které lokálně kompaktní grupy mají.

Lokálně kompaktní grupy

1. Na lokálně kompaktních grupách existuje Haarova míra, která ovšem může mít nekonečné hodnoty, konečné má na všech kompaktních podmnožinách.
2. Na lokálně kompaktní Hausdorffovy komutativní podgrupy G lze zobecnit Pontrjaginovu dualitu. Vezme se opět množina $G^\star$ všech spojitých homomorpfismů G do $\mathbb{T}$ s kompaktně otevřenou topologií - dostane se lokálně kompaktní grupa, opakováním dostaneme původní grupu (až na izomorfizmus, samozřejmě). Tato dualita $G \rightsquigarrow G^\star \rightsquigarrow G$ je tzv. funktoriální, převádí spojité homomorfizmy $f : G \longrightarrow H$ na spojité homomorfizmy $f^\star : H^\star \longrightarrow G^\star$.
3. Každá lokálně kompaktní grupa je parakompaktní (dokonce silně parakompaktní).
4. Každá souvislá lokálně kompaktní grupa je σ-kompaktní (sjednocením spočetně mnoha kompaktních podmnožin).
5. Každá lokálně kompaktní a totálně nesouvislá grupa má bázi okolí e složenou z otevřených kompaktních normálních podgrup.

$\Rightarrow$