15. TOPOLOGICKÉ GRUPY

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

TVRZENÍ (Popis topologie kompatibilní s grupou)

Nechť $\mathcal{U}$ je filtr podmnožin grupy G mající následující vlastnosti.

1. $e \in \bigcap \mathcal{U}$;
2. $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$, tj. $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$ tj., pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ s vlastností $V^2 \subset U$;
4. $x\mathcal{U}x^{-1} = \mathcal{U}$ pro každé $x \in G$, tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ s vlastností $xVx^{-1} \subset U$.

Pak existuje jediná topologie na G, která je kompatibilní s grupou G a má za okolí neutrálního prvku právě soustavu $\mathcal{U}$.
Pokud je dána topologie kompatibilní s grupou G, pak soustava $\mathcal{U}$ okolí neutrálního prvku má vlastnosti 1–4.

Důkaz.

Nechť $\mathcal{U}$ má výše uvedené vlastnosti. Pro $x \in G$ označme $\mathcal{U}_x = x\mathcal{U} = \{xU; U \in \mathcal{U}$ (podle 4.vlastnosti je to totéž jako $\mathcal{U}x$). Musíme ukázat, že tyto filtry dávají topologii, tj. že obsahují bázi z otevřených množin. Pro $U \in \mathcal{U}$ vezmeme V podle 3.vlastnosti. Zřejmě $xV \subset U$ pro každé $x \in V$, takže 4.vlastnost okolí topologických prostorů je splněna pro okolí e a tedy, posunutím, pro každé okolí $xU \in \mathcal{U}_x$.
Zbývá dokázat, že získaná topologie je kompatibilní s grupovou strukturou. To je jednoduchá elementární úvaha, stejně jako druhé zbývající tvrzení. □

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

Důkaz.

Je-li G uniformní, je inverzní zobrazení stejnoměrně spojité. Protože se shodují levá a pravá uniformita, dostáváme hned vlastnost, že pro každé okolí V neutrálního prvku je i $W = \bigcap_{x\in G} xUx^{-1}$ okolí e. Máme dokázat, že pro uniformní okolí E diagonály existuje okolí F tak, že pro $(x, y) \in F$, $(u, v) \in F$ je $(xu, yv) \in E$. Prvek $xuv^{-1}y^{-1}$ lze psát jako $x(uv^{-1})x^{-1}(xy^{-1})$. Je-li E vytvořeno okolím U, stačí zvolit okolí V tak, aby $VV \subset U$ a výše uvedené $W \subset V$. Hledané okolí diagonály F je pak vytvořeno okolím W. Binární grupová operace je tedy stejnoměrně spojitá.

Jsou-li nyní grupové operace stejnoměrně spojité, plyne shodnost levé a pravé uniformity ze stejnoměrně spojitosti inverzní operace. □

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

Důkaz.

Je-li G uniformní, je inverzní zobrazení stejnoměrně spojité. Protože se shodují levá a pravá uniformita, dostáváme hned vlastnost, že pro každé okolí V neutrálního prvku je i $W = \bigcap_{x \in G} xUx^{-1}$ okolí e. Máme dokázat, že pro uniformní okolí E diagonály existuje okolí F tak, že pro $(x, y) \in F$, $(u, v) \in F$ je $(xu, yv) \in E$. Prvek $xuv^{-1}y^{-1}$ lze psát jako $x(uv^{-1})x^{-1}(xy^{-1})$. Je-li E vytvořeno okolím U, stačí zvolit okolí V tak, aby $VV \subset U$ a výše uvedené $W \subset V$. Hledané okolí diagonály F je pak vytvořeno okolím W. Binární grupová operace je tedy stejnoměrně spojitá.

Jsou-li nyní grupové operace stejnoměrně spojité, plyne shodnost levé a pravé uniformity ze stejnoměrně spojitosti inverzní operace. $\square$

TVRZENÍ (Uniformní grupy)

Topologická grupa G je uniformní právě když její binární a inverzní operace jsou stejnoměrně spojité vzhledem k levé (nebo pravé) uniformitě.

Důkaz.

Je-li G uniformní, je inverzní zobrazení stejnoměrně spojité. Protože se shodují levá a pravá uniformita, dostáváme hned vlastnost, že pro každé okolí V neutrálního prvku je i $W = \bigcap_{x\in G} xUx^{-1}$ okolí e. Máme dokázat, že pro uniformní okolí E diagonály existuje okolí F tak, že pro $(x,y)\in F$, $(u,v)\in F$ je $(xu, yv)\in E$. Prvek $xuv^{-1}y^{-1}$ lze psát jako $x(uv^{-1})x^{-1}(xy^{-1})$. Je-li E vytvořeno okolím U, stačí zvolit okolí V tak, aby $VV\subset U$ a výše uvedené $W\subset V$. Hledané okolí diagonály F je pak vytvořeno okolím W. Binární grupová operace je tedy stejnoměrně spojitá.

Jsou-li nyní grupové operace stejnoměrně spojité, plyne shodnost levé a pravé uniformity ze stejnoměrně spojitosti inverzní operace. □

TVRZENÍ (Kompatibilní modifikace)

Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Existuje topologie τ_g na G kompatibilní s grupou G mající následující vlastnost: Homomorfizmus $f : (G, \tau) \longrightarrow H$ do topologické grupy H je spojitý právě když je $f : (G, \tau_g) \longrightarrow H$ spojitý.

Důkaz.

Vezmeme reprezentace (až na homeomorfní isomorfizmus) všech dvojic (f, H_f), kde $f : G \longrightarrow H_f$ je spojitý homomorpfizmus na topologickou grupu H. Jedna z těchto dvojic je $(1_G, \widetilde{G}$, kde $\widetilde{G}$ je grupa G s indiskrétní topologií. Diagonální součin $G \longrightarrow \Pi H_f$ všech zobrazení $f : G \longrightarrow H_f$ je tedy prostý spojitý homomorfizmus a jeho obraz je hledaná topologická grupa. □

TVRZENÍ (Kvocient topologické grupy)

Nechť G je topologická grupa a H je její normální podgrupa. Pak topologický kvocient G/H je topologickou grupou, tj. kvocientová topologie je kompatibilní s grupou G/H. Kvocientové zobrazení je otevřené.

Důkaz.

Nejdříve ukážeme, že kvocientové zobrazení q je otevřené. Je-li A otevřená podmnožina G, je $q(A)$ otevřená množina právě když je $q^{-1}(q(A))$ otevřená množina v G, což je zřejmé, neboť se rovná AH.
Protože součin otevřených zobrazení je otevřené zobrazení 9a tedy kvocientové zobrazení), je i binární operace na kvocientu spojitá. Inverzní zobrazení je spojité, protože jeho složení s q je spojité. □

TVRZENÍ (Topologie na volné grupě)

Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Na volné grupě $F(X)$ existuje grupová topologie taková, že pro každé spojité zobrazení f prostoru X do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ tak, že $\widetilde{f} i_X = f$.

Důkaz.

Stačí vzít topologii na $F(X)$ silně vytvořenou vnořením $X \to F(X)$ a kompatibilní grupovou modifikaci k této topologii. □

TVRZENÍ (Kompaktifikace grup)

Pro každou Hausdorffovu topologickou grupu G existuje Hausdorffova kompaktní grupa bG a spojitý homomorfismus $b : G \longrightarrow bG$ s následující vlastností:
Pro každý spojitý homomorfismus f na G do Hausdorffovy kompaktní grupy H existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : bG \longrightarrow H$ tak, že $\widetilde{f} b = f$.

Důkaz.

Vezmeme reprezentace (až na homeomorfní isomorfizmus) všech dvojic (f, H_f), kde $f : G \longrightarrow H_f$ je spojitý homomorpfizmus na hustou část kompaktní Hausdorffovy grupy H. Diagonální součin $G \longrightarrow \Pi H_f$ všech zobrazení $f : G \longrightarrow H_f$ je tedy spojitý homomorfizmus do kompaktní Hausdorffovy grupy a uzávěr jeho obrazu je hledaná kompaktní grupa. □

TVRZENÍ (Zúplnění oboustranné uniformity)

Na zúplnění H topologické grupy G s oboustrannou uniformitou lze definovat grupovou strukturu tak, že G je topologickou podgrupou H.

Důkaz.

Postup je obdobný jako u předchozí konstrukce kompaktní modifikace. Pro důkaz, že G je vnořeno do získaného zúplnění, stačí najít nějaké vnoření G s oboustrannou uniformitou do topologické grupy s úplnou oboustrannou uniformitou (najděte takové vnoření, např. pomocí nějakých spojitých zobrazení G do sebe).

Uvědomte si, že toto poslední vnoření nedá rozšiřování spojitých homomorfizmů z G. □

TVRZENÍ (Pontrjaginova dualita)

Je-li G kompaktní Hausdorffova (nebo diskrétní) grupa, je duální grupa D^* diskrétní (resp. kompaktní Hausdorffova) a platí $(G^*)^* = G$.

Důkaz.

Důkaz je složitý a asi přeřadíme tuto dualitu do poznámek (i se souvislostmi s Fourierovou transformací). □