15. TOPOLOGICKÉ GRUPY

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Elementární příklady

1. Každá grupa s diskrétní topologií je topologická grupa.
2. Každá grupa s indiskrétní topologií je topologická grupa.
3. Grupa $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
4. Multiplikativní grupa $(0, \infty)$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
5. Sorgenfreyova přímka a Michaelova přímka nejsou topologické grupy.
6. Multiplikativní grupa $GL(n, \mathbb{R})$ matic $n \times n$ reálných čísel s nenulovým determinantem lze chápat jako část $\mathbb{R}^{n^2}$ (položíme řádky matice postupně za sebou). S topologií $\mathbb{R}^{n^2}$ je $GL(n, \mathbb{R})$ topologickou grupou (a je to otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n^2}$ a tedy je lokálně kompaktní).
   Topologická grupa $GL(2, \mathbb{R})$ není uniformní grupou [Návod: najděte dvě posloupnosti matic $\{x_n\}, \{y_n\}$ tak, že $\lim x_n y_n \neq \lim y_n x_n$. Stačí brát matice s druhým řádkem rovným $\{0, 1\}$.]

1. Grupa $\mathbb{Q}$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
2. Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s obvyklou topologií je topologická grupa. Speciálně, grupa komplexních čísel s topologií roviny je topologická grupa.
3. Grupa $\mathbb{Z}$ a grupa $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ celých čísel modulo n s obvyklou (=diskrétní) topologií je topologická grupa.
4. Podgrupa unitárních matic (s determinantem rovným jedné) v $G(n, \mathbb{R})$ je topologická grupa.

Elementární příklady

1. Každá grupa s diskrétní topologií je topologická grupa.
2. Každá grupa s indiskrétní topologií je topologická grupa.
3. Grupa $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
4. Multiplikativní grupa $(0, \infty)$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
5. Sorgenfreyova přímka a Michaelova přímka nejsou topologické grupy.
6. Multiplikativní grupa $GL(n, \mathbb{R})$ matic $n \times n$ reálných čísel s nenulovým determinantem lze chápat jako část $\mathbb{R}^{n^2}$ (položíme řádky matice postupně za sebou). S topologií $\mathbb{R}^{n^2}$ je $GL(n, \mathbb{R})$ topologickou grupou (a je to otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n^2}$ a tedy je lokálně kompaktní).
   Topologická grupa $GL(2, \mathbb{R})$ není uniformní grupou [Návod: najděte dvě posloupnosti matic $\{x_n\}, \{y_n\}$ tak, že $\lim x_n y_n \neq \lim y_n x_n$. Stačí brát matice s druhým řádkem rovným $\{0, 1\}$.]

Jako důsledky předchozích příkladů (pomocí konstrukcí topologických grup) se dostanou následující příklady.

1. Grupa $\mathbb{Q}$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
2. Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s obvyklou topologií je topologická grupa. Speciálně, grupa komplexních čísel s topologií roviny je topologická grupa.

Elementární příklady

1. Každá grupa s diskrétní topologií je topologická grupa.
2. Každá grupa s indiskrétní topologií je topologická grupa.
3. Grupa $\mathbb{R}$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
4. Multiplikativní grupa $(0, \infty)$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
5. Sorgenfreyova přímka a Michaelova přímka nejsou topologické grupy.
6. Multiplikativní grupa $GL(n, \mathbb{R})$ matic $n \times n$ reálných čísel s nenulovým determinantem lze chápat jako část $\mathbb{R}^{n^2}$ (položíme řádky matice postupně za sebou). S topologií $\mathbb{R}^{n^2}$ je $GL(n, \mathbb{R})$ topologickou grupou (a je to otevřená podmnožina $\mathbb{R}^{n^2}$ a tedy je lokálně kompaktní).
   Topologická grupa $GL(2, \mathbb{R})$ není uniformní grupou [Návod: najděte dvě posloupnosti matic $\{x_n\}, \{y_n\}$ tak, že $\lim x_n y_n \neq \lim y_n x_n$. Stačí brát matice s druhým řádkem rovným $\{0, 1\}$.]

---

1. Grupa $\mathbb{Q}$ s obvyklou topologií je topologická grupa.
2. Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ s obvyklou topologií je topologická grupa. Speciálně, grupa komplexních čísel s topologií roviny je topologická grupa.
3. Grupa $\mathbb{Z}$ a grupa $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ celých čísel modulo n s obvyklou (=diskrétní) topologií je topologická grupa.
4. Podgrupa unitárních matic (s determinantem rovným jedné) v $G(n, \mathbb{R})$ je topologická grupa.

Pro grupu G lze součin G^X chápat jako grupu $F(X, G)$ všech zobrazení $X \to G$ s grupovými operacemi definovanými po souřadnicích.

Grupy zobrazení

1. $F_p(X, G)$ je topologická grupa.
2. Je-li X topologický prostor a G topologická grupa, je $C_p(X, G)$ topologická grupa.
3. Je-li $\mathcal{S}$ soustava podmnožin X a G je komutativní grupa, je $F_{\mathcal{S}}(X, G)$ topologická grupa (a tedy i její podgrupa $C_{\mathcal{S}}(X, G)$).

Grupy permutací

1. Grupa $\mathrm{Iso}_p(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_p(X)$ je topologická grupa).
2. Grupa $\mathrm{Iso}_u(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_u(X)$ je topologická grupa).
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor, je grupa $\mathrm{Homeo}_u(X)$ topologickou grupou.
4. $\mathrm{Homeo}_p(X)$ není topologická grupa, $\mathrm{Homeo}_c(X)$ a $\mathrm{Homeo}_u(X)$ jsou topologické grupy.

Pro grupu G lze součin G^X chápat jako grupu $F(X, G)$ všech zobrazení $X \longrightarrow G$ s grupovými operacemi definovanými po souřadnicích.

Grupy zobrazení

1. $F_p(X, G)$ je topologická grupa.
2. Je-li X topologický prostor a G topologická grupa, je $C_p(X, G)$ topologická grupa.
3. Je-li $\mathcal{S}$ soustava podmnožin X a G je komutativní grupa, je $F_{\mathcal{S}}(X, G)$ topologická grupa (a tedy i její podgrupa $C_{\mathcal{S}}(X, G)$).

Grupy permutací

1. Grupa $\mathrm{Iso}_p(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_p(X)$ je topologická grupa).
2. Grupa $\mathrm{Iso}_u(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_u(X)$ je topologická grupa).
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor, je grupa $\mathrm{Homeo}_u(X)$ topologickou grupou.
4. $\mathrm{Homeo}_p(X)$ není topologická grupa, $\mathrm{Homeo}_c(X)$ a $\mathrm{Homeo}_u(X)$ jsou topologické grupy.

Pro grupu G lze součin G^X chápat jako grupu $F(X, G)$ všech zobrazení $X \to G$ s grupovými operacemi definovanými po souřadnicích.

Grupy zobrazení

1. $F_p(X, G)$ je topologická grupa.
2. Je-li X topologický prostor a G topologická grupa, je $C_p(X, G)$ topologická grupa.
3. Je-li $\mathcal{S}$ soustava podmnožin X a G je komutativní grupa, je $F_{\mathcal{S}}(X, G)$ topologická grupa (a tedy i její podgrupa $C_{\mathcal{S}}(X, G)$).

Pro množinu X označme $\mathrm{Per}(X)$ grupu všech bijekcí na X s operací skládání zobrazení. Pro metrický prostor X označme $\mathrm{Iso}(X)$ podgrupu $\mathrm{Per}(X)$ všech isometrických zobrazení na X. Konečně pro topologický prostor X označme $\mathrm{Homeo}(X)$ podgrupu $\mathrm{Per}(X)$ všech homeomorfizmů $X \to X$. Uvědomte si, že $\mathrm{Per}(X)$ je vlastně $\mathrm{Iso}(X)$, pro diskrétní metriku na X, nebo $\mathrm{Homeo}(X)$ pro diskrétní topologii na X
Grupa $\mathrm{Per}(X)$ je podmnožinou součinu X^X a odtud získává různé topologie množin zobrazení, které můžeme označovat stejnými indexy jako u prostorů zobrazení.

Grupy permutací

1. Grupa $\mathrm{Iso}_p(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_p(X)$ je topologická grupa).
2. Grupa $\mathrm{Iso}(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}(X)$ je topologická grupa).

Pro grupu G lze součin G^X chápat jako grupu $F(X,G)$ všech zobrazení $X \longrightarrow G$ s grupovými operacemi definovanými po souřadnicích.

Grupy zobrazení

1. $F_p(X,G)$ je topologická grupa.
2. Je-li X topologický prostor a G topologická grupa, je $C_p(X,G)$ topologická grupa.
3. Je-li $\mathcal{S}$ soustava podmnožin X a G je komutativní grupa, je $F_{\mathcal{S}}(X,G)$ topologická grupa (a tedy i její podgrupa $C_{\mathcal{S}}(X,G)$).

Grupy permutací

1. Grupa $\mathrm{Iso}_p(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_p(X)$ je topologická grupa).
2. Grupa $\mathrm{Iso}_u(X)$ je topologická grupa (a tedy $\mathrm{Per}_u(X)$ je topologická grupa).
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor, je grupa $\mathrm{Homeo}_u(X)$ topologickou grupou.
4. $\mathrm{Homeo}_p(X)$ není topologická grupa, $\mathrm{Homeo}_c(X)$ a $\mathrm{Homeo}_u(X)$ jsou topologické grupy.