OBECNÁ TOPOLOGIE

14. DIMENZE

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

S pojmem dimenze jsme se setkali v pojmu nuldimenzionální prostor, ale hlavně v souvislosti s euklidovskými prostory. Tam používaný pojem dimenze má algebraický charakter – je definován např. jako maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

V této kapitole se dozvíte, jak definovat dimenzi v topologických prostorech tak, aby homeomorfní prostory měli stejnou dimenzi a aby v euklidovských prostorech tato topologická dimenze byla stejná jako jejich algebraická dimenze.

Vhodných postupů je několik a ačkoliv dávají stejné hodnoty na euklidovských prostorech, na obecnějších prostorech se mohou hodnoty lišit. Uvedeme tři základní definice (pokrývací a dvě induktivní). Výklad nemůže být příliš podrobný – všechna základní tvrzení s důkazy by zabrala mnohem více místa a času než je pro tento text vhodné. Omezíme se také jen na konečné hodnoty dimenze.

Ačkoliv mnohá tvrzení platí obecněji, omezíme se na konečné hodnoty dimenze a v hlavních tvrzeních na metrizovatelné prostory (v poznámkách a v cvičeních naznačíme obecnější možnosti).

S pojmem dimenze jsme se setkali v pojmu nuldimenzionální prostor, ale hlavně v souvislosti s euklidovskými prostory. Tam používaný pojem dimenze má algebraický charakter – je definován např. jako maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

V této kapitole se dozvíte, jak definovat dimenzi v topologických prostorech tak, aby homeomorfní prostory měli stejnou dimenzi a aby v euklidovských prostorech tato topologická dimenze byla stejná jako jejich algebraická dimenze.

Vhodných postupů je několik a ačkoliv dávají stejné hodnoty na euklidovských prostorech, na obecnějších prostorech se mohou hodnoty lišit. Uvedeme tři základní definice (pokrývací a dvě induktivní). Výklad nemůže být příliš podrobný – všechna základní tvrzení s důkazy by zabrala mnohem více místa a času než je pro tento text vhodné. Omezíme se také jen na konečné hodnoty dimenze.

Ačkoliv mnohá tvrzení platí obecněji, omezíme se na konečné hodnoty dimenze a v hlavních tvrzeních na metrizovatelné prostory (v poznámkách a v cvičeních naznačíme obecnější možnosti).

$\Longrightarrow$

S pojmem dimenze jsme se setkali v pojmu nuldimenzionální prostor, ale hlavně v souvislosti s euklidovskými prostory. Tam používaný pojem dimenze má algebraický charakter – je definován např. jako maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

V této kapitole se dozvíte, jak definovat dimenzi v topologických prostorech tak, aby homeomorfní prostory měli stejnou dimenzi a aby v euklidovských prostorech tato topologická dimenze byla stejná jako jejich algebraická dimenze.

Vhodných postupů je několik a ačkoliv dávají stejné hodnoty na euklidovských prostorech, na obecnějších prostorech se mohou hodnoty lišit. Uvedeme tři základní definice (pokrývací a dvě induktivní). Výklad nemůže být příliš podrobný – všechna základní tvrzení s důkazy by zabrala mnohem více místa a času než je pro tento text vhodné. Omezíme se také jen na konečné hodnoty dimenze.

Ačkoliv mnohá tvrzení platí obecněji, omezíme se na konečné hodnoty dimenze a v hlavních tvrzeních na metrizovatelné prostory (v poznámkách a v cvičeních naznačíme obecnější možnosti).

S pojmem dimenze jsme se setkali v pojmu nuldimenzionální prostor, ale hlavně v souvislosti s euklidovskými prostory. Tam používaný pojem dimenze má algebraický charakter – je definován např. jako maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

V této kapitole se dozvíte, jak definovat dimenzi v topologických prostorech tak, aby homeomorfní prostory měli stejnou dimenzi a aby v euklidovských prostorech tato topologická dimenze byla stejná jako jejich algebraická dimenze.

Vhodných postupů je několik a ačkoliv dávají stejné hodnoty na euklidovských prostorech, na obecnějších prostorech se mohou hodnoty lišit. Uvedeme tři základní definice (pokrývací a dvě induktivní). Výklad nemůže být příliš podrobný – všechna základní tvrzení s důkazy by zabrala mnohem více místa a času než je pro tento text vhodné. Omezíme se také jen na konečné hodnoty dimenze.

Ačkoliv mnohá tvrzení platí obecněji, omezíme se na konečné hodnoty dimenze a v hlavních tvrzeních na metrizovatelné prostory (v poznámkách a v cvičeních naznačíme obecnější možnosti).

$\Rightarrow$

Existuje mnoho dalších přístupů k dimenzi. Je snaha najít axiómy, které by popsaly a charakterizovaly dimenzi (úspěchy se dostavily pro speciální třídy prostorů, např. pro euklidovské prostory).

V Poznámkách se zmíníme o Hausdorffově dimenzi, která nabývá i necelých hodnot (je vhodná pro studium fraktálů). Pomineme jiné důležité pojmy, např. kohomologickou dimenzi nebo asymptotickou dimenzi.

Existuje mnoho dalších přístupů k dimenzi. Je snaha najít axiómy, které by popsaly a charakterizovaly dimenzi (úspěchy se dostavily pro speciální třídy prostorů, např. pro euklidovské prostory).

V Poznámkách se zmíníme o Hausdorffově dimenzi, která nabývá i necelých hodnot (je vhodná pro studium fraktálů). Pomineme jiné důležité pojmy, např. kohomologickou dimenzi nebo asymptotickou dimenzi.

$\Rightarrow$

Začneme s tzv. malou induktivní dimenzí. Slovo "induktivní" bude jasné z definice, slovo "malá" bude jasné až po zavedeni další dimenze.

DEFINICE (Malá induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{ind} X \leq n$ jestliže každý bod X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{ind} H \leq n-1$.

Říkáme, že X má malou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{ind} X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\mathrm{ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou malou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{ind} X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou malou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$, je $\mathrm{ind} Y \leq \mathrm{ind} X$.
3. Topologický prostor X je nuldimenzionální právě když $\mathrm{ind} X \leq 0$.

Začneme s tzv. malou induktivní dimenzí. Slovo "induktivní" bude jasné z definice, slovo "malá" bude jasné až po zavedeni další dimenze.

Tento pojem dimenze je asi nejjednodušší, ale hodí se jen pro metrizovatelné separabilní prostory, jak uvidíme dále. Nicméně, definice bude vyslovena pro obecné prostory.

DEFINICE (Malá induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\operatorname{ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\operatorname{ind} X \leq n$ jestliže každý bod X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\operatorname{ind} H \leq n-1$.

Říkáme, že X má malou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\operatorname{ind} X = k$), jestliže platí $\operatorname{ind} X \leq k$ a neplatí $\operatorname{ind} X \leq n-1$.

Pokud neplatí $\operatorname{ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou malou induktivní dimenzi (symbol $\operatorname{ind} X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou malou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$, je $\operatorname{ind} Y \leq \operatorname{ind} X$.
3. Topologický prostor X je nuldimenzionální právě když $\operatorname{ind} X \leq 0$.

DEFINICE (Malá induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{ind} X \leq n$ jestliže každý bod X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{ind} H \leq n - 1$.

Říkáme, že X má malou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{ind} X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\mathrm{ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou malou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{ind} X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou malou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$, je $\mathrm{ind} Y \leq \mathrm{ind} X$.
3. Topologický prostor X je nuldimenzionální právě když $\mathrm{ind} X \leq 0$.

DEFINICE (Malá induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{ind} X \leq n$ jestliže každý bod X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{ind} H \leq n - 1$.

Říkáme, že X má malou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{ind} X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\mathrm{ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou malou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{ind} X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou malou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$, je $\mathrm{ind} Y \leq \mathrm{ind} X$.
3. Topologický prostor X je nuldimenzionální právě když $\mathrm{ind} X \leq 0$.

Nyní uvidíme, proč byla předchozí dimenze „malá”. „Velká” dimenze vyjadřuje pro metrizovatelné neseparabilní prostory lépe potřebný pojem.

DEFINICE (Velká induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind} X \leq n$ jestliže každá uzavřená množina X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind} H \leq n - 1$.

Říkáme, že X má velkou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou velkou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind} X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou velkou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$ uzavřená, je $\mathrm{ind} Y \leq \mathrm{ind} X$.
3. Normální prostor X je silně nuldimenzionální právě když $\mathrm{Ind} X \leq 0$.
4. Pro topologický T_1-prostor X je $\mathrm{ind} X \leq \mathrm{Ind} X$.
5. Je-li X Lindelöfův regulární prostor nebo lokálně kompaktní parakompaktní prostor, je $\mathrm{Ind} X = 0$ právě když $\mathrm{ind} X = 0$.
6. Je-li $\{A, B\}$ uzavřené pokrytí prostoru X, pak $\mathrm{Ind} X \leq \max(\mathrm{Ind} A, \mathrm{Ind} B)$. (Toto tvrzení se snadno zobecní na spočetná uzavřená pokrytí a na lokálně konečná uzavřená pokrytí, tedy i na σ-lokálně

Nyní uvidíme, proč byla předchozí dimenze „malá“. „Velká“ dimenze vyjadřuje pro metrizovatelné neseparabilní prostory lépe potřebný pojem.

Definici vyslovíme obecně, vhodný smysl má jen pro normální prostory. Použije-li se v definici mírná modifikace, má dobrý smysl i pro úplně regulární prostory.

DEFINICE (Velká induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind} X \leq n$ jestliže každá uzavřená množina X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind} H \leq n-1$.

Říkáme, že X má velkou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou velkou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind} X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou velkou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$ uzavřená, je $\mathrm{ind} Y \leq \mathrm{ind} X$.
3. Normální prostor X je silně nuldimenzionální právě když $\mathrm{Ind} X \leq 0$.
4. Pro topologický T_1-prostor X je $\mathrm{ind} X \leq \mathrm{Ind} X$.

DEFINICE (Velká induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind}X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind}X \leq n$ jestliže každá uzavřená množina X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind}H \leq n-1$.

Říkáme, že X má velkou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind}X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind}X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou velkou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind}X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou velkou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$ uzavřená, je $\mathrm{ind}Y \leq \mathrm{ind}X$.
3. Normální prostor X je silně nuldimenzionální právě když $\mathrm{Ind}X \leq 0$.
4. Pro topologický T_1-prostor X je $\mathrm{ind}X \leq \mathrm{Ind}X$.
5. Je-li X Lindelöfův regulární prostor nebo lokálně kompaktní parakompaktní prostor, je $\mathrm{Ind}X = 0$ právě když $\mathrm{ind}X = 0$.
6. Je-li $\{A, B\}$ uzavřené pokrytí prostoru X, pak $\mathrm{Ind}X \leq \max(\mathrm{Ind}A, \mathrm{Ind}B)$. (Toto tvrzení se snadno zobecní na spočetná uzavřená pokrytí a na lokálně konečná uzavřená pokrytí, tedy i na σ-lokálně konečná uzavřená pokrytí.)

DEFINICE (Velká induktivní dimenze)

Nechť X je topologický prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind}X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind}X \leq n$ jestliže každá uzavřená množina X má bázi otevřených okolí z množin, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind}H \leq n - 1$.

Říkáme, že X má velkou induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind}X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind}X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n - 1$.

Pokud neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou velkou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind}X = \infty$).

Pozorování

1. Homeomorfní prostory mají stejnou velkou induktivní dimenzi.
2. Je-li $Y \subset X$ uzavřená, je $\mathrm{ind}\,Y \leq \mathrm{ind}X$.
3. Normální prostor X je silně nuldimenzionální právě když $\mathrm{Ind}X \leq 0$.
4. Pro topologický T_1-prostor X je $\mathrm{ind}X \leq \mathrm{Ind}X$.
5. Je-li X Lindelöfův regulární prostor nebo lokálně kompaktní parakompaktní prostor, je $\mathrm{Ind}X = 0$ právě když $\mathrm{ind}X = 0$.
6. Je-li $\{A, B\}$ uzavřené pokrytí prostoru X, pak $\mathrm{Ind}X \leq \max(\mathrm{Ind}A, \mathrm{Ind}B)$. (Toto tvrzení se snadno zobecní na spočetná uzavřená pokrytí a na lokálně konečná uzavřená pokrytí, tedy i na σ-lokálně konečná uzavřená pokrytí.)

Nejdůležitějším vztahem mezi ind a Ind je rovnost obou induktivních dimenzí pro separabilní metrické prostory. Existuje složitý příklad metrického prostoru X, pro který je $\mathrm{ind} X = 0, \mathrm{Ind} X = 1$.

TVRZENÍ (Separabilní metrizovatelný prostor)

1. *Nechť separabilní metrizovatelný prostor X lze vyjádřit jako $M \cup N$, kde $\mathrm{ind} M \leq 0, \mathrm{ind} N \leq n - 1$. Potom $\mathrm{ind} X \leq n$.*
2. *Pro separabilní metrizovatelný prostor X je $\mathrm{ind} X \leq n$, $n \geq 0$, právě když pro každou uzavřenou množinu A a její otevřené okolí U existuje její otevřené okolí V tak, že $V \subset \overline{V} \subset U$ a $\mathrm{ind}(\overline{V} \setminus V) \leq n - 1$.*

Důkaz

TVRZENÍ (Ind=ind pro separabilní metrizovatelný prostor)

Je-li X separabilní metrizovatelný prostor, je $\mathrm{ind} X = \mathrm{Ind} X$.

Důkaz

Pro důkaz rovnosti budou potřebná pomocná tvrzení, která jsou zajímavá sama o sobě.

TVRZENÍ (Separabilní metrizovatelný prostor)

1. *Nechť separabilní metrizovatelný prostor X lze vyjádřit jako $M \cup N$, kde* $\operatorname{ind} M \leq 0, \operatorname{ind} N \leq n-1$. *Potom* $\operatorname{ind} X \leq n$.
2. *Pro separabilní metrizovatelný prostor X je* $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$, *právě když pro každou uzavřenou množinu A a její otevřené okolí U existuje její otevřené okolí V tak, že $V \subset \overline{V} \subset U$ a* $\operatorname{ind}(\overline{V} \setminus V) \leq n-1$.

Důkaz

TVRZENÍ (Ind=ind pro separabilní metrizovatelný prostor)

Je-li X separabilní metrizovatelný prostor, je $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Separabilní metrizovatelný prostor)

1. *Nechť separabilní metrizovatelný prostor* X *lze vyjádřit jako* $M \cup N$*, kde* $\mathrm{ind} M \leq 0, \mathrm{ind} N \leq n-1$*. Potom* $\mathrm{ind} X \leq n$*.*
2. *Pro separabilní metrizovatelný prostor* X *je* $\mathrm{ind} X \leq n$, $n \geq 0$*, právě když pro každou uzavřenou množinu* A *a její otevřené okolí* U *existuje její otevřené okolí* V *tak, že* $V \subset \overline{V} \subset U$ *a* $\mathrm{ind}(\overline{V} \setminus V) \leq n-1$*.*

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Ind=ind pro separabilní metrizovatelný prostor)

Je-li X *separabilní metrizovatelný prostor, je* $\mathrm{ind} X = \mathrm{Ind} X$*.*

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Separabilní metrizovatelný prostor)

1. *Nechť separabilní metrizovatelný prostor* X *lze vyjádřit jako* $M \cup N$, *kde* $\mathrm{ind} M \leq 0, \mathrm{ind} N \leq n-1$. *Potom* $\mathrm{ind} X \leq n$.
2. *Pro separabilní metrizovatelný prostor* X *je* $\mathrm{ind} X \leq n$, $n \geq 0$, *právě když pro každou uzavřenou množinu* A *a její otevřené okolí* U *existuje její otevřené okolí* V *tak, že* $V \subset \overline{V} \subset U$ *a* $\mathrm{ind}(\overline{V} \setminus V) \leq n-1$.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Ind=ind pro separabilní metrizovatelný prostor)

Je-li X *separabilní metrizovatelný prostor, je* $\mathrm{ind} X = \mathrm{Ind} X$.

▸ Důkaz

Dimenze, kterou zavedeme nyní, má zcela jiný přístup k pojmu dimenze, alespoň na první pohled. Je velice přirozená a lze přirozeně definovat na uniformních prostorech (viz Poznámky), odkud lze lépe poznat, proč se volí v topologických prostorech konečná otevřená pokrytí na normálních prostorech.

DEFINICE (Řád soustavy množin)

Nechť $\mathcal{S}$ je soustava podmnožin množiny X. Říkáme, že $\mathcal{S}$ má řád roven číslu n, jestliže n je největší číslo, pro které existuje $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ mající $n+1$ prvků a neprázdný průnik.

DEFINICE (Pokrývací dimenze)

Nechť X je normální prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé konečné otevřené pokrytí X má konečné otevřené zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Nechť X, Y jsou normální T_1-prostory.

1. Jsou-li X, Y homeomorfní, pak $\dim X = \dim Y$.

Dimenze, kterou zavedeme nyní, má zcela jiný přístup k pojmu dimenze, alespoň na první pohled. Je velice přirozená a lze přirozeně definovat na uniformních prostorech (viz Poznámky), odkud lze lépe poznat, proč se volí v topologických prostorech konečná otevřená pokrytí na normálních prostorech.

I velkou induktivní dimenzi lze snadno zavést na uniformních prostorech a pak snadněji získat vztahy mezi těmito dvěma dimenzemi.
Nejprve musíme zavést ještě jeden pojem pro pokrytí.

DEFINICE (Řád soustavy množin)

Nechť $\mathcal{S}$ je soustava podmnožin množiny X. Říkáme, že $\mathcal{S}$ má řád roven číslu n, jestliže n je největší číslo, pro které existuje $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ mající $n+1$ prvků a neprázdný průnik.

DEFINICE (Pokrývací dimenze)

Nechť X je normální prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé konečné otevřené pokrytí X má konečné otevřené zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

DEFINICE (Řád soustavy množin)

Nechť $\mathcal{S}$ je soustava podmnožin množiny X. Říkáme, že $\mathcal{S}$ má řád roven číslu n, jestliže n je největší číslo, pro které existuje $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ mající $n+1$ prvků a neprázdný průnik.

DEFINICE (Pokrývací dimenze)

Nechť X je normální prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé konečné otevřené pokrytí X má konečné otevřené zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Nechť X, Y jsou normální T_1-prostory.

1. Jsou-li X, Y homeomorfní, pak $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y uzavřený podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý C^*-vnořený podprostor X, je $\dim X = \dim Y$. Např., $\dim X = \dim \beta X$.
4. Je-li X normální prostor a jedna z jeho dimenzí $\operatorname{Ind} X$, $\dim X$ je rovna 0, je i druhá rovna 0.

DEFINICE (Řád soustavy množin)

Nechť $\mathcal{S}$ je soustava podmnožin množiny X. Říkáme, že $\mathcal{S}$ má řád roven číslu n, jestliže n je největší číslo, pro které existuje $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ mající $n+1$ prvků a neprázdný průnik.

DEFINICE (Pokrývací dimenze)

Nechť X je normální prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé konečné otevřené pokrytí X má konečné otevřené zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Nechť X, Y jsou normální T_1-prostory.

1. Jsou-li X, Y homeomorfní, pak $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y uzavřený podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý C^*-vnořený podprostor X, je $\dim X = \dim Y$. Např., $\dim X = \dim \beta X$.
4. Je-li X normální prostor a jedna z jeho dimenzí $\mathrm{Ind} X$, $\dim X$ je rovna 0, je i druhá rovna 0.

DEFINICE (Řád soustavy množin)

Nechť $\mathcal{S}$ je soustava podmnožin množiny X. Říkáme, že $\mathcal{S}$ má řád roven číslu n, jestliže n je největší číslo, pro které existuje $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ mající $n+1$ prvků a neprázdný průnik.

DEFINICE (Pokrývací dimenze)

Nechť X je normální prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé konečné otevřené pokrytí X má konečné otevřené zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Nechť X, Y jsou normální T_1-prostory.

1. Jsou-li X, Y homeomorfní, pak $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y uzavřený podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý C^*-vnořený podprostor X, je $\dim X = \dim Y$. Např., $\dim X = \dim \beta X$.
4. Je-li X normální prostor a jedna z jeho dimenzí $\mathrm{Ind} X$, $\dim X$ je rovna 0, je i druhá rovna 0.

Následující tvrzení ukazuje, že alespoň pro metrizovatelné prostory jsou pokrývací a velká induktivní dimenze stejné. Dá se ukázat, že se liší na obecnějších prostorech, např. na kompaktních Hausdorffových prostorech.

Také v tomto případě nejdříve dokážeme pomocná tvrzení, která jsou zajímavá.

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X je $\mathrm{Ind} X \le n$ *právě když X je sjednocením $n+1$ nuldimenzionálních podmnožin.*

Důkaz

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X platí $\mathrm{Ind} X = \dim X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathrm{ind} \mathbb{R}^n = \mathrm{Ind} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz

Také v tomto případě nejdříve dokážeme pomocná tvrzení, která jsou zajímavá.

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X je $\mathrm{Ind}X \leq n$ *právě když X je sjednocením $n+1$ nuldimenzionálních podmnožin.*

Důkaz

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X platí $\mathrm{Ind}X = \dim X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n = \mathrm{Ind}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz

Také v tomto případě nejdříve dokážeme pomocná tvrzení, která jsou zajímavá.

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X *je* $\mathrm{Ind}X \leq n$ *právě když* X *je sjednocením* $n+1$ *nuldimenzionálních podmnožin.*

Důkaz

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X *platí* $\mathrm{Ind}X = \dim X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ *je* $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n = \mathrm{Ind}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz

Také v tomto případě nejdříve dokážeme pomocná tvrzení, která jsou zajímavá.

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X *je* $\mathrm{Ind}X \leq n$ *právě když* X *je sjednocením* $n+1$ *nuldimenzionálních podmnožin.*

Důkaz

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X *platí* $\mathrm{Ind}X = \dim X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ *je* $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n = \mathrm{Ind}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz

Také v tomto případě nejdříve dokážeme pomocná tvrzení, která jsou zajímavá.

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X je $\mathrm{Ind}X \leq n$ právě když X je sjednocením $n+1$ nuldimenzionálních podmnožin.

Důkaz

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X platí $\mathrm{Ind}X = \dim X$.

Důkaz

Následující věta patří mezi základní tvrzení o dimenzi. Její důkaz používá tvrzení z kapitoly o pevných bodech.

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n = \mathrm{Ind}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz

Také v tomto případě nejdříve dokážeme pomocná tvrzení, která jsou zajímavá.

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X *je* $\mathrm{Ind}X \leq n$ *právě když* X *je sjednocením* $n+1$ *nuldimenzionálních podmnožin.*

Důkaz

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X *platí* $\mathrm{Ind}X = \dim X$.

Důkaz

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ *je* $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n = \mathrm{Ind}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz