14. DIMENZE

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Jak bylo již řečeno v hlavním textu této kapitoly, pokrývací a velkou induktivní dimenzi je lépe zavést na uniformních prostorech, kde je přirozenější a jsou pak snadno vidět různá omezení při převádění na topologické prostory.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Necht X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý podprostor X, je $\dim X = \dim Y$.
4. Je-li Y totálně omezená modifikace X, je $\dim Y \leq \dim X$.

Jak bylo již řečeno v hlavním textu této kapitoly, pokrývací a velkou induktivní dimenzi je lépe zavést na uniformních prostorech, kde je přirozenější a jsou pak snadno vidět různá omezení při převádění na topologické prostory.

Podívejme se nejdříve na pokrývací dimenzi.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Necht X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý podprostor X, je $\dim X = \dim Y$.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Necht X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý podprostor X, je $\dim X = \dim Y$.
4. Je-li Y totálně omezená modifikace X, je $\dim Y \leq \dim X$.

Dimenze uniformního prostoru je stejná jako dimenze jeho zúplnění. Speciálně, dimenze totálně omezeného prostoru je rovna dimenzi jeho kompaktifikace.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Je-li X normální topologický prostor, pak všechna jeho konečná otevřená pokrytí tvoří bázi tzv. Čechovy uniformity na X (nejjemnější totálně omezené uniformity na X, tj. totálně omezené modifikace jemné uniformity na X). Pokrývací dimenze prostoru X je tedy dimenze jeho Čechovy uniformity.

Pozorování

Nechť X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý podprostor X, je $\dim X = \dim Y$.
4. Je-li Y totálně omezená modifikace X, je $\dim Y \leq \dim X$.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Je-li X normální topologický prostor, pak všechna jeho konečná otevřená pokrytí tvoří bázi tzv. Čechovy uniformity na X (nejjemnější totálně omezené uniformity na X, tj. totálně omezené modifikace jemné uniformity na X). Pokrývací dimenze prostoru X je tedy dimenze jeho Čechovy uniformity.

Z následujících pozorování je vidět, proč je pokrývací dimenze přirozenější pro uniformní prostory (srovnejte s příslušnými pozorováními pro normální prostory).

Pozorování

Nechť X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Necht X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý podprostor X, je $\dim X = \dim Y$.
4. Je-li Y totálně omezená modifikace X, je $\dim Y \leq \dim X$.

Dimenze uniformního prostoru je stejná jako dimenze jeho zúplnění. Speciálně, dimenze totálně omezeného prostoru je rovna dimenzi jeho kompaktifikace.

DEFINICE (Pokrývací dimenze uniformních prostorů)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\dim X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\dim X \leq n$ jestliže každé uniformní pokrytí X má uniformní zjemnění řádu n.

Říkáme, že X má pokrývací dimenzi rovnou n (symbol $\dim X = n$), jestliže platí $\dim X \leq n$ a neplatí $\dim X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\dim X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou pokrývací dimenzi (symbol $\dim X = \infty$).

Pozorování

Necht X, Y jsou uniformní prostory.

1. Jsou-li X, Y uniformně homeomorfní, je $\dim X = \dim Y$.
2. Je-li Y podprostor X, je $\dim Y \leq \dim X$.
3. Je-li Y hustý podprostor X, je $\dim X = \dim Y$.
4. Je-li Y totálně omezená modifikace X, je $\dim Y \leq \dim X$.

Dimenze uniformního prostoru je stejná jako dimenze jeho zúplnění. Speciálně, dimenze totálně omezeného prostoru je rovna dimenzi jeho kompaktifikace.

$\Rightarrow$

Místo Čechovy uniformity topologického prostoru můžeme vzít jemnou uniformitu. Chceme-li pracovat se všemi otevřenými pokrytími, musíme se omezit na parakompaktní prostory X. Pak lze definovat *velkou* pokrývací dimenzi prostoru X jako dimenzi jemné uniformity na X, tj. $\mathrm{Dim}\, X \leq n$ pokud každé otevřené pokrytí X má otevřené zjemnění řádu nejvýše n. Platí však následující tvrzení, z kterého vyplývá, že v mnoha případech je $\mathrm{Dim}\, X = \dim X$.

TVRZENÍ (Rovnost malé a velké pokrývací dimenze)

Je-li $\dim X < \infty$, *je* $\dim X = \dim(pX)$, *kde* pX *je totálně omezená modifikace* X.

Z předchozích poznámek vyplývá, jak lze definovat dimenze na úplně regulárních prostorech. Je nutné brát uniformní pokrytí jemných uniformit (ty lze popsat topologicky, bez použití uniformit).

$\Rightarrow$

Místo Čechovy uniformity topologického prostoru můžeme vzít jemnou uniformitu. Chceme-li pracovat se všemi otevřenými pokrytími, musíme se omezit na parakompaktní prostory X. Pak lze definovat *velkou* pokrývací dimenzi prostoru X jako dimenzi jemné uniformity na X, tj. $\mathrm{Dim}\, X \leq n$ pokud každé otevřené pokrytí X má otevřené zjemnění řádu nejvýše n.
Platí však následující tvrzení, z kterého vyplývá, že v mnoha případech je $\mathrm{Dim}\, X = \dim X$.

TVRZENÍ (Rovnost malé a velké pokrývací dimenze)

Je-li $\dim X < \infty$, *je* $\dim X = \dim(pX)$, *kde* pX *je totálně omezená modifikace* X.

Z předchozích poznámek vyplývá, jak lze definovat dimenze na úplně regulárních prostorech. Je nutné brát uniformní pokrytí jemných uniformit (ty lze popsat topologicky, bez použití uniformit).

$\Rightarrow$

Místo Čechovy uniformity topologického prostoru můžeme vzít jemnou uniformitu. Chceme-li pracovat se všemi otevřenými pokrytími, musíme se omezit na parakompaktní prostory X. Pak lze definovat *velkou* pokrývací dimenzi prostoru X jako dimenzi jemné uniformity na X, tj. $\mathrm{Dim}\, X \leq n$ pokud každé otevřené pokrytí X má otevřené zjemnění řádu nejvýše n. Platí však následující tvrzení, z kterého vyplývá, že v mnoha případech je $\mathrm{Dim}\, X = \dim X$.

TVRZENÍ (Rovnost malé a velké pokrývací dimenze)

Je-li $\dim X < \infty$, *je* $\dim X = \dim(pX)$, *kde* pX *je totálně omezená modifikace* X.

Z předchozích poznámek vyplývá, jak lze definovat dimenze na úplně regulárních prostorech. Je nutné brát uniformní pokrytí jemných uniformit (ty lze popsat topologicky, bez použití uniformit).

⇒

V metrických prostorech lze definovat ještě další pojem dimenze, který bude záviset na dané metrice (nebude to tedy topologický pojem, pouze uniformní). Můžeme tuto dimenzi metrického prostoru (X, d) označit jako $\dim_d X$ a definovat jako dimenzi uniformního prostoru (X, d).
Platí následující tvrzení.

TVRZENÍ (Vlastnosti metrické dimenze)

Nechť X je metrický prostor

1. $\dim_d X \leq \dim X \leq 2 \dim_d X$.
2. $\dim X = 0$ *právě když* $\dim_d X = 0$.
3. *Je-li Y metrizovatelný prostor, je* $\dim Y$ *supremem všech* $\dim_d(Y, d)$, *kde d vytváří topologii na Y.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti metrické dimenze)

Nechť X *je metrický prostor*

1. $\dim_d X \leq \dim X \leq 2 \dim_d X$.
2. $\dim X = 0$ *právě když* $\dim_d X = 0$.
3. *Je-li* Y *metrizovatelný prostor, je* $\dim Y$ *supremem všech* $\dim_d(Y, d)$, *kde* d *vytváří topologii na* Y.

$\Rightarrow$

Naznačíme nyní, jak lze definovat velkou induktivní dimenzi v uniformních prostorech. Protože budeme používat uniformní okolí množin, jedná se vlastně o dimenzi v totálně omezených prostorech (nebo v proximitních prostorech).
V uniformním prostoru X budeme značit $A \Subset B$, jestliže B je uniformní okolí A (tj. $U[A] \subset B$ pro nějaké uniformní okolí U diagonály).

DEFINICE (Induktivní dimenze uniformního prostoru)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind}X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind}X \leq n$ jestliže každá podmnožina $A \subset X$ má bázi uniformních okolí U, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind}U \leq n-1$.

Říkáme, že X má induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind}X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind}X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind}X = \infty$).

TVRZENÍ (Metrické prostory)

Nechť X je metrizovatelný uniformní prostor a pX je jeho totálně omezená modifikace.

1. $\dim pX \leq \mathrm{Ind}X \leq \dim X$.
2. *Je-li jedna z předchozích tří dimenzí rovna 0, rovnají se všechny 0.*
3. *Je-li $\dim X < \infty$, jsou si všechny tři dimenze rovny.*

DEFINICE (Induktivní dimenze uniformního prostoru)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind} X \leq n$ jestliže každá podmnožina $A \subset X$ má bázi uniformních okolí U, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind} U \leq n - 1$.

Říkáme, že X má induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind} X = \infty$).

TVRZENÍ (Metrické prostory)

Nechť X je metrizovatelný uniformní prostor a pX je jeho totálně omezená modifikace.

1. $\dim pX \leq \mathrm{Ind} X \leq \dim X$.
2. *Je-li jedna z předchozích tří dimenzí rovna 0, rovnají se všechny 0.*
3. *Je-li $\dim X < \infty$, jsou si všechny tři dimenze rovny.*

$\Rightarrow$

DEFINICE (Induktivní dimenze uniformního prostoru)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind} X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind} X \leq n$ jestliže každá podmnožina $A \subset X$ má bázi uniformních okolí U, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind} U \leq n - 1$.

Říkáme, že X má induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind} X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind} X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n - 1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind} X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind} X = \infty$).

V definici lze brát za množiny A jen uzavřené množiny.
Protože v normálním prostoru X znamená uniformní okolí uzavřené množiny totéž co okolí (vzhledem k Čechově nebo jemné uniformitě), je $\mathrm{Ind} X = \mathrm{ind}(X, u)$, kde u je jemná nebo Čechova uniformita na X.
Existují vztahy mezi pokrývací a induktivní dimenzí uniformních prostorů. My si napíšeme jen vztah pro metrické prostory.

TVRZENÍ (Metrické prostory)

Nechť X je metrizovatelný uniformní prostor a pX je jeho totálně omezená modifikace.

1. $\dim pX \leq \mathrm{Ind} X \leq \dim X$.
2. *Je-li jedna z předchozích tří dimenzí rovna 0, rovnají se všechny 0.*

DEFINICE (Induktivní dimenze uniformního prostoru)

Nechť X je uniformní prostor. Definujeme pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

1. $\mathrm{Ind}X = -1$ právě když $X = \emptyset$;
2. $\mathrm{Ind}X \leq n$ jestliže každá podmnožina $A \subset X$ má bázi uniformních okolí U, jejichž hranice H mají $\mathrm{Ind}U \leq n-1$.

Říkáme, že X má induktivní dimenzi rovnou k (symbol $\mathrm{Ind}X = k$), jestliže platí $\mathrm{Ind}X \leq k$ a neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n-1$.
Pokud neplatí $\mathrm{Ind}X \leq n$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že X má nekonečnou induktivní dimenzi (symbol $\mathrm{Ind}X = \infty$).

TVRZENÍ (Metrické prostory)

Nechť X je metrizovatelný uniformní prostor a pX je jeho totálně omezená modifikace.

1. $\dim pX \leq \mathrm{Ind}X \leq \dim X$.
2. *Je-li jedna z předchozích tří dimenzí rovna 0, rovnají se všechny 0.*
3. *Je-li $\dim X < \infty$, jsou si všechny tři dimenze rovny.*

$\Rightarrow$

Zmíníme se o jedné dimenzi, která je výjimečná tím, že její hodnoty mohou být libovolná nezáporná reálná čísla. Našla uplatnění v teorii fraktálu, které bývají často definovány jako podmnožiny euklidovských prostorů, jejichž Hausdorffova dimenze je větší než jejich dimenze topologická (tj. ind).

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s ; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \le \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

$$\dim_H A = \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

a nazveme číslo $\dim_H A$ Hausdorffovou dimenzí množiny A.

Hausdorffova míra je monotónní, je nulová na spočetných množinách, její hodnota na spočetném sjednocení množin je supremum jejích hodnot na jednotlivých množinách, chová se pěkně vzhledem k lipschitzovským

Zmíníme se o jedné dimenzi, která je výjimečná tím, že její hodnoty mohou být libovolná nezáporná reálná čísla. Našla uplatnění v teorii fraktálu, které bývají často definovány jako podmnožiny euklidovských prostorů, jejichž Hausdorffova dimenze je větší než jejich dimenze topologická (tj. ind).

I její definice je zcela jiná a možná neočekávaná. promyslíme-li si však, co ve skutečnosti znamená, je to definice přirozená. Délku úsečky lze změřit jejím pokrýváním nějaké jednotkové úsečky. Obsah např. kruhu lze měřit pokrýváním čtverečků (tj. druhou mocninou úsečky), ale ne pokrýváním úsečami. Objem tělesa lze změřit pokrýváním krychličkami (tj. třetí mocniny úsečky), ale nikoli čtverečky nebo úsečkami.

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s ; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \le \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

Zmíníme se o jedné dimenzi, která je výjimečná tím, že její hodnoty mohou být libovolná nezáporná reálná čísla. Našla uplatnění v teorii fraktálu, které bývají často definovány jako podmnožiny euklidovských prostorů, jejichž Hausdorffova dimenze je větší než jejich dimenze topologická (tj. ind).

I její definice je zcela jiná a možná neočekávaná. promyslíme-li si však, co ve skutečnosti znamená, je to definice přirozená. Délku úsečky lze změřit jejím pokrýváním nějaké jednotkové úsečky. Obsah např. kruhu lze měřit pokrýváním čtverečků (tj. druhou mocninou úsečky), ale ne pokrýváním úsečami. Objem tělesa lze změřit pokrýváním krychličkami (tj. třetí mocniny úsečky), ale nikoli čtverečky nebo úsečkami.

Nejdříve tedy budeme definovat tuto míru velikosti množiny a pomocí ní najdeme vhodnou mocninu „úsečky”. Musíme se omezit na separabilní metrické prostory. Připomeňme z 1.kapitoly, že diam $A = \sup\{d(a,b);\, a,b \in A\}$ značí průměr množiny $A \subset X$.

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \le \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \leq \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

$$\dim_H A = \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

a nazveme číslo $\dim_H A$ Hausdorffovou dimenzí množiny A.

Hausdorffova míra je monotónní, je nulová na spočetných množinách, její hodnota na spočetném sjednocení množin je supremum jejích hodnot na jednotlivých množinách, chová se pěkně vzhledem k lipschitzovským zobrazením.

Na hezkých podmnožinách $\mathbb{R}^n$ je rovna n (má-li $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdný vnitřek, je $\dim_H A = n$). Hausdorffova dimenze Cantorovy množiny je rovna $\log 2 / \log 3$.

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \le \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

Uvědomte si, proč předchozí limita existuje (monotonie). Dá se ukázat, že $\mathcal{H}^s$ je mírou na velké σ-algebře množin (zahrnující všechny borelovské množiny).
Dále se snadno ukáže, že je-li $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, je $\mathcal{H}^t(A) = 0$ pro všechna $t > s$ a tedy $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ pro všechna $0 < t < s$. Následující definice je tedy korektní.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

$$\dim_H A = \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

a nazveme číslo $\dim_H A$ Hausdorffovou dimenzí množiny A.

Hausdorffova míra je monotónní, je nulová na spočetných množinách, její hodnota na spočetném sjednocení množin je supremum jejích hodnot na jednotlivých množinách, chová se pěkně vzhledem k lipschitzovským

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \leq \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

$$\dim_H A = \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

a nazveme číslo $\dim_H A$ Hausdorffovou dimenzí množiny A.

Hausdorffova míra je monotónní, je nulová na spočetných množinách, její hodnota na spočetném sjednocení množin je supremum jejích hodnot na jednotlivých množinách, chová se pěkně vzhledem k lipschitzovským zobrazením.

Na hezkých podmnožinách $\mathbb{R}^n$ je rovna n (má-li $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdný vnitřek, je $\dim_H A = n$). Hausdorffova dimenze Cantorovy množiny je rovna $\log 2 / \log 3$.

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \leq \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

$$\dim_H A = \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

a nazveme číslo $\dim_H A$ Hausdorffovou dimenzí množiny A.

Hausdorffova míra je monotónní, je nulová na spočetných množinách, její hodnota na spočetném sjednocení množin je supremum jejích hodnot na jednotlivých množinách, chová se pěkně vzhledem k lipschitzovským zobrazením.

Na hezkých podmnožinách $\mathbb{R}^n$ je rovna n (má-li $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdný vnitřek, je $\dim_H A = n$). Hausdorffova dimenze Cantorovy množiny je rovna $\log 2 / \log 3$.

DEFINICE (Hausdorffova míra)

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme pro $\delta > 0$ a $s > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{\mathbb{N}} (\operatorname{diam} U_n)^s; \bigcup_{\mathbb{N}} U_n \supset A, \operatorname{diam} U_n \leq \delta\}, \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Číslo $\mathcal{H}^s(A)$ se nazývá Hausdorffovou mírou množiny A.

DEFINICE

Nechť X je separabilní metrický prostor a $A \subset X$. Definujeme

$$\dim_H A = \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

a nazveme číslo $\dim_H A$ Hausdorffovou dimenzí množiny A.

Hausdorffova míra je monotónní, je nulová na spočetných množinách, její hodnota na spočetném sjednocení množin je supremum jejích hodnot na jednotlivých množinách, chová se pěkně vzhledem k lipschitzovským zobrazením.

Na hezkých podmnožinách $\mathbb{R}^n$ je rovna n (má-li $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdný vnitřek, je $\dim_H A = n$). Hausdorffova dimenze Cantorovy množiny je rovna $\log 2 / \log 3$.

$\Rightarrow$

Důležité je chování dimenzí v konstrukcích. Tam však narážíme na problém normality, která se mnoha konstrukcemi nezachovává. I proto je pro zkoumání dimenze vhodnější prostředí uniformních prostorů, nebo úplně regulárních prostorů (s upravenou definicí dimenzí používající nulové množiny a jejich doplňky). V další části budeme hovořit jen o Ind a dim.

Pro dimenze podprostorů byla základní tvrzení uvedena v textu. Existují příklady, že dimenze podprostoru může být větší dimenze prostoru. V případě, že na X požadujeme další vlastnosti (např. dědičnou nebo perfektní normalitu), je dimenze monotónní pro mnohem více podmnožin, než jsou uzavřené podmnožiny.

Aby měla dimenze smysl pro součin prostorů, musí být tento součin normální. Ani to však nestačí na očekávaný výsledek, že dimenze součinu je nejvýše rovna součtu dimenzí jednotlivých složek. Na výsledný součin je třeba klást další požadavky. Zhruba řečeno, je potřeba, aby konečná otevřená pokrytí součinu měla hezká zjemnění tvořená součiny otevřených množin (tzv. rektangularita).

Pro disjunktní součty jsou tvrzení o dimenzi zřejmá. Pro kvocienty už značně méně a některá tvrzení budou zmíněna v následující části o vztahu dimenze a spojitých zobrazení.

Důležité je chování dimenzí v konstrukcích. Tam však narážíme na problém normality, která se mnoha konstrukcemi nezachovává. I proto je pro zkoumání dimenze vhodnější prostředí uniformních prostorů, nebo úplně regulárních prostorů (s upravenou definicí dimenzí používající nulové množiny a jejich doplňky). V další části budeme hovořit jen o Ind a dim.

Pro dimenze podprostorů byla základní tvrzení uvedena v textu. Existují příklady, že dimenze podprostoru může být větší dimenze prostoru. V případě, že na X požadujeme další vlastnosti (např. dědičnou nebo perfektní normalitu), je dimenze monotónní pro mnohem více podmnožin, než jsou uzavřené podmnožiny.

Aby měla dimenze smysl pro součin prostorů, musí být tento součin normální. Ani to však nestačí na očekávaný výsledek, že dimenze součinu je nejvýše rovna součtu dimenzí jednotlivých složek. Na výsledný součin je třeba klást další požadavky. Zhruba řečeno, je potřeba, aby konečná otevřená pokrytí součinu měla hezká zjemnění tvořená součiny otevřených množin (tzv. rektangularita).

Pro disjunktní součty jsou tvrzení o dimenzi zřejmá. Pro kvocienty už značně méně a některá tvrzení budou zmíněna v následující části o vztahu dimenze a spojitých zobrazení.

Důležité je chování dimenzí v konstrukcích. Tam však narážíme na problém normality, která se mnoha konstrukcemi nezachovává. I proto je pro zkoumání dimenze vhodnější prostředí uniformních prostorů, nebo úplně regulárních prostorů (s upravenou definicí dimenzí používající nulové množiny a jejich doplňky). V další části budeme hovořit jen o Ind a dim.

Pro dimenze podprostorů byla základní tvrzení uvedena v textu. Existují příklady, že dimenze podprostoru může být větší dimenze prostoru. V případě, že na X požadujeme další vlastnosti (např. dědičnou nebo perfektní normalitu), je dimenze monotónní pro mnohem více podmnožin, než jsou uzavřené podmnožiny.

Aby měla dimenze smysl pro součin prostorů, musí být tento součin normální. Ani to však nestačí na očekávaný výsledek, že dimenze součinu je nejvýše rovna součtu dimenzí jednotlivých složek. Na výsledný součin je třeba klást další požadavky. Zhruba řečeno, je potřeba, aby konečná otevřená pokrytí součinu měla hezká zjemnění tvořená součiny otevřených množin (tzv. rektangularita).

Pro disjunktní součty jsou tvrzení o dimenzi zřejmá. Pro kvocienty už značně méně a některá tvrzení budou zmíněna v následující části o vztahu dimenze a spojitých zobrazení.

Důležité je chování dimenzí v konstrukcích. Tam však narážíme na problém normality, která se mnoha konstrukcemi nezachovává. I proto je pro zkoumání dimenze vhodnější prostředí uniformních prostorů, nebo úplně regulárních prostorů (s upravenou definicí dimenzí používající nulové množiny a jejich doplňky). V další části budeme hovořit jen o Ind a dim.

Pro dimenze podprostorů byla základní tvrzení uvedena v textu. Existují příklady, že dimenze podprostoru může být větší dimenze prostoru. V případě, že na X požadujeme další vlastnosti (např. dědičnou nebo perfektní normalitu), je dimenze monotónní pro mnohem více podmnožin, než jsou uzavřené podmnožiny.

Aby měla dimenze smysl pro součin prostorů, musí být tento součin normální. Ani to však nestačí na očekávaný výsledek, že dimenze součinu je nejvýše rovna součtu dimenzí jednotlivých složek. Na výsledný součin je třeba klást další požadavky. Zhruba řečeno, je potřeba, aby konečná otevřená pokrytí součinu měla hezká zjemnění tvořená součiny otevřených množin (tzv. rektangularita).

Pro disjunktní součty jsou tvrzení o dimenzi zřejmá. Pro kvocienty už značně méně a některá tvrzení budou zmíněna v následující části o vztahu dimenze a spojitých zobrazení.

$\Rightarrow$

Spojitá zobrazení mohou skoro libovolně měnit dimenzi obrazu. Např. se snadno sestrojí spojité zobrazení jednodimenzionálního separabilního metrizovatelného prostoru na Cantorovu množinu.

Na druhou stranu, každý kompaktní metrizovatelný prostor je spojitým obrazem (a tedy kvocientem) Cantorovy množiny. Nicméně, některé vztahy platí. Opět jsou problémy s normalitou a následující tvrzení budou uvedena jen pro metrizovatelné prostory. Důkazy jsou velmi náročné.

Dimenze a spojitá zobrazení

Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi metrizovatelnými prostory.

1. Je-li f uzavřené zobrazení na Y a $|f^{-1}(y)| \leq k$ for every $y \in Y$, je $\dim Y \leq \dim X + k - 1$.
2. Je-li f uzavřené zobrazení a $\dim(f^{-1}(y)) \leq k$ for every $y \in Y$, je $\dim X \leq \dim Y + k$.
3. Jsou-li X, Y separabilní, f je otevřené zobrazení na Y a každý vzor $f^{-1}(y)$ má izolovaný bod, je $\operatorname{ind} Y \leq \operatorname{ind} X$. Jsou-li vzory $f^{-1}(y)$ diskrétní podprostory X, je $\operatorname{ind} Y = \operatorname{ind} X$.
4. Separabilní metrizovatelný prostor má dimenzi nejvýše rovnu n právě když každé spojité zobrazení z uzavřené podmnožiny prostoru X do sféry S^n lze spojitě rozšířit na celé X.

Spojitá zobrazení mohou skoro libovolně měnit dimenzi obrazu. Např. se snadno sestrojí spojité zobrazení jednodimenzionálního separabilního metrizovatelného prostoru na Cantorovu množinu.

Na druhou stranu, každý kompaktní metrizovatelný prostor je spojitým obrazem (a tedy kvocientem) Cantorovy množiny. Nicméně, některé vztahy platí. Opět jsou problémy s normalitou a následující tvrzení budou uvedena jen pro metrizovatelné prostory. Důkazy jsou velmi náročné.

Dimenze a spojitá zobrazení

Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi metrizovatelnými prostory.

1. Je-li f uzavřené zobrazení na Y a $|f^{-1}(y)| \leq k$ for every $y \in Y$, je $\dim Y \leq \dim X + k - 1$.
2. Je-li f uzavřené zobrazení a $\dim(f^{-1}(y)) \leq k$ for every $y \in Y$, je $\dim X \leq \dim Y + k$.
3. Jsou-li X, Y separabilní, f je otevřené zobrazení na Y a každý vzor $f^{-1}(y)$ má izolovaný bod, je $\operatorname{ind} Y \leq \operatorname{ind} X$. Jsou-li vzory $f^{-1}(y)$ diskrétní podprostory X, je $\operatorname{ind} Y = \operatorname{ind} X$.
4. Separabilní metrizovatelný prostor má dimenzi nejvýše rovnu n právě když každé spojité zobrazení z uzavřené podmnožiny prostoru X do sféry S^n lze spojitě rozšířit na celé X.

Spojitá zobrazení mohou skoro libovolně měnit dimenzi obrazu. Např. se snadno sestrojí spojité zobrazení jednodimenzionálního separabilního metrizovatelného prostoru na Cantorovu množinu.

Na druhou stranu, každý kompaktní metrizovatelný prostor je spojitým obrazem (a tedy kvocientem) Cantorovy množiny. Nicméně, některé vztahy platí. Opět jsou problémy s normalitou a následující tvrzení budou uvedena jen pro metrizovatelné prostory. Důkazy jsou velmi náročné.

Dimenze a spojitá zobrazení

Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení mezi metrizovatelnými prostory.

1. Je-li f uzavřené zobrazení na Y a $|f^{-1}(y)| \leq k$ for every $y \in Y$, je $\dim Y \leq \dim X + k - 1$.
2. Je-li f uzavřené zobrazení a $\dim(f^{-1}(y)) \leq k$ for every $y \in Y$, je $\dim X \leq \dim Y + k$.
3. Jsou-li X, Y separabilní, f je otevřené zobrazení na Y a každý vzor $f^{-1}(y)$ má izolovaný bod, je $\mathrm{ind} Y \leq \mathrm{ind} X$. Jsou-li vzory $f^{-1}(y)$ diskrétní podprostory X, je $\mathrm{ind} Y = \mathrm{ind} X$.
4. Separabilní metrizovatelný prostor má dimenzi nejvýše rovnu n právě když každé spojité zobrazení z uzavřené podmnožiny prostoru X do sféry S^n lze spojitě rozšířit na celé X.