14. DIMENZE

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

TVRZENÍ (Separabilní metrizovatelný prostor)

1. *Nechť separabilní metrizovatelný prostor X lze vyjádřit jako $M \cup N$, kde $\operatorname{ind} M \leq 0$, $\operatorname{ind} N \leq n-1$. Potom $\operatorname{ind} X \leq n$.*
2. *Pro separabilní metrizovatelný prostor X je $\operatorname{ind} X \leq n$, $n \geq 0$, právě když pro každou uzavřenou množinu A a její otevřené okolí U existuje její otevřené okolí V tak, že $V \subset \overline{V} \subset U$ a $\operatorname{ind}(\overline{V} \setminus V) \leq n-1$.*

Důkaz.

1. Platí-li $\operatorname{ind} X \leq n$ pro neprázdný separabilní metrizovatelný prostor X, má X spočetnou otevřenou bázi $\mathcal{B}$ takovou, že $\operatorname{ind} H_B \leq n-1$ pro hranice množin $B \in \mathcal{B}$. Položme $N = \bigcup \{H_B ; B \in \mathcal{B}\}$ a $M = X \setminus N$. Zřejmě je $\operatorname{ind} M \leq 0$. Zbývá dokázat, že sjednocení spočetně mnoha uzavřených podmnožin X, majících malou induktivní dimenzi rovnu nejvýše $n-1$, má také $\operatorname{ind} \leq n-1$. Důkaz lze snadno provést indukcí podle n.
2. Stačí dokázat nutnost tvrzení. Podle předchozí položky je $= M \cup N$, kde $\operatorname{ind} M \leq 0$, $\operatorname{ind} N \leq n-1$. Nejdříve ukážeme, že existuje otevřená množina $G \subset U$ taková, že $A \cap M \subset G \cap M$ a že $G \cap M$ je obojetná množina v M. Zvolme otevřené množiny V, W v X tak, že $A \subset V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$.
   Každé $x \in M$ má obojetné okolí H_x v M, které buď leží v W nebo je disjunktní s $\overline{V}$. Existuje spočetně mnoho bodů x_n takové, že $\bigcup H_{x_n} = M$. Pak množina $H = \bigcup_{\mathbb{N}} \{H_{x_n} \setminus \bigcup_{i<n} H_{x_i} ; H_{x_n} \setminus \bigcup_{i<n} H_{x_i} \cap \overline{V} \neq \emptyset\}$ je obojetná v M a $\overline{V} \cap M \subset H \subset W$.
   Protože jsme v metrickém prostoru, existuje otevřená množin G v X tak, že $A \cup H \subset G \subset \overline{G} \subset U \setminus (M \setminus H)$. G je hledanou množinou.
   Protože $G \cap M$ je obojetná v M, leží hranice množiny G v N a tedy má malou induktivní dimenzi rovnou nejvýše $n-1$.

□

TVRZENÍ (Ind=ind pro separabilní metrizovatelný prostor)

Je-li X separabilní metrizovatelný prostor, je $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Důkaz.

Důkaz plyne ihned indukcí z druhé části předchozího tvrzení. □

TVRZENÍ (Věta o rozkladu)

Pro metrizovatelný prostor X je $\mathrm{Ind} X \leq n$ právě když X je sjednocením $n+1$ nuldimenzionálních podmnožin.

Důkaz.

Stačí ukázat, že $\mathrm{Ind} X \leq n$ právě když $X = M \cup N$, kde $\mathrm{Ind} M = 0$, $\mathrm{Ind} N \leq n-1$. Nechť nejdříve $\mathrm{Ind} X \leq n$. Z definice Ind a z vlastností báze metrizovatelného prostoru ihned vyplývá existence σ-lokálně konečné otevřené báze $\mathcal{B}$ v X s vlastností $\mathrm{Ind} H_B \leq n-1$ pro každé $B \in \mathcal{B}$. Soustava $\{H_B\}$ je σ-lokálně konečná a pro její sjednocení H je tedy $\mathrm{Ind} H \leq n-1$. Je zřejmé, že $\mathrm{Ind}(X \setminus H) \leq 0$. Důkaz obráceného tvrzení je skoro stejný jako důkaz první části předchozího tvrzení. □

TVRZENÍ (Rovnost dimenzí pro metrický prostor)

Pro každý metrizovatelný prostor X *platí* $\mathrm{Ind} X = \dim X$.

Důkaz.

Nejdříve ukážeme, že $\dim X \leq \mathrm{Ind} X$. To platí pokud $\mathrm{Ind} X = 0$.
Nechť $\mathrm{Ind} X \leq n$. Podle předchozí věty lze psát $X = M_1 \cup \ldots \cup M_{n+1}$, kde $\mathrm{Ind} M_i \leq 0$. Mějme konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ prostoru X. Pro každé $i \leq n+1$ existuje otevřený rozklad $\{V_1^i, \ldots V_k^i\}$ množiny M_i zjemňující $\mathcal{U}$. Pro každé $x \in V_j^i$ existuje koule $B_{x,r_x} \subset U_j^i$, $B_{x,r_x} \cap M_i \subset V_j^i$. Položíme $W_j^i = \bigcup \{B_{x,r_x/2}; x \in V_j^i\}$. Zřejmě je $\{W_1^i, \ldots, W_k^i\}$ otevřené disjunktní pokrytí M_i zjemňující $\mathcal{U}$ a tedy $\{W_j^i; i \leq n+1, j \leq k\}$ je hledané zjemnění $\mathcal{U}$ mající řád nejvýše n.
Obráceně nechť $\dim X \leq n$. Není těžké sestrojit posloupnost $\{\mathcal{U}_i\}$ lokálně konečných otevřených pokrytí takové, že všechny množiny v $\mathcal{U}_i$ mají průměr menší než $1/i$ (vzhledem k dané metrice). Lze najít uzavřená pokrytí $\{F_U; U \in \mathcal{U}_i\}_i$, kde $F_U \subset U$. Je technicky náročné najít otevřené množiny $F_U \subset V_U \subset \overline{V_U} \subset U$ tak, že řád pokrytí $\{\overline{V_U} \setminus V_U; U \in \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{U}_i\}$ je nejvýše $n-1$. Z toho již jednoduše plyne, že $\mathrm{Ind} X \leq n$. □

TVRZENÍ (Dimenze euklidovských prostorů)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n = \operatorname{Ind}\mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n$.

Důkaz.

Indukcí se snadno ukáže, že $\dim \mathbb{R}^n \leq n$. Vezmeme n-dimenzionální simplex $S \subset \mathbb{R}^n$ a ukážeme, že $\dim S \geq n$. Musíme najít otevřené pokrytí S, které nemá zjemnění řádu nejvýše $n-1$. S má $n+1$ $(n-1)$-dimenzionálních stran S_i a jejich doplňky U_i tvoří otevřené pokrytí $\mathcal{U}$. Vezměme jeho libovolné konečné otevřené zjemnění $\mathcal{V}$ a definujme přiřazení vrcholů z K do $0, \ldots, n$ $V \rightsquigarrow i : \mathcal{V} \to 0, \ldots, n$ tak, že $V \subset U_i$. Toto přiřazení je simpliciální zobrazení z nervu pokrytí $\mathcal{V}$ do nervu pokrytí $\mathcal{U}$, tj. do simplexu S. Podle Špernerovy věty existuje simplex nervu $\mathcal{V}$, který se zobrazí na S a tedy má dimenzi n, tj. existuje $n+1$ prvků $\mathcal{V}$, které mají neprázdný průnik, což se mělo dokázat. □