14. DIMENZE

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Příklady ukazující rozdíly mezi dimenzemi jsou většinou velmi složité jak konstrukcí tak dokazováním jejich vlastností a přesahují možnosti tohoto textu.

Uvedeme proto jen jednodušší příklady, složitější je jen poslední příklad bloku *Dimenze* > 0, tzv. Erdösův prostor.

Nejdříve zopakujeme několik příkladů nuldimenzionálních prostorů.

Dimenze 0

1. Každý spočetný úplně regulární prostor má dimenzi 0.
2. Cantorova množina má dimenzi 0.
3. Množina iracionálních čísel má dimenzi 0.
4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\mathbb{Q}_k^n$ je podprostor $\mathbb{R}^n$ všech bodů majících přesně k racionálních souřadnic. Prostor $\mathbb{Q}_k^n$ má dimenzi 0.
5. Předchozí příklad platí i pro $n = \infty$.
6. Nechť $X = D^\omega$, kde D je diskrétní prostor. Potom $\operatorname{Ind} X = 0$.

Příklady ukazující rozdíly mezi dimenzemi jsou většinou velmi složité jak konstrukcí tak dokazováním jejich vlastností a přesahují možnosti tohoto textu.

Uvedeme proto jen jednodušší příklady, složitější je jen poslední příklad bloku *Dimenze* > 0, tzv. Erdösův prostor.

Nejdříve zopakujeme několik příkladů nuldimenzionálních prostorů.

Dimenze 0

1. Každý spočetný úplně regulární prostor má dimenzi 0.
2. Cantorova množina má dimenzi 0.
3. Množina iracionálních čísel má dimenzi 0.
4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\mathbb{Q}^n_k$ je podprostor $\mathbb{R}^n$ všech bodů majících přesně k racionálních souřadnic. Prostor $\mathbb{Q}^n_k$ má dimenzi 0.
5. Předchozí příklad platí i pro $n = \infty$.
6. Nechť $X = D^\omega$, kde D je diskrétní prostor. Potom $\text{Ind}X = 0$.

Příklady ukazující rozdíly mezi dimenzemi jsou většinou velmi složité jak konstrukcí tak dokazováním jejich vlastností a přesahují možnosti tohoto textu.

Uvedeme proto jen jednodušší příklady, složitější je jen poslední příklad bloku *Dimenze* > 0, tzv. Erdösův prostor.

Nejdříve zopakujeme několik příkladů nuldimenzionálních prostorů.

Dimenze 0

1. Každý spočetný úplně regulární prostor má dimenzi 0.
2. Cantorova množina má dimenzi 0.
3. Množina iracionálních čísel má dimenzi 0.
4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\mathbb{Q}_k^n$ je podprostor $\mathbb{R}^n$ všech bodů majících přesně k racionálních souřadnic. Prostor $\mathbb{Q}_k^n$ má dimenzi 0.
5. Předchozí příklad platí i pro $n = \infty$.
6. Nechť $X = D^\omega$, kde D je diskrétní prostor. Potom $\mathrm{Ind}X = 0$.

Příklady ukazující rozdíly mezi dimenzemi jsou většinou velmi složité jak konstrukcí tak dokazováním jejich vlastností a přesahují možnosti tohoto textu.

Uvedeme proto jen jednodušší příklady, složitější je jen poslední příklad bloku *Dimenze* > 0, tzv. Erdösův prostor.

Nejdříve zopakujeme několik příkladů nuldimenzionálních prostorů.

Dimenze 0

1. Každý spočetný úplně regulární prostor má dimenzi 0.
2. Cantorova množina má dimenzi 0.
3. Množina iracionálních čísel má dimenzi 0.
4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $\mathbb{Q}_k^n$ je podprostor $\mathbb{R}^n$ všech bodů majících přesně k racionálních souřadnic. Prostor $\mathbb{Q}_k^n$ má dimenzi 0.
5. Předchozí příklad platí i pro $n = \infty$.
6. Nechť $X = D^\omega$, kde D je diskrétní prostor. Potom $\mathrm{Ind} X = 0$.

Dimenze > 0

1. $\mathrm{ind}\mathbb{R} = 1$;
2. $\mathrm{ind}S^1 = 1$, kde S^1 je kružnice;
3. $\mathrm{ind}\mathbb{R}^n \leq n$;
4. $\mathrm{ind}S^n \leq n$, kde S^n je n-dimenzionální sféra;
5. Nechť X je množina všech posloupností racionálních čísel $\{x_n\}$, pro které $\sum_{\mathbb{N}} x_n^2 < \infty$, s metrikou $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sqrt{\sum_{\mathbb{N}} (x_n - y_n)^2}$. Pak $\mathrm{ind}X = 1$.