OBECNÁ TOPOLOGIE

13. SOUVISLOST

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

Asi každý tuší význam výroků *přímka je souvislá množina, hyperbola s oběma větvemi je nesouvislá*. Jak převést tuto situaci do topologických prostorů?

U přímky můžeme každé dva body spojit úsečkou, u hyperboly existují body, které uvnitř hyperboly nespojíme žádnou křivkou (chápeme-li křivku jako spojitý obraz uzavřeného intervalu). To je docela vhodný přístup až na to, že potřebujeme spojitá zobrazení intervalu do topologických prostorů. Ta nemusí existovat, a přesto můžeme daný prostor považovat za spojitý.

Vhodnější přístup bude pomocí vnitřních vlastností topologických prostorů (bez použití funkcí). Uvedený příklad naznačuje, jak je to možné udělat. Hyperbola se skládá ze dvou uzavřených částí, přímku nerozdělíme na dvě disjunktní uzavřené části. Je to vhodná definice souvislosti? Ukázalo se, že ano.

Asi každý tuší význam výroků *přímka je souvislá množina, hyperbola s oběma větvemi je nesouvislá*. Jak převést tuto situaci do topologických prostorů?

U přímky můžeme každé dva body spojit úsečkou, u hyperboly existují body, které uvnitř hyperboly nespojíme žádnou křivkou (chápeme-li křivku jako spojitý obraz uzavřeného intervalu). To je docela vhodný přístup až na to, že potřebujeme spojitá zobrazení intervalu do topologických prostorů. Ta nemusí existovat, a přesto můžeme daný prostor považovat za spojitý.

Vhodnější přístup bude pomocí vnitřních vlastností topologických prostorů (bez použití funkcí). Uvedený příklad naznačuje, jak je to možné udělat. Hyperbola se skládá ze dvou uzavřených částí, přímku nerozdělíme na dvě disjunktní uzavřené části. Je to vhodná definice souvislosti? Ukázalo se, že ano.

Asi každý tuší význam výroků *přímka je souvislá množina, hyperbola s oběma větvemi je nesouvislá*. Jak převést tuto situaci do topologických prostorů?

U přímky můžeme každé dva body spojit úsečkou, u hyperboly existují body, které uvnitř hyperboly nespojíme žádnou křivkou (chápeme-li křivku jako spojitý obraz uzavřeného intervalu). To je docela vhodný přístup až na to, že potřebujeme spojitá zobrazení intervalu do topologických prostorů. Ta nemusí existovat, a přesto můžeme daný prostor považovat za spojitý.

Vhodnější přístup bude pomocí vnitřních vlastností topologických prostorů (bez použití funkcí). Uvedený příklad naznačuje, jak je to možné udělat. Hyperbola se skládá ze dvou uzavřených částí, přímku nerozdělíme na dvě disjunktní uzavřené části. Je to vhodná definice souvislosti? Ukázalo se, že ano.

Upřesníme výše uvedený popis souvislosti v topologických prostorech.

DEFINICE (souvislost)

Řekneme, že topologický prostor je souvislý, jestliže jediné jeho obojetné množiny jsou $\emptyset$ a celý prostor. Podmnožina topologického prostoru se nazývá souvislá, jestliže je souvislá jako podprostor uvedeného prostoru.

Z definice vyplývá, že každý indiskrétní prostor je souvislý (a tedy prázdná množina a jednobodový prostor jsou souvislé).
Aspoň dvoubodový diskrétní prostor není souvislý.
Sierpinského dvoubodový prostor je souvislý.

Uvědomte si, že žádný aspoň dvoubodový 0-dimenzionální T_0-prostor není souvislý.

DEFINICE (souvislost)

Řekneme, že topologický prostor je souvislý, jestliže jediné jeho obojetné množiny jsou $\emptyset$ a celý prostor. Podmnožina topologického prostoru se nazývá souvislá, jestliže je souvislá jako podprostor uvedeného prostoru.

Z definice vyplývá, že každý indiskrétní prostor je souvislý (a tedy prázdná množina a jednobodový prostor jsou souvislé).
Aspoň dvoubodový diskrétní prostor není souvislý.
Sierpinského dvoubodový prostor je souvislý.

Uvědomte si, že žádný aspoň dvoubodový 0-dimenzionální T_0-prostor není souvislý.

DEFINICE (souvislost)

Řekneme, že topologický prostor je souvislý, jestliže jediné jeho obojetné množiny jsou $\emptyset$ a celý prostor. Podmnožina topologického prostoru se nazývá souvislá, jestliže je souvislá jako podprostor uvedeného prostoru.

Z definice vyplývá, že každý indiskrétní prostor je souvislý (a tedy prázdná množina a jednobodový prostor jsou souvislé).
Aspoň dvoubodový diskrétní prostor není souvislý.
Sierpinského dvoubodový prostor je souvislý.

Uvědomte si, že žádný aspoň dvoubodový 0-dimenzionální T_0-prostor není souvislý.

DEFINICE (souvislost)

Řekneme, že topologický prostor je souvislý, jestliže jediné jeho obojetné množiny jsou $\emptyset$ a celý prostor. Podmnožina topologického prostoru se nazývá souvislá, jestliže je souvislá jako podprostor uvedeného prostoru.

Z definice vyplývá, že každý indiskrétní prostor je souvislý (a tedy prázdná množina a jednobodový prostor jsou souvislé).
Aspoň dvoubodový diskrétní prostor není souvislý.
Sierpinského dvoubodový prostor je souvislý.

Uvědomte si, že žádný aspoň dvoubodový 0-dimenzionální T_0-prostor není souvislý.

Uvedeme základní věty o souvislosti. Jejich důkazy jsou jednoduché.

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li A_i, $i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li A_i, $i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li A_i, $i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li A_i, $i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li A_i, $i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

Důkaz

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li $A_i, i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li $A_n, n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

Důkaz

Podle předchozí věty je sjednocení všech souvislých podmnožin topologického prostoru, obsahující daný bod, souvislá množina. Je to zřejmě největší souvislá množina v daném prostoru.

DEFINICE (Komponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Sjednocení všech souvislých podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá komponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Každá komponenta prostoru X je souvislá množina. Je to maximální souvislá podmnožina v X.
2. Každá komponenta je uzavřená množina.
3. Dvě různé komponenty jsou disjunktní.
4. Obojetná podmnožina v X obsahuje komponentu každého svého bodu v X.

V souvislém prostoru zřejmě existuje jediná komponenta.

DEFINICE (Komponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Sjednocení všech souvislých podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá komponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Každá komponenta prostoru X je souvislá množina. Je to maximální souvislá podmnožina v X.
2. Každá komponenta je uzavřená množina.
3. Dvě různé komponenty jsou disjunktní.
4. Obojetná podmnožina v X obsahuje komponentu každého svého bodu v X.

V souvislém prostoru zřejmě existuje jediná komponenta.

V diskrétním prostoru jsou komponenty jednobodové množiny.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Komponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Sjednocení všech souvislých podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá komponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Každá komponenta prostoru X je souvislá množina. Je to maximální souvislá podmnožina v X.
2. Každá komponenta je uzavřená množina.
3. Dvě různé komponenty jsou disjunktní.
4. Obojetná podmnožina v X obsahuje komponentu každého svého bodu v X.

V souvislém prostoru zřejmě existuje jediná komponenta.

V diskrétním prostoru jsou komponenty jednobodové množiny.

DEFINICE (Komponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Sjednocení všech souvislých podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá komponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Každá komponenta prostoru X je souvislá množina. Je to maximální souvislá podmnožina v X.
2. Každá komponenta je uzavřená množina.
3. Dvě různé komponenty jsou disjunktní.
4. Obojetná podmnožina v X obsahuje komponentu každého svého bodu v X.

V souvislém prostoru zřejmě existuje jediná komponenta.

V diskrétním prostoru jsou komponenty jednobodové množiny.

DEFINICE (Komponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Sjednocení všech souvislých podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá komponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Každá komponenta prostoru X je souvislá množina. Je to maximální souvislá podmnožina v X.
2. Každá komponenta je uzavřená množina.
3. Dvě různé komponenty jsou disjunktní.
4. Obojetná podmnožina v X obsahuje komponentu každého svého bodu v X.

V souvislém prostoru zřejmě existuje jediná komponenta.

V diskrétním prostoru jsou komponenty jednobodové množiny.

$\Rightarrow$

Podle předchozího posledního pozorování jsou obojetné množiny větší než komponenty, a tedy i neprázdné průniky obojetných množin obsahují celé komponenty.

DEFINICE (Kvazikomponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Průnik všech obojetných podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá kvazikomponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Soustava všech kvazikomponent prostoru X tvoří jeho rozklad.
2. Soustava všech komponent ležících v dané kvazikomponentě tvoří její rozklad.
3. V kompaktním prostoru jsou kvazikomponenty totožné s komponentami.
4. Existuje podprostor roviny, jehož kvazikomponenty nejsou totožné s komponentami (viz Cvičení).

Podle předchozího posledního pozorování jsou obojetné množiny větší než komponenty, a tedy i neprázdné průniky obojetných množin obsahují celé komponenty.

DEFINICE (Kvazikomponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Průnik všech obojetných podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá kvazikomponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Soustava všech kvazikomponent prostoru X tvoří jeho rozklad.
2. Soustava všech komponent ležících v dané kvazikomponentě tvoří její rozklad.
3. V kompaktním prostoru jsou kvazikomponenty totožné s komponentami.
4. Existuje podprostor roviny, jehož kvazikomponenty nejsou totožné s komponentami (viz Cvičení).

Podle předchozího posledního pozorování jsou obojetné množiny větší než komponenty, a tedy i neprázdné průniky obojetných množin obsahují celé komponenty.

DEFINICE (Kvazikomponenty)

Nechť X je topologický prostor a $x \in X$. Průnik všech obojetných podmnožin topologického prostoru obsahujících x se nazývá kvazikomponenta bodu x v X.

Pozorování

1. Soustava všech kvazikomponent prostoru X tvoří jeho rozklad.
2. Soustava všech komponent ležících v dané kvazikomponentě tvoří její rozklad.
3. V kompaktním prostoru jsou kvazikomponenty totožné s komponentami.
4. Existuje podprostor roviny, jehož kvazikomponenty nejsou totožné s komponentami (viz Cvičení).

Tak, jako se ukázalo pro topologické prostory vhodné být např. kompaktní jen lokálně, v nějakých okolích bodů, je podobná lokalizace vhodná i pro souvislost.

DEFINICE (Lokálně souvislé prostory)

Topologický prostor X se nazývá lokálně souvislý, jestliže každý bod má bázi svých okolí složenou ze souvislých množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně souvislých prostorů)

1. *Topologický prostor X je lokálně souvislý právě když komponenty každého otevřeného podprostoru jsou otevřené.*
2. *Lokálně souvislý prostor je disjunktním součtem souvislých prostorů.*
3. *V lokálně souvislém prostoru jsou komponenty a kvazikomponenty totožné.*
4. *Třída lokálně souvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, konečné součiny, disjunktní součty a kvocienty.*
5. *Je-li X úplně regulární, je βX lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně souvislé prostory)

Topologický prostor X se nazývá lokálně souvislý, jestliže každý bod má bázi svých okolí složenou ze souvislých množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně souvislých prostorů)

1. *Topologický prostor X je lokálně souvislý právě když komponenty každého otevřeného podprostoru jsou otevřené.*
2. *Lokálně souvislý prostor je disjunktním součtem souvislých prostorů.*
3. *V lokálně souvislém prostoru jsou komponenty a kvazikomponenty totožné.*
4. *Třída lokálně souvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, konečné součiny, disjunktní součty a kvocienty.*
5. *Je-li X úplně regulární, je βX lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně souvislé prostory)

Topologický prostor X se nazývá lokálně souvislý, jestliže každý bod má bázi svých okolí složenou ze souvislých množin.

Diskrétní a indiskrétní prostory jsou lokálně souvislé. Sierpiǹského dvoubodový prostor je lokálně souvislý. Hrubý T_1-prostor je lokálně souvislý.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně souvislých prostorů)

1. *Topologický prostor X je lokálně souvislý právě když komponenty každého otevřeného podprostoru jsou otevřené.*
2. *Lokálně souvislý prostor je disjunktním součtem souvislých prostorů.*
3. *V lokálně souvislém prostoru jsou komponenty a kvazikomponenty totožné.*
4. *Třída lokálně souvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, konečné součiny, disjunktní součty a kvocienty.*
5. *Je-li X úplně regulární, je βX lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně souvislé prostory)

Topologický prostor X se nazývá lokálně souvislý, jestliže každý bod má bázi svých okolí složenou ze souvislých množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně souvislých prostorů)

1. *Topologický prostor X je lokálně souvislý právě když komponenty každého otevřeného podprostoru jsou otevřené.*
2. *Lokálně souvislý prostor je disjunktním součtem souvislých prostorů.*
3. *V lokálně souvislém prostoru jsou komponenty a kvazikomponenty totožné.*
4. *Třída lokálně souvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, konečné součiny, disjunktní součty a kvocienty.*
5. *Je-li X úplně regulární, je βX lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.*

Důkaz

Kontinua jsou základní stavební kameny objektů.

DEFINICE (Kontinuum)

Kontinuum je neprázdný kompaktní souvislý metrický prostor, subkontinuum je kontinuum, které je podmnožinou daného prostoru.

TVRZENÍ (Základní fakta)

1. *Průnik spočetné klesající posloupnosti kontinuí je kontinuum.*
2. *Spočetný součin kontinuí je kontinuum.*

V teorii kontinuí je řada tvrzení, která jsou natolik názorná, že se označují jako "fakt".

DEFINICE (Kontinuum)

Kontinuum je neprázdný kompaktní souvislý metrický prostor, subkontinuum je kontinuum, které je podmnožinou daného prostoru.

TVRZENÍ (Základní fakta)

1. *Průnik spočetné klesající posloupnosti kontinuí je kontinuum.*
2. *Spočetný součin kontinuí je kontinuum.*

V teorii kontinuí je řada tvrzení, která jsou natolik názorná, že se označují jako "fakt".

DEFINICE (Kontinuum)

Kontinuum je neprázdný kompaktní souvislý metrický prostor, subkontinuum je kontinuum, které je podmnožinou daného prostoru.

TVRZENÍ (Základní fakta)

1. *Průnik spočetné klesající posloupnosti kontinuí je kontinuum.*
2. *Spočetný součin kontinuí je kontinuum.*

V teorii kontinuí je řada tvrzení, která jsou natolik názorná, že se označují jako ”fakt”.

DEFINICE (Rozložitelné kontinuum)

Kontinuum se nazývá rozložitelné, pokud je sjednocením dvou vlastních podkontinuí. Jinak se nazývá nerozložitelné.

Existuje vůbec nerozložitelné kontinuum?

Pozorování

Typické kontinuum je nerozložitelné (ve smyslu kategorií, tvoří G_δ hustou množinu mezi podkontinui Hilbertovy kostky, vzdálenost dvou kontinuí je nejdelší cesta v kostce z jednoho do druhého).

DEFINICE (Rozložitelné kontinuum)

Kontinuum se nazývá rozložitelné, pokud je sjednocením dvou vlastních podkontinuí. Jinak se nazývá nerozložitelné.

Existuje vůbec nerozložitelné kontinuum?

Pozorování

Typické kontinuum je nerozložitelné (ve smyslu kategorií, tvoří G_δ hustou množinu mezi podkontinui Hilbertovy kostky, vzdálenost dvou kontinuí je nejdelší cesta v kostce z jednoho do druhého).

DEFINICE (Rozložitelné kontinuum)

Kontinuum se nazývá rozložitelné, pokud je sjednocením dvou vlastních podkontinuí. Jinak se nazývá nerozložitelné.

Existuje vůbec nerozložitelné kontinuum?

Pozorování

Typické kontinuum je nerozložitelné (ve smyslu kategorií, tvoří G_δ hustou množinu mezi podkontinui Hilbertovy kostky, vzdálenost dvou kontinuí je nejdelší cesta v kostce z jednoho do druhého).

DEFINICE (Inverzní limita)

Inverzní limitou posloupnosti $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde X_n jsou souřadnicové prostory a mezi nimi jsou nastavena lepící zobrazení $f_n : X_{n+1} \to X_n$, se nazývá podmnožina kartézského součinu $\Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ definovaná rovností

$$\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} \;=\; \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Pi_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n \;,\; n \in \mathbb{N}\} \,.$$

Inverzní limitu znázorníme

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} X_4 \xleftarrow{f_4} \cdots \,.$$

Inverzní limitu můžeme představit tak, že ke prostoru X_1 něco přilepíme a dostaneme prostor X_2. A to lepící zobrazení je retrakce přilepených věciček do bodů, kde byly přilepeny.

DEFINICE (Inverzní limita)

Inverzní limitou posloupnosti $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde X_n jsou souřadnicové prostory a mezi nimi jsou nastavena lepící zobrazení $f_n : X_{n+1} \to X_n$, se nazývá podmnožina kartézského součinu $\Pi_{n=1}^{\infty} X_n$ definovaná rovností

$$\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Pi_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n \ , \ n \in \mathbb{N}\} .$$

Inverzní limitu znázorníme

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} X_4 \xleftarrow{f_4} \cdots .$$

Inverzní limitu můžeme představit tak, že ke prostoru X_1 něco přilepíme a dostaneme prostor X_2. A to lepící zobrazení je retrakce přilepených věciček do bodů, kde byly přilepeny.

Pozorování

Nechť $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je inverzní posloupnost, pak

$$\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \cap_{n=1}^{\infty} K_n \,,$$

kde

$$K_n = \{(x_m)_{m=1}^{\infty} \in \Pi_{m=1}^{\infty} X_m : f_m(x_{m+1}) = x_m \,,\; m \leq n\} \,.$$

tvoří monotónní posloupnost ($K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$) kontinuí (K_n je homeomorfní s kontinuem $\Pi_{m=n+1}^{\infty} X_m$).

Tedy je to podobná kontrukce jako klesající posloupnost kontinuí.

Pozorování

Nechť $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je inverzní posloupnost, pak

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \cap_{n=1}^{\infty} K_n \,,$$

kde

$$K_n = \{(x_m)_{m=1}^{\infty} \in \Pi_{m=1}^{\infty} X_m : f_m(x_{m+1}) = x_m \,,\ m \leq n\} \,.$$

tvoří monotónní posloupnost ($K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$) kontinuí (K_n je homeomorfní s kontinuem $\Pi_{m=n+1}^{\infty} X_m$).

Tedy je to podobná kontrukce jako klesající posloupnost kontinuí.

Pozorování

Nechť $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je inverzní posloupnost, pak

$$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \cap_{n=1}^{\infty} K_n \,,$$

kde

$$K_n = \{(x_m)_{m=1}^{\infty} \in \Pi_{m=1}^{\infty} X_m : f_m(x_{m+1}) = x_m \,, \; m \leq n\} \,.$$

tvoří monotónní posloupnost ($K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$) kontinuí (K_n je homeomorfní s kontinuem $\Pi_{m=n+1}^{\infty} X_m$).

Tedy je to podobná kontrukce jako klesající posloupnost kontinuí.

TVRZENÍ (Inverzní limita)

Inverzní limita kontinuí je kontinuum.

TVRZENÍ (Inverzní limita)

Inverzní limita kontinuí je kontinuum.

DEFINICE (Nerozložitelná inverzní posloupnost)

Inverzní posloupnost kontinuí $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerozložitelná inverzní posloupnost, pokud se alespoň jedno ze subkontinuí A_{n+1} a B_{n+1} tvořících rozklad $X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$ zobrazí na X_n (pro každé $n \in \mathbb{N}$).

TVRZENÍ (Nerozložitelná inverzní posloupnost)

Nerozložitelná inverzní posloupnost kontinuí má za limitu nerozložitelné kontinuum.

DEFINICE (Nerozložitelná inverzní posloupnost)

Inverzní posloupnost kontinuí $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerozložitelná inverzní posloupnost, pokud se alespoň jedno ze subkontinuí A_{n+1} a B_{n+1} tvořících rozklad $X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$ zobrazí na X_n (pro každé $n \in \mathbb{N}$).

TVRZENÍ (Nerozložitelná inverzní posloupnost)

Nerozložitelná inverzní posloupnost kontinuí má za limitu nerozložitelné kontinuum.

Následující věta je užitečná, když tvoříte kontinuum přilepováním malých kousíčků.

TVRZENÍ (Anderson-Choquetova věta)

Nechť (S, d) je kompaktní prostor $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je inverzní posloupnost, kde X_n jsou neprázdné kompaktní podmnožiny S a zobrazení f_n jsou na X_n. Nechť $f_{i,j} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \to X_i$ pokud $j > i + 1$ a $f_{i,i+1} = f_i$. Pak $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je homeomorfní

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(\overline{\bigcup_{m \geq i} X_m}),$$

pokud platí:
(1) (existence) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k takové že pro každé $p \in X_k$ má množina $\bigcup_{j>k} f_{k,j}^{-1}(p)$ diametr menší než ε.
(2) (jednoznačnost) Pro každé i a $\delta > 0$ existuje $\delta' > 0$ tak, že kdykoliv $j > 1$ a body $p, q \in X_j$ splňují $d(f_{i,j}(p), f_{i,j}(q)) > \delta$, vyplývá z toho, že $d(p, q) > \delta'$.
Je-li navíc $X_i \subset X_{i+1}$, pak

$$\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

je homeomorfní s

TVRZENÍ (Anderson-Choquetova věta)

Nechť (S,d) *je kompaktní prostor* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je inverzní posloupnost, kde* X_n *jsou neprázdné kompaktní podmnožiny* S *a zobrazení* f_n *jsou na* X_n. *Nechť* $f_{i,j} = f_i \circ \cdots \circ f_{j-1} : X_j \to X_i$ *pokud* $j > i+1$ *a* $f_{i,i+1} = f_i$. *Pak* $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je homeomorfní*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{m\geq i} X_m}\right),$$

pokud platí:
(1) (existence) Pro každé $\varepsilon > 0$ *existuje* k *takové že pro každé* $p \in X_k$ *má množina* $\bigcup_{j>k} f_{k,j}^{-1}(p)$ *diametr menší než* ε.
(2) (jednoznačnost) Pro každé i *a* $\delta > 0$ *existuje* $\delta' > 0$ *tak, že kdykoliv* $j > 1$ *a body* $p, q \in X_j$ *splňují* $d(f_{i,j}(p), f_{i,j}(q)) > \delta$, *vyplývá z toho, že* $d(p,q) > \delta'$.
Je-li navíc $X_i \subset X_{i+1}$, *pak*

$$\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$$

je homeomorfní s

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i}\,.$$

TVRZENÍ (Inverzní limita mnohostěnů)

Každé kontinuum je inverzní limitou kompaktních souvislých mnohostěnů, přičemž lepicí zobrazení jsou na.

TVRZENÍ (Inverzní limita mnohostěnů)

Každé kontinuum je inverzní limitou kompaktních souvislých mnohostěnů, přičemž lepicí zobrazení jsou na.

DEFINICE (ε-zobrazení)

Nechť X a Y jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá ε-zobrazení, když je f spojité a pro každé $x \in X$ je diametr $f^{-1}(f(x)) < \varepsilon$.

DEFINICE ($\mathcal{P}$-podobný)

Nechť je X kompaktní metrický prostor a nechť $\mathcal{P}$ je soubor kompaktních metrických prostorů. Říkáme, že X je $\mathcal{P}$-podobný, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-zobrazení prostoru X na nějaký prvek $Y_\varepsilon \in \mathcal{P}$.

DEFINICE (ε-zobrazení)

Nechť X a Y jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá ε-zobrazení, když je f spojité a pro každé $x \in X$ je diametr $f^{-1}(f(x)) < \varepsilon$.

DEFINICE ($\mathcal{P}$-podobný)

Nechť je X kompaktní metrický prostor a nechť $\mathcal{P}$ je soubor kompaktních metrických prostorů. Říkáme, že X je $\mathcal{P}$-podobný, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-zobrazení prostoru X na nějaký prvek $Y_\varepsilon \in \mathcal{P}$.

DEFINICE (ε-zobrazení)

Nechť X a Y jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá ε-zobrazení, když je f spojité a pro každé $x \in X$ je diametr $f^{-1}(f(x)) < \varepsilon$.

DEFINICE ($\mathcal{P}$-podobný)

Nechť je X kompaktní metrický prostor a nechť $\mathcal{P}$ je soubor kompaktních metrických prostorů. Říkáme, že X je $\mathcal{P}$-podobný, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-zobrazení prostoru X na nějaký prvek $Y_\varepsilon \in \mathcal{P}$.

Nejčastěji se zkoumají oblouku-podobná kontinua. To je vždy o zábavu postaráno.

TVRZENÍ (Aproximace zevnitř)

Nechť X *je kompaktní metrický prostor a* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost kompaktních podmnožin* X. *Dále nechť máme zobrazení* g_i *z* X_{i+1} *na* X_i *a* φ_i *z* X *na* X_i, *která splňují* $g_i \circ \varphi_{i+1} = \varphi_i$.
Jestliže posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k identitě na* X, *pak* X *je homeomorfní* $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

TVRZENÍ (Aproximace zevnitř)

Nechť X *je kompaktní metrický prostor a* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost kompaktních podmnožin* X*. Dále nechť máme zobrazení* g_i *z* X_{i+1} *na* X_i *a* φ_i *z* X *na* X_i*, která splňují* $g_i \circ \varphi_{i+1} = \varphi_i$*.*
Jestliže posloupnost $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně k identitě na* X*, pak* X *je homeomorfní* $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

TVRZENÍ (Vnoření limity, J.R.Isbell)

Nechť kompakty X_n jsou vnořeny do pevného $\mathbb{R}^m$. Pak $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vnořena do $\mathbb{R}^{2m}$.

TVRZENÍ (Vnoření limity, J.R.Isbell)

Nechť kompakty X_n jsou vnořeny do pevného $\mathbb{R}^m$. Pak $\lim_{\leftarrow}\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je vnořena do $\mathbb{R}^{2m}$.

DEFINICE (Dělení a identifikace)

Nechť (S, T) je topologický prostor. Nechť $\mathcal{D}$ je soubor neprázdných a navzájem disjunktních podmnožin S pokrývající S (t.j. $\cup\mathcal{D} = S$).
Soubor $\mathcal{D}$ budeme nazývat dělení S. Na $\mathcal{D}$ zavedeme topologii

$$T(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \cup\mathcal{U} \in T\}.$$

Jde o největší topologii, ve které je spojité zobrazení přiřazující bodu $s \in S$ ten prvek $\mathcal{D}$, ve kterém leží (toto zobrazení nazveme přirozené zobrazení, značíme π).
Dvojici $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ budeme nazývat identifikace S.

DEFINICE (Dělení a identifikace)

Nechť (S, T) je topologický prostor. Nechť $\mathcal{D}$ je soubor neprázdných a navzájem disjunktních podmnožin S pokrývající S (t.j. $\cup\mathcal{D} = S$).
Soubor $\mathcal{D}$ budeme nazývat dělení S. Na $\mathcal{D}$ zavedeme topologii

$$T(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{D} : \cup\mathcal{U} \in T\}.$$

Jde o největší topologii, ve které je spojité zobrazení přiřazující bodu $s \in S$ ten prvek $\mathcal{D}$, ve kterém leží (toto zobrazení nazveme přirozené zobrazení, značíme π).
Dvojici $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ budeme nazývat identifikace S.

DEFINICE (Shora polospojité dělení)

Dělení $\mathcal{D}$ nazveme shora polospojité, zkráceně usc, když pro každé $D \in \mathcal{D}$, $U \in T$ splňující $D \subset U$, existuje $V \in T$ splňující $D \subset V$, že platí

$$(A \in \mathcal{D} \quad \& \quad A \cap V \neq \emptyset) \Rightarrow \quad A \subset U\,.$$

Pozorování

1. Dělení je usc právě když je přirozené zobrazení uzavřené (obraz uzavřených množin je uzavřený).
2. Identifikace $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D})$ kontinua S je kontinuum právě když je Hausdorffovým prostorem.

DEFINICE (Shora polospojité dělení)

Dělení $\mathcal{D}$ nazveme shora polospojité, zkráceně usc, když pro každé $D \in \mathcal{D}$, $U \in T$ splňující $D \subset U$, existuje $V \in T$ splňující $D \subset V$, že platí

$$(A \in \mathcal{D} \quad \& \quad A \cap V \neq \emptyset) \Rightarrow \quad A \subset U\,.$$

Pozorování

1. Dělení je usc právě když je přirozené zobrazení uzavřené (obraz uzavřených množin je uzavřený).
2. Identifikace $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D})$ kontinua S je kontinuum právě když je Hausdorffovým prostorem.

DEFINICE (Shora polospojité dělení)

Dělení $\mathcal{D}$ nazveme shora polospojité, zkráceně usc, když pro každé $D \in \mathcal{D}$, $U \in T$ splňující $D \subset U$, existuje $V \in T$ splňující $D \subset V$, že platí

$$(A \in \mathcal{D} \quad \& \quad A \cap V \neq \emptyset) \Rightarrow \quad A \subset U\,.$$

Pozorování

1. Dělení je usc právě když je přirozené zobrazení uzavřené (obraz uzavřených množin je uzavřený).
2. Identifikace $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D})$ kontinua S je kontinuum právě když je Hausdorffovým prostorem.

TVRZENÍ (Usc identifikace kontinua)

1. *Každá usc identifikace kontinua je kontinuum.*
2. *Pokud identifikujeme body uzavřené podmnožiny A kontinua S, dostaneme usc dělení a následně kontinuum, značíme S/A.*

TVRZENÍ (Usc identifikace kontinua)

1. *Každá usc identifikace kontinua je kontinuum.*
2. *Pokud identifikujeme body uzavřené podmnožiny A kontinua S, dostaneme usc dělení a následně kontinuum, značíme S/A.*

TVRZENÍ (Spojení kontinuí)

Nechť (S_1, T_1) a (S_2, T_2) jsou disjunktní topologické prostory a spojité zobrazení $f : S_1 \to S_2$ zobrazuje neprázdnou množinu $A \subset S_1$ do S_2.
V topologickém součtu $S_1 + S_2$ identifikujeme podle dělení

$$\{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\} \cup \{\{x\} : x \in S_1 + S_2 \setminus [A \cup f(A)]\} \, .$$

Říkáme, že S_1 a S_2 jsou spojeny zobrazením f a píšeme $S_1 \cup_f S_2$. Jsou-li oba prostory kontinuum, je i jejich spojení kontinuum.

TVRZENÍ (Spojení kontinuí)

Nechť (S_1, T_1) *a* (S_2, T_2) *jsou disjunktní topologické prostory a spojité zobrazení* $f : S_1 \longrightarrow S_2$ *zobrazuje neprázdnou množinu* $A \subset S_1$ *do* S_2.
V topologickém součtu $S_1 + S_2$ *identifikujeme podle dělení*

$$\{\{p\} \cup f^{-1}(p) : p \in f(A)\} \cup \{\{x\} : x \in S_1 + S_2 \setminus [A \cup f(A)]\} .$$

Říkáme, že S_1 *a* S_2 *jsou spojeny zobrazením* f *a píšeme* $S_1 \cup_f S_2$. *Jsou-li oba prostory kontinuum, je i jejich spojení kontinuum.*

TVRZENÍ (Identifikace podle obrazu)

Nechť X je kompaktní a $f : X \to Y$ je spojité a na. Pak dělení $\mathcal{D} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ je usc dělení X, které je homeomorfní s Y. Naopak, každé usc dělení je spojitým obrazem.

TVRZENÍ (Identifikace podle obrazu)

Nechť X *je kompaktní a* $f : X \to Y$ *je spojité a na. Pak dělení* $\mathcal{D} = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ *je usc dělení* X*, které je homeomorfní s* Y*. Naopak, každé usc dělení je spojitým obrazem.*

DEFINICE (Hyperprostory)

Pro topologický prostor X označme

$$2^X = \{A : A \text{ je neprázdná uzavřená podmnožina } X\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ je souvislá } \} .$$

DEFINICE (Hyperprostory)

Pro topologický prostor X označme

$$2^X = \{A : A \text{ je neprázdná uzavřená podmnožina } X\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ je souvislá } \}.$$

DEFINICE (Hausdorffova metrika)

Pokud X je kompaktní metrický prostor s metrikou d, označme ε-ový stín mnonžiny $A \in 2^X$

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ pro nějaké } a \in A\} .$$

Pro dvě podmnožiny $A, B \in 2^X$ definujeme jejich vzdálenost

$$H_d(A, B) = \sup\{\varepsilon > 0 : A \in N_d(\varepsilon, B) \text{ a zároveň } B \in N_d(\varepsilon, A)\} .$$

Prostory 2^X a $C(X)$ nazýváme hyperprostory a metriku H^d Hausdorffovou metrikou.

DEFINICE (Hausdorffova metrika)

Pokud X je kompaktní metrický prostor s metrikou d, označme ε-ový stín mnonžiny $A \in 2^X$

$$N_d(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ pro nějaké } a \in A\} .$$

Pro dvě podmnožiny $A, B \in 2^X$ definujeme jejich vzdálenost

$$H_d(A, B) = \sup\{\varepsilon > 0 : A \in N_d(\varepsilon, B) \text{ a zároveň } B \in N_d(\varepsilon, A)\} .$$

Prostory 2^X a $C(X)$ nazýváme hyperprostory a metriku H^d Hausdorffovou metrikou.

Pozorování

Topologie na hyperprostorech závisí na topologii původního prostoru X, ne na konkrétní metrice X. Homeomorfní prostory mají homeomorfní hyperprostory.

Pozorování

Topologie na hyperprostorech závisí na topologii původního prostoru X, ne na konkrétní metrice X. Homeomorfní prostory mají homeomorfní hyperprostory.

Pozorování

Topologie na hyperprostorech závisí na topologii původního prostoru X, ne na konkrétní metrice X. Homeomorfní prostory mají homeomorfní hyperprostory.

DEFINICE (Lim inf, lim sup)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin S. Definujeme

$$\liminf A_n = \{x \in S : \text{ každé okolí } x \text{ protíná až na konečně mnoho množin všechny množiny } A_n\}$$

$$\limsup A_n = \{x \in S : \text{ každé okolí } x \text{ protíná nekonečně mnoho množin } A_n\} .$$

Řekneme, že $\lim A_n = A$, pokud $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Pozorování

Posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných kompaktních množin kompaktního prostoru X konverguje v hyperprostoru 2^X s Hausdorffovou metrikou H k množině A (t.j. $\lim H(A_n, A) = 0$), právě když $\lim A_n = A$. Píšeme to tedy jednotně $A_n \to A$.

DEFINICE (Lim inf, lim sup)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin S. Definujeme

$$\liminf A_n = \{x \in S : \text{ každé okolí } x \text{ protíná až na konečně mnoho množin všechny množiny } A_n\}$$

$$\limsup A_n = \{x \in S : \text{ každé okolí } x \text{ protíná nekonečně mnoho množin } A_n\} .$$

Řekneme, že $\lim A_n = A$, pokud $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Pozorování

Posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných kompaktních množin kompaktního prostoru X konverguje v hyperprostoru 2^X s Hausdorffovou metrikou H k množině A (t.j. $\lim H(A_n, A) = 0$), právě když $\lim A_n = A$. Píšeme to tedy jednotně $A_n \to A$.

DEFINICE (Lim inf, lim sup)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin S. Definujeme

$$\liminf A_n = \{x \in S : \text{ každé okolí } x \text{ protíná až na konečně mnoho množin všechny množiny } A_n\}$$

$$\limsup A_n = \{x \in S : \text{ každé okolí } x \text{ protíná nekonečně mnoho množin } A_n\} .$$

Řekneme, že $\lim A_n = A$, pokud $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Pozorování

Posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných kompaktních množin kompaktního prostoru X konverguje v hyperprostoru 2^X s Hausdorffovou metrikou H k množině A (t.j. $\lim H(A_n, A) = 0$), právě když $\lim A_n = A$. Píšeme to tedy jednotně $A_n \to A$.

TVRZENÍ (Vlastnosti hyperprostorů)

1. *Pro kompaktní metrický X jsou hyperprostory 2^X a $C(X)$ kompaktní.*
2. *V kompaktním metrickém prostoru každá posloupnost kontinuí má podposloupnost konvergující ke kontinuu, každá konvergentní posloupnot kontinuí má za limitu kontinuum.*
3. *Nechť X je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{F}$ neprázdná uzavřená podmnožina 2^X. Pak v $\mathcal{F}$ existuje maximální i minimální prvek $\mathcal{F}$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti hyperprostorů)

1. *Pro kompaktní metrický X jsou hyperprostory 2^X a $C(X)$ kompaktní.*
2. *V kompaktním metrickém prostoru každá posloupnost kontinuí má podposloupnost konvergující ke kontinuu, každá konvergentní posloupnot kontinuí má za limitu kontinuum.*
3. *Nechť X je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{F}$ neprázdná uzavřená podmnožina 2^X. Pak v $\mathcal{F}$ existuje maximální i minimální prvek $\mathcal{F}$.*

DEFINICE (Ireducibilní kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $A \subset X$. Kontinuum X se nazývá ireducibilní okolo A, pokud žádné vlastní subkontinuum X neobsahuje A.
Kontinuum X se nazývá ireducibilní, pokud je ireducibilní okolo dvouprvkové podmnožiny $\{p.q\}$, pak říkáme, že je ireducibilní mezi p a q.

Pozorování

Nechť A je uzavřená podmnožina kontinua X. Pak X obsahuje podkontinuum, které je ireducibilní okolo A. Tedy obsahuje podkontinuum ireducibilní mezi libovolnými dvěma body X.

DEFINICE (Ireducibilní kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $A \subset X$. Kontinuum X se nazývá ireducibilní okolo A, pokud žádné vlastní subkontinuum X neobsahuje A.
Kontinuum X se nazývá ireducibilní, pokud je ireducibilní okolo dvouprvkové podmnožiny $\{p.q\}$, pak říkáme, že je ireducibilní mezi p a q.

Pozorování

Nechť A je uzavřená podmnožina kontinua X. Pak X obsahuje podkontinuum, které je ireducibilní okolo A. Tedy obsahuje podkontinuum ireducibilní mezi libovolnými dvěma body X.

DEFINICE (Ireducibilní kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $A \subset X$. Kontinuum X se nazývá ireducibilní okolo A, pokud žádné vlastní subkontinuum X neobsahuje A.
Kontinuum X se nazývá ireducibilní, pokud je ireducibilní okolo dvouprvkové podmnožiny $\{p.q\}$, pak říkáme, že je ireducibilní mezi p a q.

Pozorování

Nechť A je uzavřená podmnožina kontinua X. Pak X obsahuje podkontinuum, které je ireducibilní okolo A. Tedy obsahuje podkontinuum ireducibilní mezi libovolnými dvěma body X.

TVRZENÍ (Řízni drát)

Nechť (X, d) *je kompaktní metrický prostor a* A, B *jsou uzavřené podmnožiny* X. *Jestliže zádná souvislá podmnožina* X *neprotíná zároveň* A *i* B, *Lze* X *napsat jako disjunktní sjednocení uzavřených množin* X_A *a* X_B *obsahujících* A *a* B.

TVRZENÍ (Řízni drát)

Nechť (X, d) *je kompaktní metrický prostor a* A, B *jsou uzavřené podmnožiny* X. *Jestliže zádná souvislá podmnožina* X *neprotíná zároveň* A *i* B, *Lze* X *napsat jako disjunktní sjednocení uzavřených množin* X_A *a* X_B *obsahujících* A *a* B.

TVRZENÍ (Bum do hranice)

Označme $\mathrm{Bd}_S(H)$ *hradici podmnožiny* H *prostoru* S*. Index* S *lze vynechat, pokud je jasné, o který prostor jde.*

1. *Nechť* X *je kontinuum,* U *je neprázdná otevřená vlastní podmnožina* X*. Pak každá komponenta* $\bar{U}$ *protíná hranici* U*.*
2. *Nechť* X *je kontinuum,* E *je neprázdná vlastní podmnožina* X*. Je-li* K *komponenta* E*, pak její uzávěr* $\bar{K}$ *protíná hranici* E*.*
3. *Je-li* E *otevřená, pak* $\bar{K}$ *protíná* E*.*
4. *Je-li* E *uzavřená, pak* K *protíná uzávěr* $\overline{X \setminus E}$*.*

TVRZENÍ (Bum do hranice)

Označme $\mathrm{Bd}_S(H)$ *hradici podmnožiny* H *prostoru* S*. Index* S *lze vynechat, pokud je jasné, o který prostor jde.*

1. *Nechť* X *je kontinuum,* U *je neprázdná otevřená vlastní podmnožina* X*. Pak každá komponenta* $\bar{U}$ *protíná hranici* U*.*
2. *Nechť* X *je kontinuum,* E *je neprázdná vlastní podmnožina* X*. Je-li* K *komponenta* E*, pak její uzávěr* $\bar{K}$ *protíná hranici* E*.*
3. *Je-li* E *otevřená, pak* $\bar{K}$ *protíná* E*.*
4. *Je-li* E *uzavřená, pak* K *protíná uzávěr* $\overline{X \setminus E}$*.*

Pozorování

1. Nechť X je kontinuum a $A \subset B$ jsou vlastní subkontinua X. Jestliže K je komponenta $X \setminus B$ splňující $(\bar{K} \setminus K) \subset A$, pak $K \cup A$ je kontinuum.
2. Nechť X je kontinuum a A je vlastní subkontinuum X. Jestliže K je komponenta $X \setminus A$, pak $K \cup A$ je kontinuum.

Pozorování

1. Nechť X je kontinuum a $A \subset B$ jsou vlastní subkontinua X. Jestliže K je komponenta $X \setminus B$ splňující $(\bar{K} \setminus K) \subset A$, pak $K \cup A$ je kontinuum.
2. Nechť X je kontinuum a A je vlastní subkontinuum X. Jestliže K je komponenta $X \setminus A$, pak $K \cup A$ je kontinuum.

Pozorování

1. Nechť X je kontinuum a $A \subset B$ jsou vlastní subkontinua X. Jestliže K je komponenta $X \setminus B$ splňující $(\bar{K} \setminus K) \subset A$, pak $K \cup A$ je kontinuum.
2. Nechť X je kontinuum a A je vlastní subkontinuum X. Jestliže K je komponenta $X \setminus A$, pak $K \cup A$ je kontinuum.

DEFINICE (Souvislost v malém)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $p \in S$. Říkáme, že S je cik v p (zkratka jazykové hračky 'Connected Im Kleinen'), jestliže každé okolí bodu p obsahuje souvislé okolí p (zde okolím chápeme množinu, která obsahuje otevřené okolí).

DEFINICE (Kontinuum konvergence)

Nechť S je topologický prostor a $A \subset S$ nedegenerované subkontinuum. Říkáme, že A je je kontinuum konvergence, když existuje posloupnost subkontinuí $A_n \subset S$ disjunktních s A, která konvergují k A. V kompaktním prostoru S lze brát A_n navzájem disjunktní.

TVRZENÍ (Kontinuum konvergence)

Nechť X je kontinuum a N je množina bodů X, ve kterých X není cik. Nechť $p \in N$, pak existuje (nedegenerované) kontinuum konvergence K v prostoru X, které obsahuje p a leží v N.

DEFINICE (Souvislost v malém)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $p \in S$. Říkáme, že S je cik v p (zkratka jazykové hračky 'Connected Im Kleinen'), jestliže každé okolí bodu p obsahuje souvislé okolí p (zde okolím chápeme množinu, která obsahuje otevřené okolí).

DEFINICE (Kontinuum konvergence)

Nechť S je topologický prostor a $A \subset S$ nedegenerované subkontinuum. Říkáme, že A je je kontinuum konvergence, když existuje posloupnost subkontinuí $A_n \subset S$ disjunktních s A, která konvergují k A. V kompaktním prostoru S lze brát A_n navzájem disjunktní.

TVRZENÍ (Kontinuum konvergence)

Nechť X je kontinuum a N je množina bodů X, ve kterých X není cik. Nechť $p \in N$, pak existuje (nedegenerované) kontinuum konvergence K v prostoru X, které obsahuje p a leží v N.

DEFINICE (σ-souvislost)

Nechť (S, T) je topologický prostor. Řekneme, že je σ-souvislý, pokud nelze napsat jako spočetné sjednocení disjunktních neprázdných uzavřených podmnožin.

TVRZENÍ (σ-souvislost kontinua)

Kontinuum je σ-souvislé.

DEFINICE (σ-souvislost)

Nechť (S, T) je topologický prostor. Řekneme, že je σ-souvislý, pokud nelze napsat jako spočetné sjednocení disjunktních neprázdných uzavřených podmnožin.

TVRZENÍ (σ-souvislost kontinua)

Kontinuum je σ-souvislé.

DEFINICE (Kompozanta)

Pro nedegenerované kontinuum X a bod $p \in X$ označme

$$k = \{x \in X : \text{ existuje vlastní subkontinuum } A \subset X \text{ obsahující oba body } p, x\},$$

této množině říkáme kompozanta bodu p v X.

DEFINICE (Oddělování)

Mějme topologický prostor X a jeho podmnožiny A, B, C. Říkáme, že C odděluje A a B, jestliže $X \setminus C$ není souvislý mezi A a B.

DEFINICE (Kompozanta)

Pro nedegenerované kontinuum X a bod $p \in X$ označme

$$k = \{x \in X : \text{ existuje vlastní subkontinuum } A \subset X \text{ obsahující oba body } p, x\} ,$$

této množině říkáme kompozanta bodu p v X.

DEFINICE (Oddělování)

Mějme topologický prostor X a jeho podmnožiny A, B, C. Říkáme, že C odděluje A a B, jestliže $X \setminus C$ není souvislý mezi A a B.

DEFINICE (Kat a ne-kat)

Nechť (S, T) je topologický prostor, $p \in S$. Řekneme, že je p kat, pokud $S \setminus \{p\}$ je nesouvislý. Pokud $S \setminus \{p\}$ je souvislý, říkáme bodu p ne-kat.
Lze-li topologický prostor X psát jako disjunktní sjednocení neprázdných otevřených množin A a B, píšeme tenro fakt $X = A|B$. Části A a B jsou pak navzájem oddělené v X.

Pozorování

Nechť (S, T) je souvislý topologický prostor a C je souvislá podmnožina a platí $S \setminus C = A|B$. Pak $A \cup C$ i $B \cup C$ jsou souvislé. Pokud S i C jsou kontinua, pak i $A \cup C$ a $B \cup C$ jsou kontinua.

DEFINICE (Kat a ne-kat)

Nechť (S, T) je topologický prostor, $p \in S$. Řekneme, že je p kat, pokud $S \setminus \{p\}$ je nesouvislý. Pokud $S \setminus \{p\}$ je souvislý, říkáme bodu p ne-kat.
Lze-li topologický prostor X psát jako disjunktní sjednocení neprázdných otevřených množin A a B, píšeme tenro fakt $X = A|B$. Části A a B jsou pak navzájem oddělené v X.

Pozorování

Nechť (S, T) je souvislý topologický prostor a C je souvislá podmnožina a platí $S \setminus C = A|B$. Pak $A \cup C$ i $B \cup C$ jsou souvislé. Pokud S i C jsou kontinua, pak i $A \cup C$ a $B \cup C$ jsou kontinua.

DEFINICE (Kat a ne-kat)

Nechť (S, T) je topologický prostor, $p \in S$. Řekneme, že je p kat, pokud $S \setminus \{p\}$ je nesouvislý. Pokud $S \setminus \{p\}$ je souvislý, říkáme bodu p ne-kat.
Lze-li topologický prostor X psát jako disjunktní sjednocení neprázdných otevřených množin A a B, píšeme tenro fakt $X = A|B$. Části A a B jsou pak navzájem oddělené v X.

Pozorování

Nechť (S, T) je souvislý topologický prostor a C je souvislá podmnožina a platí $S \setminus C = A|B$. Pak $A \cup C$ i $B \cup C$ jsou souvislé. Pokud S i C jsou kontinua, pak i $A \cup C$ a $B \cup C$ jsou kontinua.

TVRZENÍ (Existence ne-kat bodů)

Nechť (S, T) je nedegenerované T_1-kontinuum a c je kat S, $S \setminus \{c\} = A|B$. Pak existuje v A i B ne-kat bod.

Pozorování

Kontinuum je ireducibilní okolo svých ne-kat bodů.

TVRZENÍ (Existence ne-kat bodů)

Nechť (S, T) *je nedegenerované* T_1*-kontinuum a* c *je kat* S, $S \setminus \{c\} = A|B$. *Pak existuje v* A *i* B *ne-kat bod.*

Pozorování

Kontinuum je ireducibilní okolo svých ne-kat bodů.

TVRZENÍ (Existence ne-kat bodů)

Nechť (S, T) *je nedegenerované* T_1*-kontinuum a* c *je kat* S, $S \setminus \{c\} = A|B$. *Pak existuje v* A *i* B *ne-kat bod.*

Pozorování

Kontinuum je ireducibilní okolo svých ne-kat bodů.

TVRZENÍ (Existence ne-kat bodů)

Nechť X je kontinuum, A je vlastní subkontinuum X a K komponenta $X \setminus A$. Pak existuje ne-kat bod p množiny $K \cup A$ ležící v K, je pak i ne-kat bodem X.

TVRZENÍ (Oblouk má dva ne-kat body)

Kontinuum X je oblouk právě když má právě dva ne-kat body.

TVRZENÍ (Nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum je nerozložitelné právě když každé jeho vlastní subkontinuum je řídké (nikde není husté).

TVRZENÍ (Existence ne-kat bodů)

Nechť X je kontinuum, A je vlastní subkontinuum X a K komponenta $X \setminus A$. Pak existuje ne-kat bod p množiny $K \cup A$ ležící v K, je pak i ne-kat bodem X.

TVRZENÍ (Oblouk má dva ne-kat body)

Kontinuum X je oblouk právě když má právě dva ne-kat body.

TVRZENÍ (Nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum je nerozložitelné právě když každé jeho vlastní subkontinuum je řídké (nikde není husté).

DEFINICE (Usc zobrazení)

Nechť X, T_1 a Y, T_2 jsou topologické prostory. Zobrazení $F : X \to 2^Y$ se nazývá shora polospojité (usc) v bodě $p \in X$, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \in T_2$ obsahující $F(p)$ existuje otevřená množina $V \in T_1$ obsahující p tak, že pro každé $x \in V$ je $F(x) \subset U$.
Zobrazení je usc, když je usc v každém bodě.

TVRZENÍ (Obecná věta o zobrazení)

Nechť X a Y jsou neprázdné kompaktní metrické prostory. Nechť platí

1. $F_n : X \to 2^Y$ *jsou usc pro* $n \in \mathbb{N}$
2. $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$ *pro* $x \in X$ *a* $n \in \mathbb{N}$
3. $Y = \cup_{x \in X} F_n(x)$
4. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n(x)) = O$ *pro* $x \in X$

Pak existuje spojité zobrazení $f : X \to Y$, které je na.
Lze definovat

$$x \mapsto \cap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

pro $x \in X$.

DEFINICE (Usc zobrazení)

Nechť X, T_1 a Y, T_2 jsou topologické prostory. Zobrazení $F : X \to 2^Y$ se nazývá shora polospojité (usc) v bodě $p \in X$, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \in T_2$ obsahující $F(p)$ existuje otevřená množina $V \in T_1$ obsahující p tak, že pro každé $x \in V$ je $F(x) \subset U$.
Zobrazení je usc, když je usc v každém bodě.

TVRZENÍ (Obecná věta o zobrazení)

Nechť X a Y jsou neprázdné kompaktní metrické prostory. Nechť platí

1. $F_n : X \to 2^Y$ *jsou usc pro* $n \in \mathbb{N}$
2. $F_n(x) \supset F_{n+1}(x)$ *pro* $x \in X$ *a* $n \in \mathbb{N}$
3. $Y = \cup_{x \in X} F_n(x)$
4. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n(x)) = O$ *pro* $x \in X$

Pak existuje spojité zobrazení $f : X \to Y$, které je na.
Lze definovat

$$x \mapsto \cap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$$

pro $x \in X$.

TVRZENÍ (Obraz Cantorova diskontinua)

Každý neprázdný kompaktní metrický prostor je spojitým obrazem Cantorova diskontinua.

TVRZENÍ (Obraz Cantorova diskontinua)

Každý neprázdný kompaktní metrický prostor je spojitým obrazem Cantorova diskontinua.

TVRZENÍ (Charakterizace Cantorova diskontinua)

Metrický prostor je Cantorovo diskontinuum právě když je kompaktní, totálně nesouvislý (jednobodové komponenty) a perfektní (každý bod je limitní).

TVRZENÍ (Homogenita Cantorova diskontinua)

Cantorovo diskontinuum je homogenní.

TVRZENÍ (Charakterizace Cantorova diskontinua)

Metrický prostor je Cantorovo diskontinuum právě když je kompaktní, totálně nesouvislý (jednobodové komponenty) a perfektní (každý bod je limitní).

TVRZENÍ (Homogenita Cantorova diskontinua)

Cantorovo diskontinuum je homogenní.

DEFINICE (Peanovo kontinuum)

Metrický prostor X se nazývá Peanův prostor, pokud pro každý bod $p \in X$ a každé okolí N existuje otevřená množina U prostoru X splňující $p \in U \subset N$. Je-li X navíc kontinuum, říkáme Peanovo kontinuum.

DEFINICE (Peanovo kontinuum)

Metrický prostor X se nazývá Peanův prostor, pokud pro každý bod $p \in X$ a každé okolí N existuje otevřená množina U prostoru X splňující $p \in U \subset N$. Je-li X navíc kontinuum, římáme Peanovo kontinuum.

Pozorování

1. Metrický prostor X je Peanův prostor právě když pro každé $\varepsilon > 0$ jde prostor X napsat jako sjednocení konečně mnoha souvislých množin, jejichž diametr je menší než ε.
2. Kontinuum X je Peanův prostor právě když pro každé $\varepsilon > 0$ jde prostor X napsat jako sjednocení konečně mnoha kontinuí, jejichž diametr je menší než ε.
3. Peanovo kontinuum lze napsat pro každé $\varepsilon > 0$ jako sjednocení konečně mnoha Peanových kontinuí, jejichž diametr je menší než ε.

Pozorování

1. Metrický prostor X je Peanův prostor právě když pro každé $\varepsilon > 0$ jde prostor X napsat jako sjednocení konečně mnoha souvislých množin, jejichž diametr je menší než ε.
2. Kontinuum X je Peanův prostor právě když pro každé $\varepsilon > 0$ jde prostor X napsat jako sjednocení konečně mnoha kontinuí, jejichž diametr je menší než ε.
3. Peanovo kontinuum lze napsat pro každé $\varepsilon > 0$ jako sjednocení konečně mnoha Peanových kontinuí, jejichž diametr je menší než ε.

Pozorování

1. Metrický prostor X je Peanův prostor právě když pro každé $\varepsilon > 0$ jde prostor X napsat jako sjednocení konečně mnoha souvislých množin, jejichž diametr je menší než ε.
2. Kontinuum X je Peanův prostor právě když pro každé $\varepsilon > 0$ jde prostor X napsat jako sjednocení konečně mnoha kontinuí, jejichž diametr je menší než ε.
3. Peanovo kontinuum lze napsat pro každé $\varepsilon > 0$ jako sjednocení konečně mnoha Peanových kontinuí, jejichž diametr je menší než ε.

DEFINICE (Slabý řetěz)

Indexovaný soubor množin $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ nazveme slabý řetěz, pokud se protínají sousední prvky L_i a L_{i+1} ($i = 1, \ldots, n-1$). Prvky tohoto souboru nazveme články (řetězu). Říkáme, že jde o řetěz od L_1 do L_n, případně od x do y, pokud $x \in L_1$ a $y \in L_n$.

Pozorování

Pokrytí souvislého topologického prostoru konečným souborem uzavřených množin lze přeindexovat tak, že jde o slabý řetěz.

DEFINICE (Slabý řetěz)

Indexovaný soubor množin $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ nazveme slabý řetěz, pokud se protínají sousední prvky L_i a L_{i+1} ($i = 1, \ldots, n-1$). Prvky tohoto souboru nazveme články (řetězu). Říkáme, že jde o řetěz od L_1 do L_n, případně od x do y, pokud $x \in L_1$ a $y \in L_n$.

Pozorování

Pokrytí souvislého topologického prostoru konečným souborem uzavřených množin lze přeindexovat tak, že jde o slabý řetěz.

DEFINICE (Slabý řetěz)

Indexovaný soubor množin $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ nazveme slabý řetěz, pokud se protínají sousední prvky L_i a L_{i+1} ($i = 1, \ldots, n-1$). Prvky tohoto souboru nazveme články (řetězu). Říkáme, že jde o řetěz od L_1 do L_n, případně od x do y, pokud $x \in L_1$ a $y \in L_n$.

Pozorování

Pokrytí souvislého topologického prostoru konečným souborem uzavřených množin lze přeindexovat tak, že jde o slabý řetěz.

TVRZENÍ (Peanovo kontinuum lze nakreslit, Hahn-Mazurkiewicz)

1. *Každé Peanovo kontinuum je spojitým obrazem intervalu* $[0,1]$.
2. *Hausdorffovo kontinuum je Peanovo kontinuum právě když je spojitým obrazem intervalu* $[0,1]$.
3. *Každý spojitý Hausdorffův obraz Peanova kontinua je Peanovo kontinuum.*
4. *Každá dvě Peanova kontinua jsou spojitým obrazem navzájem.*
5. *Každé Peanovo kontinuum je (lokálně) obloukově souvislé.*

TVRZENÍ (Peanovo kontinuum lze nakreslit, Hahn-Mazurkiewicz)

1. *Každé Peanovo kontinuum je spojitým obrazem intervalu* $[0,1]$.
2. *Hausdorffovo kontinuum je Peanovo kontinuum právě když je spojitým obrazem intervalu* $[0,1]$.
3. *Každý spojitý Hausdorffův obraz Peanova kontinua je Peanovo kontinuum.*
4. *Každá dvě Peanova kontinua jsou spojitým obrazem navzájem.*
5. *Každé Peanovo kontinuum je (lokálně) obloukově souvislé.*

DEFINICE (Monotónní zobrazení)

Zobrazení mezi dvěma topologickými prostory se nazývá monotónní, pokud jsou vzory jednobodových množin souvislé.

Pozorování

Nedegenerovaný Hausdorfův monotónní obraz intervalu $[0, 1]$ je oblouk.

DEFINICE (Monotónní zobrazení)

Zobrazení mezi dvěma topologickými prostory se nazývá monotónní, pokud jsou vzory jednobodových množin souvislé.

Pozorování

Nedegenerovaný Hausdorfův monotónní obraz intervalu $[0, 1]$ je oblouk.

DEFINICE (Monotónní zobrazení)

Zobrazení mezi dvěma topologickými prostory se nazývá monotónní, pokud jsou vzory jednobodových množin souvislé.

Pozorování

Nedegenerovaný Hausdorfův monotónní obraz intervalu $[0, 1]$ je oblouk.

DEFINICE (Lokální oblouková souvislost)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $p \in S$. Říkáme, že S je lokálně obloukově souvislé v p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje obloukově souvislé okolí p. S je lokálně obloukově souvislý, jestliže je lokálně obloukově souvislý v každém bodě.

Pozorování

1. Každá otevřená podmnožina Peanova kontinua je lokálně obloukově souvislá.
2. Souvislá otevřená podmnožina Peanova kontinua je obloukově souvislá.
3. Každý separabilní lokálně kompaktní souvislý Peanův prostor je obloukově souvislý.

DEFINICE (Lokální oblouková souvislost)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $p \in S$. Říkáme, že S je lokálně obloukově souvislé v p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje obloukově souvislé okolí p. S je lokálně obloukově souvislý, jestliže je lokálně obloukově souvislý v každém bodě.

Pozorování

1. Každá otevřená podmnožina Peanova kontinua je lokálně obloukově souvislá.
2. Souvislá otevřená podmnožina Peanova kontinua je obloukově souvislá.
3. Každý separabilní lokálně kompaktní souvislý Peanův prostor je obloukově souvislý.

DEFINICE (Lokální oblouková souvislost)

Nechť (S, T) je topologický prostor a $p \in S$. Říkáme, že S je lokálně obloukově souvislé v p, jestliže každé okolí bodu p obsahuje obloukově souvislé okolí p. S je lokálně obloukově souvislý, jestliže je lokálně obloukově souvislý v každém bodě.

Pozorování

1. Každá otevřená podmnožina Peanova kontinua je lokálně obloukově souvislá.
2. Souvislá otevřená podmnožina Peanova kontinua je obloukově souvislá.
3. Každý separabilní lokálně kompaktní souvislý Peanův prostor je obloukově souvislý.

DEFINICE (Graf, strom)

Kontinuum se nazývá graf, pokud lze napsat jako sjednocení konečně mnoha oblouků, které jsou buď disjunktní, nebo se protínají v jednom nebo dvou jejich koncových bodech. Graf, který neobsahuje jednoduchou uzavřenou křivku se nazývá strom.

Pozorování

Sjednocení dvou protínajících se grafů je graf.

DEFINICE (Graf, strom)

Kontinuum se nazývá graf, pokud lze napsat jako sjednocení konečně mnoha oblouků, které jsou buď disjunktní, nebo se protínají v jednom nebo dvou jejich koncových bodech. Graf, který neobsahuje jednoduchou uzavřenou křivku se nazývá strom.

Pozorování

Sjednocení dvou protínajících se grafů je graf.

DEFINICE (Graf, strom)

Kontinuum se nazývá graf, pokud lze napsat jako sjednocení konečně mnoha oblouků, které jsou buď disjunktní, nebo se protínají v jednom nebo dvou jejich koncových bodech. Graf, který neobsahuje jednoduchou uzavřenou křivku se nazývá strom.

Pozorování

Sjednocení dvou protínajících se grafů je graf.

DEFINICE (Řád bodu)

Nechť (S, T) je topologický prostor, $A \subset X$ a β je kardinální číslo. Říkáme, že řád množiny A v X je nanejvýš roven β, když pro každou $U \in T$, $A \subset U$ existuje $V \in T$ tak, že $A \subset V \subset U$ a $|\mathrm{Bd}(V)| \leq \beta$.
Píšeme $\mathrm{ord}(A, X) \leq \beta$.
Říkáme, že řád množiny A v X je roven β, když $\mathrm{ord}(A, X) \leq \beta$ a neplatí $\mathrm{ord}(A, X) \leq \alpha$ pro $\alpha < \beta$.
Píšeme $\mathrm{ord}(A, X) = \beta$.
Pro jednobodovou množinu $A = \{p\}$ píšeme jednoduše $\mathrm{ord}(p, X)$ a mluvíme o řádu bodu p v X.

DEFINICE (Řád bodu)

Nechť (S, T) je topologický prostor, $A \subset X$ a β je kardinální číslo. Říkáme, že řád množiny A v X je nanejvýš roven β, když pro každou $U \in T$, $A \subset U$ existuje $V \in T$ tak, že $A \subset V \subset U$ a $|\mathrm{Bd}(V)| \leq \beta$.
Píšeme $\mathrm{ord}(A, X) \leq \beta$.
Říkáme, že řád množiny A v X je roven β, když $\mathrm{ord}(A, X) \leq \beta$ a neplatí $\mathrm{ord}(A, X) \leq \alpha$ pro $\alpha < \beta$.
Píšeme $\mathrm{ord}(A, X) = \beta$.
Pro jednobodovou množinu $A = \{p\}$ píšeme jednoduše $\mathrm{ord}(p, X)$ a mluvíme o řádu bodu p v X.

DEFINICE (Jednoduchá n-oda)

Kontinuum je jednoduchá n-oda, když má právě jeden bod řádu $n \in \mathbb{N}$. Tomu bodu říkáme vrchol.

DEFINICE (Jednoduchá n-oda)

Kontinuum je jednoduchá n-oda, když má právě jeden bod řádu $n \in \mathbb{N}$. Tomu bodu říkáme vrchol.

Pozorování

1. Jestliže v kontinuu jsou všechny body konečného řádu, je každé subkontinuum Peanovo.
2. Kontinuum s body řádu nejvýše (právě) 2 je oblouk nebo kružnice (kružnice).
3. Kužel nad n-prvkovou množinou je jednoduchá n-oda.
4. Kontinuum je graf právě když má všechny body konečného řádu a přitom jenom konečně mnoho z nich má řád větší než 2.
5. Kontinuum je graf právě když řád každého subkontinua je konečný.
6. Kontinuum je graf právě když každé subkontinuum má konečně mnoho koncových bodů.

Pozorování

1. Jestliže v kontinuu jsou všechny body konečného řádu, je každé subkontinuum Peanovo.
2. Kontinuum s body řádu nejvýše (právě) 2 je oblouk nebo kružnice (kružnice).
3. Kužel nad n-prvkovou množinou je jednoduchá n-oda.
4. Kontinuum je graf právě když má všechny body konečného řádu a přitom jenom konečně mnoho z nich má řád větší než 2.
5. Kontinuum je graf právě když řád každého subkontinua je konečný.
6. Kontinuum je graf právě když každé subkontinuum má konečně mnoho koncových bodů.

Pozorování

1. Jestliže v kontinuu jsou všechny body konečného řádu, je každé subkontinuum Peanovo.
2. Kontinuum s body řádu nejvýše (právě) 2 je oblouk nebo kružnice (kružnice).
3. Kužel nad n-prvkovou množinou je jednoduchá n-oda.
4. Kontinuum je graf právě když má všechny body konečného řádu a přitom jenom konečně mnoho z nich má řád větší než 2.
5. Kontinuum je graf právě když řád každého subkontinua je konečný.
6. Kontinuum je graf právě když každé subkontinuum má konečně mnoho koncových bodů.

DEFINICE (Číslo nesouvislosti)

Nechť X je souvislý prostor. Kardinální číslo $n \leq \aleph_0$ se nazývá číslo nesouvislosti pro X, když $X \setminus A$ je nesouvislá pro každou $A \subset X$, $|A| = n$. Píšeme $D(X) \leq \aleph_0$, když existuje číslo nesouvislosti pro X, pak označíme $D^s(X)$ nejmenší čílo nesouvislosti.

Pozorování

1. Je-li $D(X) \leq \aleph_0$, je X Peanovo kontinuum a každé subkontinuum obsahuje konečně mnoho koncových bodů.
2. Nechť X je nedegenerované kontinuum. Pak X je graf právě tehdy, když $D(X) \leq \aleph_0$, to nastane právě když $D^s(X) < \aleph_0$.

DEFINICE (Číslo nesouvislosti)

Nechť X je souvislý prostor. Kardinální číslo $n \leq \aleph_0$ se nazývá číslo nesouvislosti pro X, když $X \setminus A$ je nesouvislá pro každou $A \subset X$, $|A| = n$. Píšeme $D(X) \leq \aleph_0$, když existuje číslo nesouvislosti pro X, pak označíme $D^s(X)$ nejmenší čílo nesouvislosti.

Pozorování

1. Je-li $D(X) \leq \aleph_0$, je X Peanovo kontinuum a každé subkontinuum obsahuje konečně mnoho koncových bodů.
2. Nechť X je nedegenerované kontinuum. Pak X je graf právě tehdy, když $D(X) \leq \aleph_0$, to nastane právě když $D^s(X) < \aleph_0$.

DEFINICE (Číslo nesouvislosti)

Nechť X je souvislý prostor. Kardinální číslo $n \leq \aleph_0$ se nazývá číslo nesouvislosti pro X, když $X \setminus A$ je nesouvislá pro každou $A \subset X$, $|A| = n$. Píšeme $D(X) \leq \aleph_0$, když existuje číslo nesouvislosti pro X, pak označíme $D^s(X)$ nejmenší čílo nesouvislosti.

Pozorování

1. Je-li $D(X) \leq \aleph_0$, je X Peanovo kontinuum a každé subkontinuum obsahuje konečně mnoho koncových bodů.
2. Nechť X je nedegenerované kontinuum. Pak X je graf právě tehdy, když $D(X) \leq \aleph_0$, to nastane právě když $D^s(X) < \aleph_0$.

Pozorování

1. Kontinuum je strom právě když má konečně mnoho ne-kat bodů.
2. Kontinuum je oblouk právě když má právě dva ne-kat body.
3. Kontinuum je jednoduchá uzavřená křivka právě když se stane nesouvislé odstraněním libovolných dvou bodů (tedy $D^s(X) = 2$).
4. Nechť X je kontinuum. Pak $D^s(X) = 3$ právě když je homeomorfní s číslicí 6, 8, písmenem Θ nebo s dvěma šestkami spojenými koncovým bodem.

Pozorování

1. Kontinuum je strom právě když má konečně mnoho ne-kat bodů.
2. Kontinuum je oblouk právě když má právě dva ne-kat body.
3. Kontinuum je jednoduchá uzavřená křivka právě když se stane nesouvislé odstraněním libovolných dvou bodů (tedy $D^s(X) = 2$).
4. Nechť X je kontinuum. Pak $D^s(X) = 3$ právě když je homeomorfní s číslicí 6, 8, písmenem Θ nebo s dvěma šestkami spojenými koncovým bodem.

Pozorování

1. Kontinuum je strom právě když má konečně mnoho ne-kat bodů.
2. Kontinuum je oblouk právě když má právě dva ne-kat body.
3. Kontinuum je jednoduchá uzavřená křivka právě když se stane nesouvislé odstraněním libovolných dvou bodů (tedy $D^s(X) = 2$).
4. Nechť X je kontinuum. Pak $D^s(X) = 3$ právě když je homeomorfní s číslicí 6, 8, písmenem Θ nebo s dvěma šestkami spojenými koncovým bodem.

TVRZENÍ (Počítání komponent)

1. *Nechť je X nedegenerovaný graf. Pak*

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + |E(X)| .$$

Zde $\chi(X)$ je Eulerova charakteristika a $E(X)$ je množina koncových bodů.

2. *Nechť je X nedegenerovaný rovinný graf. Pak*

$$D^s(X) = R(X, \mathbb{R}^2) + |E(X)| .$$

Zde $R(X, \mathbb{R}^2)$ je počet komponent $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

TVRZENÍ (Počítání komponent)

1. *Nechť je X nedegenerovaný graf. Pak*

$$D^s(X) = 2 - \chi(X) + |E(X)| \,.$$

Zde $\chi(X)$ je Eulerova charakteristika a $E(X)$ je množina koncových bodů.

2. *Nechť je X nedegenerovaný rovinný graf. Pak*

$$D^s(X) = R(X, \mathbb{R}^2) + |E(X)| \,.$$

Zde $R(X, \mathbb{R}^2)$ je počet komponent $\mathbb{R}^2 \setminus X$.

DEFINICE (Dendrit)

Peanovo kontinuum, které neobsahuje jednoduchou uzavřenou křivku se nazývá dendrit.

DEFINICE (Dědičně lokálně souvislé kontinuum)

Kontinuum X je dědičně lokálně souvislé, když je jeho každé subkontinuum Peanovo kontinuum.

DEFINICE (Dendrit)

Peanovo kontinuum, které neobsahuje jednoduchou uzavřenou křivku se nazývá dendrit.

DEFINICE (Dědičně lokálně souvislé kontinuum)

Kontinuum X je dědičně lokálně souvislé, když je jeho každé subkontinuum Peanovo kontinuum.

Pozorování

1. Kontinuum X je dendrit právě když každé dva body jsou odděleny nějakým bodem $p \in X$.
2. Kontinuum je dědičně lokálně souvislé právě když neobsahuje kontinuum konvergence.
3. Každý dendrit je dědičně lokálně souvislý.
4. Každé subkontinuum dendritu je dendrit.
5. Nedegenerované kontinuum je dendrit právě když je každý bod kat nebo koncový bod.
6. Kontinuum X je dendrit právě když každé nedegenerované subkontinuum obsahuje nespočetně mnoho kat bodů X.
7. Každá souvislá podmnožina dendritu je obloukově souvislá.
8. Kontinuum X je dendrit právě když průnik každých dvou souvislých podmnožin X je souvislý.

Pozorování

1. Kontinuum X je dendrit právě když každé dva body jsou odděleny nějakým bodem $p \in X$.
2. Kontinuum je dědičně lokálně souvislé právě když neobsahuje kontinuum konvergence.
3. Každý dendrit je dědičně lokálně souvislý.
4. Každé subkontinuum dendritu je dendrit.
5. Nedegenerované kontinuum je dendrit právě když je každý bod kat nebo koncový bod.
6. Kontinuum X je dendrit právě když každé nedegenerované subkontinuum obsahuje nespočetně mnoho kat bodů X.
7. Každá souvislá podmnožina dendritu je obloukově souvislá.
8. Kontinuum X je dendrit právě když průnik každých dvou souvislých podmnožin X je souvislý.

Pozorování

1. Kontinuum X je dendrit právě když každé dva body jsou odděleny nějakým bodem $p \in X$.
2. Kontinuum je dědičně lokálně souvislé právě když neobsahuje kontinuum konvergence.
3. Každý dendrit je dědičně lokálně souvislý.
4. Každé subkontinuum dendritu je dendrit.
5. Nedegenerované kontinuum je dendrit právě když je každý bod kat nebo koncový bod.
6. Kontinuum X je dendrit právě když každé nedegenerované subkontinuum obsahuje nespočetně mnoho kat bodů X.
7. Každá souvislá podmnožina dendritu je obloukově souvislá.
8. Kontinuum X je dendrit právě když průnik každých dvou souvislých podmnožin X je souvislý.

DEFINICE (Komponentní číslo)

Nechť S je souvislý prostor a $p \in S$. Počet komponent $S \setminus \{p\}$ nazýváme komponentní číslo p v S, značíme $\mathrm{comp}(p, S)$.

Pozorování

Nedegenerované kontinuum X je dendrit právě když $\mathrm{comp}(p, X) = \mathrm{ord}(p, X)$ kdykoliv jedno je konečné.

DEFINICE (Komponentní číslo)

Nechť S je souvislý prostor a $p \in S$. Počet komponent $S \setminus \{p\}$ nazýváme komponentní číslo p v S, značíme $\mathrm{comp}(p, S)$.

Pozorování

Nedegenerované kontinuum X je dendrit právě když $\mathrm{comp}(p, X) = \mathrm{ord}(p, X)$ kdykoliv jedno je konečné.

DEFINICE (Komponentní číslo)

Nechť S je souvislý prostor a $p \in S$. Počet komponent $S \setminus \{p\}$ nazýváme komponentní číslo p v S, značíme $\mathrm{comp}(p, S)$.

Pozorování

Nedegenerované kontinuum X je dendrit právě když $\mathrm{comp}(p, X) = \mathrm{ord}(p, X)$ kdykoliv jedno je konečné.

DEFINICE (Racionální kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Kontinuum je racionální v p, když má p bázi okolí s hranicí složenou z nejvýše spočetně mnoha bodů. Kontinuum je racionální, když je racionální ve všech bodech.

DEFINICE (Regulální kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Kontinuum je regulární v p, když má p bázi okolí s hranicí složenou z konečně mnoha bodů. Kontinuum je regulární, když je regulární ve všech bodech.

Pozorování

1. Regulární kontinuum je dědičně lokálně souvislé.
2. Kontinuum X je regulární právě když každé dva body jsou v X odděleny konečnou množinou.
3. Každý dendrit je regulární.

DEFINICE (Racionální kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Kontinuum je racionální v p, když má p bázi okolí s hranicí složenou z nejvýše spočetně mnoha bodů. Kontinuum je racionální, když je racionální ve všech bodech.

DEFINICE (Regulální kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Kontinuum je regulární v p, když má p bázi okolí s hranicí složenou z konečně mnoha bodů. Kontinuum je regulární, když je regulární ve všech bodech.

Pozorování

1. Regulární kontinuum je dědičně lokálně souvislé.
2. Kontinuum X je regulární právě když každé dva body jsou v X odděleny konečnou množinou.
3. Každý dendrit je regulární.

DEFINICE (Racionální kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Kontinuum je racionální v p, když má p bázi okolí s hranicí složenou z nejvýše spočetně mnoha bodů. Kontinuum je racionální, když je racionální ve všech bodech.

DEFINICE (Regulální kontinuum)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Kontinuum je regulární v p, když má p bázi okolí s hranicí složenou z konečně mnoha bodů. Kontinuum je regulární, když je regulární ve všech bodech.

Pozorování

1. Regulární kontinuum je dědičně lokálně souvislé.
2. Kontinuum X je regulární právě když každé dva body jsou v X odděleny konečnou množinou.
3. Každý dendrit je regulární.

DEFINICE (Větvící bod)

Bod b v dendritu X se nazývá větvící bod, když $\operatorname{ord}(b, X) > 2$.

Pozorování

1. Množina větvících bodů v dendritu je nejvýše spočetná.
2. Každý dendrit je stromu-podobný (tree-like).

DEFINICE (Větvící bod)

Bod b v dendritu X se nazývá větvící bod, když $\operatorname{ord}(b, X) > 2$.

Pozorování

1. Množina větvících bodů v dendritu je nejvýše spočetná.
2. Každý dendrit je stromu-podobný (tree-like).

DEFINICE (Větvící bod)

Bod b v dendritu X se nazývá větvící bod, když $\operatorname{ord}(b, X) > 2$.

Pozorování

1. Množina větvících bodů v dendritu je nejvýše spočetná.
2. Každý dendrit je stromu-podobný (tree-like).

DEFINICE (Unikoherentní kontinuum)

Souvislý topologický prostor S se nazývá unikoherentní, pokud každé dvě souvislé uzavřené podmnožiny A, B prostoru $S = A \cup B$ mají souvislý průnik $A \cap B$.
Souvislý topologický prostor S se nazývá dědičně unikoherentní, pokud každá jeho uzavřená souvislá podmnožina je unikoherentní.

Pozorování

1. Peanovo kontinuum je dendrit právě když je dědičně unikoherentní.
2. Inverzní limita dendritů a monotónními lepicími zobrazeními je dendrit.

DEFINICE (Unikoherentní kontinuum)

Souvislý topologický prostor S se nazývá unikoherentní, pokud každé dvě souvislé uzavřené podmnožiny A, B prostoru $S = A \cup B$ mají souvislý průnik $A \cap B$.
Souvislý topologický prostor S se nazývá dědičně unikoherentní, pokud každá jeho uzavřená souvislá podmnožina je unikoherentní.

Pozorování

1. Peanovo kontinuum je dendrit právě když je dědičně unikoherentní.
2. Inverzní limita dendritů a monotónními lepicími zobrazeními je dendrit.

DEFINICE (Unikoherentní kontinuum)

Souvislý topologický prostor S se nazývá unikoherentní, pokud každé dvě souvislé uzavřené podmnožiny A, B prostoru $S = A \cup B$ mají souvislý průnik $A \cap B$.
Souvislý topologický prostor S se nazývá dědičně unikoherentní, pokud každá jeho uzavřená souvislá podmnožina je unikoherentní.

Pozorování

1. Peanovo kontinuum je dendrit právě když je dědičně unikoherentní.
2. Inverzní limita dendritů a monotónními lepicími zobrazeními je dendrit.

DEFINICE (Wazewského univerzální dendrit)

Dendrit, který má větvící body pouze nekonečného řádu rozloženy hustě na libovolném subkontinuu, nazýváme Wazewského univerzální dendrit, značíme D_∞.

Pozorování

1. D_∞ je rovinný a obsahuje kopii libovolného dendritu.
2. D_∞ má nespočetně mnoho koncových bodů.

DEFINICE (Dendroid)

Dendroid je obloukově souvislé dědičně unikoherentní kontinuum.

DEFINICE (Wazewského univerzální dendrit)

Dendrit, který má větvící body pouze nekonečného řádu rozloženy hustě na libovolném subkontinuu, nazýváme Wazewského univerzální dendrit, značíme D_∞.

Pozorování

1. D_∞ je rovinný a obsahuje kopii libovolného dendritu.
2. D_∞ má nespočetně mnoho koncových bodů.

DEFINICE (Dendroid)

Dendroid je obloukově souvislé dědičně unikoherentní kontinuum.

DEFINICE (Wazewského univerzální dendrit)

Dendrit, který má větvící body pouze nekonečného řádu rozloženy hustě na libovolném subkontinuu, nazýváme Wazewského univerzální dendrit, značíme D_∞.

Pozorování

1. D_∞ je rovinný a obsahuje kopii libovolného dendritu.
2. D_∞ má nespočetně mnoho koncových bodů.

DEFINICE (Dendroid)

Dendroid je obloukově souvislé dědičně unikoherentní kontinuum.

DEFINICE (Bod ireducibility)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Bod p nazýváme bod ireducibility X, pokud je X ireducibilní mezi p a nějakým bodem $q \in X$.

Pozorování

1. Pro kompozantu platí
$$\mathrm{k}(p) = \{x \in X : X \text{ není ireducibilní mezi } x \text{ a } p\} .$$
2. Bod je bodem ireducibility právě když jeho kompozanta není celý prostor. Nedegenerované kontinuum je ireducibilní, právě když nějaká kompozanta není rovna celému prostoru.

DEFINICE (Bod ireducibility)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Bod p nazýváme bod ireducibility X, pokud je X ireducibilní mezi p a nějakým bodem $q \in X$.

Pozorování

1. Pro kompozantu platí
$$\mathrm{k}(p) = \{x \in X : X \text{ není ireducibilní mezi } x \text{ a } p\} .$$
2. Bod je bodem ireducibility právě když jeho kompozanta není celý prostor. Nedegenerované kontinuum je ireducibilní, právě když nějaká kompozanta není rovna celému prostoru.

DEFINICE (Bod ireducibility)

Nechť X je kontinuum a $p \in X$. Bod p nazýváme bod ireducibility X, pokud je X ireducibilní mezi p a nějakým bodem $q \in X$.

Pozorování

1. Pro kompozantu platí

$$\mathrm{k}(p) = \{x \in X : X \text{ není ireducibilní mezi } x \text{ a } p\} .$$

2. Bod je bodem ireducibility právě když jeho kompozanta není celý prostor. Nedegenerované kontinuum je ireducibilní, právě když nějaká kompozanta není rovna celému prostoru.

Pozorování

1. Nechť X je nedegenerované ireducibilní kontinuum a bod p je bodem ireducibility X. Pokud subkontinuum $A \subset X$ obsahuje p, pak je $X \setminus A$ souvislá.
2. Nechť X je kontinuum. Pak doplňky kompozant jsou souvislé. Tedy

   $$\{x \in X : X \text{ je ireducibilní mezi } x \text{ a } p\}$$

   je souvislá.
3. Nechť X je nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q. Jestliže A a B jsou kontinua, $p \in A$, $q \in B$, pak $X \setminus (A \cup B)$ je souvislá.
4. Nechť X je nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q. Pak vnitřek libovolného subkontinua je souvislý.

Pozorování

1. Nechť X je nedegenerované ireducibilní kontinuum a bod p je bodem ireducibility X. Pokud subkontinuum $A \subset X$ obsahuje p, pak je $X \setminus A$ souvislá.
2. Nechť X je kontinuum. Pak doplňky kompozant jsou souvislé. Tedy

   $$\{x \in X : X \text{ je ireducibilní mezi } x \text{ a } p\}$$

   je souvislá.
3. Nechť X je nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q. Jestliže A a B jsou kontinua, $p \in A$, $q \in B$, pak $X \setminus (A \cup B)$ je souvislá.
4. Nechť X je nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q. Pak vnitřek libovolného subkontinua je souvislý.

Pozorování

1. Nechť X je nedegenerované ireducibilní kontinuum a bod p je bodem ireducibility X. Pokud subkontinuum $A \subset X$ obsahuje p, pak je $X \setminus A$ souvislá.
2. Nechť X je kontinuum. Pak doplňky kompozant jsou souvislé. Tedy
$$\{x \in X : X \text{ je ireducibilní mezi } x \text{ a } p\}$$
je souvislá.
3. Nechť X je nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q. Jestliže A a B jsou kontinua, $p \in A$, $q \in B$, pak $X \setminus (A \cup B)$ je souvislá.
4. Nechť X je nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q. Pak vnitřek libovolného subkontinua je souvislý.

TVRZENÍ (Počítání kompozant)

1. *Rozložitelné kontinuum je samo v sobe kompozantou.*
2. *Je-li* X *nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi* p *a* q *Pak* $\mathrm{k}(p)$, $\mathrm{k}(p)$ *a* X *jsou tři různé kompozanty* X.
3. *Nechť* X *je rozložitelné kontinuum. Pakmá právě jednu nebo právě tři kompozanty.*
4. *Je-li* X *nedegenerované kontinuum, pak kompozanta bodu* p *je sjednocením spočetně mnoha vlastních subkontinuí obsahujících* p.
5. *Je-li* X *nedegenerované nerozložitelné kontinuum, pak má nespočetně mnoho kompozant.*
6. *Každé nerozložitelné kontinuum je ireducibilní.*
7. *Nedegenerované kontinuum má právě jednu, právě tři nebo nespočetně mnoho kompozant.*
8. *V nedegenerovaném nerozložitelném kontinuu jsou kompozanty navzájem disjunktní.*

TVRZENÍ (Počítání kompozant)

1. *Rozložitelné kontinuum je samo v sobe kompozantou.*
2. *Je-li X nedegenerované kontinuum ireducibilní mezi p a q Pak $\mathrm{k}(p)$, $\mathrm{k}(p)$ a X jsou tři různé kompozanty X.*
3. *Nechť X je rozložitelné kontinuum. Pakmá právě jednu nebo právě tři kompozanty.*
4. *Je-li X nedegenerované kontinuum, pak kompozanta bodu p je sjednocením spočetně mnoha vlastních subkontinuí obsahujících p.*
5. *Je-li X nedegenerované nerozložitelné kontinuum, pak má nespočetně mnoho kompozant.*
6. *Každé nerozložitelné kontinuum je ireducibilní.*
7. *Nedegenerované kontinuum má právě jednu, právě tři nebo nespočetně mnoho kompozant.*
8. *V nedegenerovaném nerozložitelném kontinuu jsou kompozanty navzájem disjunktní.*

Pozorování

1. V nedegenerovaném nerozložitelném kontinuu X je každý bod bodem ireducibility. Navíc existuje nespočetná množina J taková, že X je ireducibilní mezi libovolnými dvěma body J.
2. Kontinuum je nerozložitelné právě když je každý jeho bod bodem ireducibility.
3. Kontinuum X je nerozložitelné právě když existuje v X trojice bodů taková, že X je ireducibilní mezi každými dvěma body z této trojice.

Pozorování

1. V nedegenerovaném nerozložitelném kontinuu X je každý bod bodem ireducibility. Navíc existuje nespočetná množina J taková, že X je ireducibilní mezi libovolnými dvěma body J.
2. Kontinuum je nerozložitelné právě když je každý jeho bod bodem ireducibility.
3. Kontinuum X je nerozložitelné právě když existuje v X trojice bodů taková, že X je ireducibilní mezi každými dvěma body z této trojice.

Pozorování

1. V nedegenerovaném nerozložitelném kontinuu X je každý bod bodem ireducibility. Navíc existuje nespočetná množina J taková, že X je ireducibilní mezi libovolnými dvěma body J.
2. Kontinuum je nerozložitelné právě když je každý jeho bod bodem ireducibility.
3. Kontinuum X je nerozložitelné právě když existuje v X trojice bodů taková, že X je ireducibilní mezi každými dvěma body z této trojice.

TVRZENÍ (Bod ireducibility, Kuratowski)

Nechť X *je kontinuum a* $p \in X$. *Bod* p *je bodem ireducibility* X *právě tehdy když* X *není sjednocením dvou vlastních subkontinuí obsahujících* p. *Tedy* X *je ireducibilní právě když takový bod existuje.*

TVRZENÍ (Bod ireducibility, Kuratowski)

Nechť X *je kontinuum a* $p \in X$. *Bod* p *je bodem ireducibility* X *právě tehdy když* X *není sjednocením dvou vlastních subkontinuí obsahujících* p. *Tedy* X *je ireducibilní právě když takový bod existuje.*

DEFINICE (Trioda)

Kontinuum X se nazývá trioda když existuje subkontinuum Y tak, že $X \setminus Y$ je sjednocením tří neprázdných množin, z nichž jsou každé dvě vzájemně odděleny. Kontinuum se nazývá netriodické, když neobsahuje triodu.

DEFINICE (Podstatný součet)

Kontinuum X je podstatný součet kontinuí Y a Z, pokud jsou Y a Z vlastní subkontinua, jejichž sjednocením je X. Píšeme

$$X = Y \oplus Z\,.$$

Podobně pro více sčítanců.

DEFINICE (Slabá trioda)

Kontinuum X se nazývá slabá trioda, pokud $X = A \oplus B \oplus C$ a $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Pozorování

Unikoherentní kontinuum je trioda právě když je slabá trioda.

DEFINICE (Trioda)

Kontinuum X se nazývá trioda když existuje subkontinuum Y tak, že $X \setminus Y$ je sjednocením tří neprázdných množin, z nichž jsou každé dvě vzájemně odděleny. Kontinuum se nazývá netriodické, když neobsahuje triodu.

DEFINICE (Podstatný součet)

Kontinuum X je podstatný součet kontinuí Y a Z, pokud jsou Y a Z vlastní subkontinua, jejichž sjednocením je X. Píšeme

$$X = Y \oplus Z .$$

Podobně pro více sčítanců.

DEFINICE (Slabá trioda)

Kontinuum X se nazývá slabá trioda, pokud $X = A \oplus B \oplus C$ a $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Pozorování

Unikoherentní kontinuum je trioda právě když je slabá trioda.

DEFINICE (Trioda)

Kontinuum X se nazývá trioda když existuje subkontinuum Y tak, že $X \setminus Y$ je sjednocením tří neprázdných množin, z nichž jsou každé dvě vzájemně odděleny. Kontinuum se nazývá netriodické, když neobsahuje triodu.

DEFINICE (Podstatný součet)

Kontinuum X je podstatný součet kontinuí Y a Z, pokud jsou Y a Z vlastní subkontinua, jejichž sjednocením je X. Píšeme

$$X = Y \oplus Z .$$

Podobně pro více sčítanců.

DEFINICE (Slabá trioda)

Kontinuum X se nazývá slabá trioda, pokud $X = A \oplus B \oplus C$ a $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Pozorování

Unikoherentní kontinuum je trioda právě když je slabá trioda.

DEFINICE (Ireducibilní z A do B)

Nechť X je kontinuum a A a B jsou neprázdné kompaktní podmnožiny. Řekenme, že C je ireducibilní z A do B, když C je subkontinuum protíná obě množiny A a B a žádné vlastní subkontinuum C to neumí. Píšeme $C = \mathrm{irr}(A, B)$.

Pozorování

Nechť A a B jsou peprázdné kompaktní podmnožiny kontinua X. Pak existuje kontinuum $C = \mathrm{irr}(A, B)$.

TVRZENÍ (Ireducibilita a trioda, Sorgenfrey)

Nedegenerované unikoherentní kontinuum není trioda právě když je ireducibilní.

DEFINICE (Ireducibilní z A do B)

Nechť X je kontinuum a A a B jsou neprázdné kompaktní podmnožiny. Řekenme, že C je ireducibilní z A do B, když C je subkontinuum protíná obě množiny A a B a žádné vlastní subkontinuum C to neumí. Píšeme $C = \mathrm{irr}(A, B)$.

Pozorování

Nechť A a B jsou peprázdné kompaktní podmnožiny kontinua X. Pak existuje kontinuum $C = \mathrm{irr}(A, B)$.

TVRZENÍ (Ireducibilita a trioda, Sorgenfrey)

Nedegenerované unikoherentní kontinuum není trioda právě když je ireducibilní.

DEFINICE (Ireducibilní z A do B)

Nechť X je kontinuum a A a B jsou neprázdné kompaktní podmnožiny. Řekenme, že C je ireducibilní z A do B, když C je subkontinuum protíná obě množiny A a B a žádné vlastní subkontinuum C to neumí. Píšeme $C = \mathrm{irr}(A, B)$.

Pozorování

Nechť A a B jsou peprázdné kompaktní podmnožiny kontinua X. Pak existuje kontinuum $C = \mathrm{irr}(A, B)$.

TVRZENÍ (Ireducibilita a trioda, Sorgenfrey)

Nedegenerované unikoherentní kontinuum není trioda právě když je ireducibilní.

Pozorování

1. Podkontinuum oblouku-podobného kontinua je oblouku-podobné.
2. Oblouku-podobné kontinuum je dědičně unikoherentní a dědičně ireducibilní.
3. Oblouku-podobné kontinuum neobsahuje (slabou) triodu.
4. Oblouku-podobné kontinuum je obloukově souvislé právě když je oblouk.

Pozorování

1. Podkontinuum oblouku-podobného kontinua je oblouku-podobné.
2. Oblouku-podobné kontinuum je dědičně unikoherentní a dědičně ireducibilní.
3. Oblouku-podobné kontinuum neobsahuje (slabou) triodu.
4. Oblouku-podobné kontinuum je obloukově souvislé právě když je oblouk.

Pozorování

1. Podkontinuum oblouku-podobného kontinua je oblouku-podobné.
2. Oblouku-podobné kontinuum je dědičně unikoherentní a dědičně ireducibilní.
3. Oblouku-podobné kontinuum neobsahuje (slabou) triodu.
4. Oblouku-podobné kontinuum je obloukově souvislé právě když je oblouk.

DEFINICE (Řetízkové kontinuum)

Nechť X je kontinuum. Indexovaný soubor množin $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ nazveme řetěz v X, pokud se protínají právě sousední prvky L_i a L_{i+1} ($i = 1, \ldots, n-1$). Prvky tohoto souboru nazveme články (řetězu). Největší diametr článku řetězu nazveme tloušťka řetězu a značí se $\mathrm{mesh}(\mathcal{L})$.
Je-li $\mathrm{mesh}(\mathcal{L}) < \varepsilon$, říkáme, že $\mathcal{L}$ je ε-řetěz. Říkáme, že kontinuum X je řetízkové, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-řetěz pokrývající X.

DEFINICE (Řetízkové kontinuum)

Nechť X je kontinuum. Indexovaný soubor množin $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ nazveme řetěz v X, pokud se protínají právě sousední prvky L_i a L_{i+1} ($i = 1, \ldots, n-1$). Prvky tohoto souboru nazveme články (řetězu). Největší diametr článku řetězu nazveme tloušťka řetězu a značí se $\mathrm{mesh}(\mathcal{L})$.
Je-li $\mathrm{mesh}(\mathcal{L}) < \varepsilon$, říkáme, že $\mathcal{L}$ je ε-řetěz. Říkáme, že kontinuum X je řetízkové, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje ε-řetěz pokrývající X.

Pozorování

1. Nedegenerované kontinuum je řetízkové právě když je oblouku-podobné.
2. Monotónní nedegenerovaný obraz řetízkového kontinua je řetízkové.
3. Otevřený nedegenerovaný obraz řetízkového kontinua je řetízkové.
4. Otevřený nedegenerovaný obraz oblouku je oblouk.

Pozorování

1. Nedegenerované kontinuum je řetízkové právě když je oblouku-podobné.
2. Monotónní nedegenerovaný obraz řetízkového kontinua je řetízkové.
3. Otevřený nedegenerovaný obraz řetízkového kontinua je řetízkové.
4. Otevřený nedegenerovaný obraz oblouku je oblouk.

Pozorování

1. Nedegenerované kontinuum je řetízkové právě když je oblouku-podobné.
2. Monotónní nedegenerovaný obraz řetízkového kontinua je řetízkové.
3. Otevřený nedegenerovaný obraz řetízkového kontinua je řetízkové.
4. Otevřený nedegenerovaný obraz oblouku je oblouk.

TVRZENÍ (Univerzální řetízkové kontinuum)

Kontinuum je žetízkové právě když je inverzní limitou oblouků s lepicími zobrazeními, která jsou na. Lepicí zobrazení lze vybírat z pevné spočetné množiny. Existuje univerzální řetízkové kontinuum (obsahuje topologickou kopii každého řetízkového kontinua).

Důsledek

Řetízkové kontinuum je rovinné.

Pozorování

1. Řetízkové kontinuum má vlastnost pevného bodu.
2. Nechť $f : X \to Y$ zobrazuje kontinuum X na řetízkové kontinuum Y. Pak je každé subkontinuum Y obrazem subkontinua X zobrazením f.

TVRZENÍ (Univerzální řetízkové kontinuum)

Kontinuum je žetízkové právě když je inverzní limitou oblouků s lepicími zobrazeními, která jsou na.
Lepicí zobrazení lze vybírat z pevné spočetné množiny.
Existuje univerzální řetízkové kontinuum (obsahuje topologickou kopii každého řetízkového kontinua).

Důsledek

Řetízkové kontinuum je rovinné.

Pozorování

1. Řetízkové kontinuum má vlastnost pevného bodu.
2. Nechť $f : X \to Y$ zobrazuje kontinuum X na řetízkové kontinuum Y. Pak je každé subkontinuum Y obrazem subkontinua X zobrazením f.

TVRZENÍ (Univerzální řetízkové kontinuum)

Kontinuum je žetízkové právě když je inverzní limitou oblouků s lepicími zobrazeními, která jsou na.
Lepicí zobrazení lze vybírat z pevné spočetné množiny.
Existuje univerzální řetízkové kontinuum (obsahuje topologickou kopii každého řetízkového kontinua).

Důsledek

Řetízkové kontinuum je rovinné.

Pozorování

1. Řetízkové kontinuum má vlastnost pevného bodu.
2. Nechť $f : X \to Y$ zobrazuje kontinuum X na řetízkové kontinuum Y. Pak je každé subkontinuum Y obrazem subkontinua X zobrazením f.

TVRZENÍ (Typické kontinuum je pseudo-oblouk)

Nechť X je topologický prostor.

1. *Množina řetízkových subkontinuí Hilbertovy kostky je hustá a G_δ.*
2. *Množina dědičně nerozložitelných subkontinuí Hilbertovy kostky je hustá a G_δ.*
3. *Typické subkontinuum Hilbertovy kostky je homeomorfní s pseudo-obloukem.*

TVRZENÍ (Typické kontinuum je pseudo-oblouk)

Nechť X je topologický prostor.

1. *Množina řetízkových subkontinuí Hilbertovy kostky je hustá a G_δ.*
2. *Množina dědičně nerozložitelných subkontinuí Hilbertovy kostky je hustá a G_δ.*
3. *Typické subkontinuum Hilbertovy kostky je homeomorfní s pseudo-obloukem.*

DEFINICE (Neposedné zobrazeni)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá neposedné (anglicky light), když jsou vzory bodů totálně nesouvislé.

TVRZENÍ (Monotónní-neposedná faktorizace)

Nechť X a Y jsou kompaktní metrické prostory a f spojité zobrazení X na Y. Pak existuje kompaktní metrický prostor M, monotónní zobrazení m prostoru X na M a neposedné zobrazení l prostoru M na Y takové, že platí $f = l \circ m$

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{f} & & Y \\ & \searrow m & & l \nearrow & \\ & & M & & \end{array}$$

Tato faktorizace je topologicky jednoznačná (až na homeomorfismus).

Pozorování

1. Pro otevřené zobrazení dostaneme jednoznačnou faktorizaci, kde light faktor je zároveň otevřeným zobrazením.
2. Každé Peanovo kontinuum je light obrazem intervalu $[0, 1]$.

DEFINICE (Neposedné zobrazeni)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá neposedné (anglicky light), když jsou vzory bodů totálně nesouvislé.

TVRZENÍ (Monotónní-neposedná faktorizace)

Nechť X a Y jsou kompaktní metrické prostory a f spojité zobrazení X na Y. Pak existuje kompaktní metrický prostor M, monotónní zobrazení m prostoru X na M a neposedné zobrazení l prostoru M na Y takové, že platí $f = l \circ m$

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{f} & & Y \\ & \searrow m & & l \nearrow & \\ & & M & & \end{array}$$

Tato faktorizace je topologicky jednoznačná (až na homeomorfismus).

Pozorování

1. Pro otevřené zobrazení dostaneme jednoznačnou faktorizaci, kde light faktor je zároveň otevřeným zobrazením.
2. Každé Peanovo kontinuum je light obrazem intervalu $[0, 1]$.

DEFINICE (Neposedné zobrazeni)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá neposedné (anglicky light), když jsou vzory bodů totálně nesouvislé.

TVRZENÍ (Monotónní-neposedná faktorizace)

Nechť X a Y jsou kompaktní metrické prostory a f spojité zobrazení X na Y. Pak existuje kompaktní metrický prostor M, monotónní zobrazení m prostoru X na M a neposedné zobrazení l prostoru M na Y takové, že platí $f = l \circ m$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "m"'] & & Y \\ & M \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

Tato faktorizace je topologicky jednoznačná (až na homeomorfismus).

Pozorování

1. Pro otevřené zobrazení dostaneme jednoznačnou faktorizaci, kde light faktor je zároveň otevřeným zobrazením.
2. Každé Peanovo kontinuum je light obrazem intervalu $[0, 1]$.

DEFINICE (Soutokové zobrazení)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá soutokové (anglicky confluent), když pro každé subkontinuum $B \subset Y$ se obraz každé komponenty A množiny $f^{-1}(B)$ je B, $f(A) = B$.

Pozorování

1. Každé otevřené na zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je soutokové.
2. Každé monotónní na zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je soutokové.
3. Obraz λ-dendroidu (dendroidu, dendritu, stromu, grafu) při soutokovém zobrazení je opět λ-dendroid (dendroid, dendrit, strom, graf.)

DEFINICE (Soutokové zobrazení)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá soutokové (anglicky confluent), když pro každé subkontinuum $B \subset Y$ se obraz každé komponenty A množiny $f^{-1}(B)$ je B, $f(A) = B$.

Pozorování

1. Každé otevřené na zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je soutokové.
2. Každé monotónní na zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je soutokové.
3. Obraz λ-dendroidu (dendroidu, dendritu, stromu, grafu) při soutokovém zobrazení je opět λ-dendroid (dendroid, dendrit, strom, graf.)

DEFINICE (Soutokové zobrazení)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá soutokové (anglicky confluent), když pro každé subkontinuum $B \subset Y$ se obraz každé komponenty A množiny $f^{-1}(B)$ je B, $f(A) = B$.

Pozorování

1. Každé otevřené na zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je soutokové.
2. Každé monotónní na zobrazení mezi kompaktními metrickými prostory je soutokové.
3. Obraz λ-dendroidu (dendroidu, dendritu, stromu, grafu) při soutokovém zobrazení je opět λ-dendroid (dendroid, dendrit, strom, graf.)

DEFINICE (Dědičně obloukově souvislé kontinuum)

Kontinuum se nazývá dědičně obloukově souvislé, když jsou všechna jeho subkontinua obloukově souvislá.

TVRZENÍ (Soutok v triodě)

Nechť X je dědičně obloukově souvislé kontinuum a Y jeho obraz při soutokovém zobrazení. Pak Y je dědičně obloukově souvislé kontinuum a větvící bod jednoduché triody T v Y je obrazem větvícího bodu vhodné triody T' v X, která se zobrazuje na T.

DEFINICE (Slabě soutokové zobrazení)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá slabě soutokové (anglicky weakly confluent), když každé subkontinuum Y je obrazem subkontinua v X.

DEFINICE (Dědičně obloukově souvislé kontinuum)

Kontinuum se nazývá dědičně obloukově souvislé, když jsou všechna jeho subkontinua obloukově souvislá.

TVRZENÍ (Soutok v triodě)

Nechť X je dědičně obloukově souvislé kontinuum a Y jeho obraz při soutokovém zobrazení. Pak Y je dědičně obloukově souvislé kontinuum a větvící bod jednoduché triody T v Y je obrazem větvícího bodu vhodné triody T' v X, která se zobrazuje na T.

DEFINICE (Slabě soutokové zobrazení)

Spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá slabě soutokové (anglicky weakly confluent), když každé subkontinuum Y je obrazem subkontinua v X.

TVRZENÍ (Kontinuum dimenze 2, Mazurkiewicz)

1. *Každý kompaktní metrický prostor dimenze alespoň* n *lze zobrazit na* B^n *slabě soutokovým zobrazením.*
2. *Každý kompaktní metrický prostor dimenze alespoň* 2 *obsahuje nedegenerované nerozložitelné kontinuum.*

TVRZENÍ (Kontinuum dimenze 2, Mazurkiewicz)

1. *Každý kompaktní metrický prostor dimenze alespoň* n *lze zobrazit na* B^n *slabě soutokovým zobrazením.*
2. *Každý kompaktní metrický prostor dimenze alespoň* 2 *obsahuje nedegenerované nerozložitelné kontinuum.*

Podíváme se na prostory, které jsou v nějakém smyslu hodně nesouvislé. Začneme s těmi, které nemají žádnou vícebodovou souvislou podmnožinu.

DEFINICE (Totálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně nesouvislý, jestliže každá jeho komponenta je jednobodová.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně nesouvislých prostorů)

1. *Prostor je totálně nesouvislý právě když je dědičně nesouvislý ve smyslu, že každá aspoň dvoubodová množina je nesouvislá.*
2. *Lokálně kompaktní parakompaktní totálně nesouvislý prostor (speciálně kompaktní Hausdorffův prostor) je nuldimenzionální.*
3. *Třída totálně nesouvislých prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně nesouvislých prostorů není uzavřená na kvocienty.*

Důkaz

DEFINICE (Totálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně nesouvislý, jestliže každá jeho komponenta je jednobodová.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně nesouvislých prostorů)

1. *Prostor je totálně nesouvislý právě když je dědičně nesouvislý ve smyslu, že každá aspoň dvoubodová množina je nesouvislá.*
2. *Lokálně kompaktní parakompaktní totálně nesouvislý prostor (speciálně kompaktní Hausdorffův prostor) je nuldimenzionální.*
3. *Třída totálně nesouvislých prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně nesouvislých prostorů není uzavřená na kvocienty.*

Důkaz

DEFINICE (Totálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně nesouvislý, jestliže každá jeho komponenta je jednobodová.

Zřejmě každý nuldimenzionální Hausdorffův prostor je totálně nesouvislý. Opak však neplatí, ale viz následující tvrzení.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně nesouvislých prostorů)

1. *Prostor je totálně nesouvislý právě když je dědičně nesouvislý ve smyslu, že každá aspoň dvoubodová množina je nesouvislá.*
2. *Lokálně kompaktní parakompaktní totálně nesouvislý prostor (speciálně kompaktní Hausdorffův prostor) je nuldimenzionální.*
3. *Třída totálně nesouvislých prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně nesouvislých prostorů není uzavřená na kvocienty.*

Důkaz

DEFINICE (Totálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně nesouvislý, jestliže každá jeho komponenta je jednobodová.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně nesouvislých prostorů)

1. *Prostor je totálně nesouvislý právě když je dědičně nesouvislý ve smyslu, že každá aspoň dvoubodová množina je nesouvislá.*
2. *Lokálně kompaktní parakompaktní totálně nesouvislý prostor (speciálně kompaktní Hausdorffův prostor) je nuldimenzionální.*
3. *Třída totálně nesouvislých prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně nesouvislých prostorů není uzavřená na kvocienty.*

▸ Důkaz

Na předchozí stránce jsem definovali „hodně” nesouvislé prostory jako ty, které mají jednobodové komponenty. Co když budeme požadovat jednobodové kvazikomponenty?

DEFINICE (Totálně separované prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně separovaný, jestliže každá jeho kvazikomponenta je jednobodová.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně separovaných prostorů)

1. *Každý totálně separovaný prostor je totálně nesouvislý. opak neplatí ani pro Hausdorffovy prostory.*
2. *Prostor je totálně separovaný právě když každé dva různé body mají disjunktní obojetná okolí. (Takže každý totálně separovaný prostor je Hausdorffův.)*
3. *Třída totálně separovaných prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně separovaných prostorů není uzavřená na kvocienty.*

DEFINICE (Totálně separované prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně separovaný, jestliže každá jeho kvazikomponenta je jednobodová.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně separovaných prostorů)

1. *Každý totálně separovaný prostor je totálně nesouvislý. opak neplatí ani pro Hausdorffovy prostory.*
2. *Prostor je totálně separovaný právě když každé dva různé body mají disjunktní obojetná okolí. (Takže každý totálně separovaný prostor je Hausdorffův.)*
3. *Třída totálně separovaných prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně separovaných prostorů není uzavřená na kvocienty.*

DEFINICE (Totálně separované prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně separovaný, jestliže každá jeho kvazikomponenta je jednobodová.

Zřejmě každý nuldimenzionální Hausdorffův prostor je totálně separovaný. Opak však neplatí. Následující vlastnosti se dokazují pdobně jako předchozí vlastnosti totálně nesouvislých prostorů.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně separovaných prostorů)

1. *Každý totálně separovaný prostor je totálně nesouvislý. opak neplatí ani pro Hausdorffovy prostory.*
2. *Prostor je totálně separovaný právě když každé dva různé body mají disjunktní obojetná okolí. (Takže každý totálně separovaný prostor je Hausdorffův.)*
3. *Třída totálně separovaných prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně separovaných prostorů není uzavřená na kvocienty.*

DEFINICE (Totálně separované prostory)

Topologický prostor se nazývá totálně separovaný, jestliže každá jeho kvazikomponenta je jednobodová.

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně separovaných prostorů)

1. *Každý totálně separovaný prostor je totálně nesouvislý. opak neplatí ani pro Hausdorffovy prostory.*
2. *Prostor je totálně separovaný právě když každé dva různé body mají disjunktní obojetná okolí. (Takže každý totálně separovaný prostor je Hausdorffův.)*
3. *Třída totálně separovaných prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně separovaných prostorů není uzavřená na kvocienty.*

V totálně separovaných prostorech je každý bod průnikem obojetných množin. To nemusí znamenat, že má lokální báze složené z obojetných množin, tj., že je nuldimenzionální.

DEFINICE (Silně nuldimenzionální prostory)

Úplně regulární prostor se nazývá silně nuldimenzionální, jestliže pro každé dvě disjunktní nulové množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Vlastnosti silně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Každý silně nuldimenzionální prostor je nuldimenzionální.*
2. *Je-li X nuldimenzionální prostor, který je buď Lindelöfův nebo lokálně kompaktní parakompaktní (speciálně kompaktní Hausdorffův), je silně nuldimenzionální.*
3. *Úplně regulární prostor X je silně nuldimenzionální právě když βX je nuldimenzionální.*
4. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů je uzavřená na disjunktní součty.*
5. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů není uzavřená na kvocienty, podprostory a součiny.*

Důkaz

V totálně separovaných prostorech je každý bod průnikem obojetných množin. To nemusí znamenat, že má lokální báze složené z obojetných množin, tj., že je nuldimenzionální.

Nuldimenzionalita znamená, že uzavřená množina lze oddělit obojetnou množinou od každého bodu, který v ní neleží. Budeme-li v této silné oddělitelnosti pokračovat dále, jako tomu bylo u oddělovacích axiomů, dostali bychom prostory, kde každé dvě disjunktní uzavřené množiny lze oddělit obojetnou množinou. Tím bychom dostali podtřídu normálních prostorů. Chceme však zahrnout do nového pojmu i některé prostory, které nejsou normální. Proto zvolíme následující definici (uvědomte si, že každý nuldimenzionální prostor je úplně regulární).

DEFINICE (Silně nuldimenzionální prostory)

Úplně regulární prostor se nazývá silně nuldimenzionální, jestliže pro každé dvě disjunktní nulové množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Vlastnosti silně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Každý silně nuldimenzionální prostor je nuldimenzionální.*
2. *Je-li X nuldimenzionální prostor, který je buď Lindelöfův nebo lokálně kompaktní parakompaktní*

V totálně separovaných prostorech je každý bod průnikem obojetných množin. To nemusí znamenat, že má lokální báze složené z obojetných množin, tj., že je nuldimenzionální.

Nuldimenzionalita znamená, že uzavřená množina lze oddělit obojetnou množinou od každého bodu, který v ní neleží. Budeme-li v této silné oddělitelnosti pokračovat dále, jako tomu bylo u oddělovacích axiomů, dostali bychom prostory, kde každé dvě disjunktní uzavřené množiny lze oddělit obojetnou množinou. Tím bychom dostali podtřídu normálních prostorů. Chceme však zahrnout do nového pojmu i některé prostory, které nejsou normální. Proto zvolíme následující definici (uvědomte si, že každý nuldimenzionální prostor je úplně regulární).

Vzpomeňte si, že nulové množiny v topologickém prostoru jsou vzory 0 při spojitých zobrazeních do $\mathbb{R}$ (ekvivalentně, vzory uzavřených množin při spojitých zobrazeních do metrizovatelných prostorů).

DEFINICE (Silně nuldimenzionální prostory)

Úplně regulární prostor se nazývá *silně nuldimenzionální*, jestliže pro každé dvě disjunktní nulové množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

DEFINICE (Silně nuldimenzionální prostory)

Úplně regulární prostor se nazývá silně nuldimenzionální, jestliže pro každé dvě disjunktní nulové množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Vlastnosti silně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Každý silně nuldimenzionální prostor je nuldimenzionální.*
2. *Je-li X nuldimenzionální prostor, který je buď Lindelöfův nebo lokálně kompaktní parakompaktní (speciálně kompaktní Hausdorffův), je silně nuldimenzionální.*
3. *Úplně regulární prostor X je silně nuldimenzionální právě když βX je nuldimenzionální.*
4. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů je uzavřená na disjunktní součty.*
5. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů není uzavřená na kvocienty, podprostory a součiny.*

▸ Důkaz

DEFINICE (Silně nuldimenzionální prostory)

Úplně regulární prostor se nazývá silně nuldimenzionální, jestliže pro každé dvě disjunktní nulové množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Vlastnosti silně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Každý silně nuldimenzionální prostor je nuldimenzionální.*
2. *Je-li X nuldimenzionální prostor, který je buď Lindelöfův nebo lokálně kompaktní parakompaktní (speciálně kompaktní Hausdorffův), je silně nuldimenzionální.*
3. *Úplně regulární prostor X je silně nuldimenzionální právě když βX je nuldimenzionální.*
4. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů je uzavřená na disjunktní součty.*
5. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů není uzavřená na kvocienty, podprostory a součiny.*

Důkaz

Je možné pokračovat dále v oddělování obojetnými množinami. Dosti silnou nesouvislost dá oddělování disjunktních otevřených množin.

DEFINICE (Extremálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá extremálně nesouvislý, jestliže pro každé dvě disjunktní množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Charakterizace extremálně nesouvislých prostorů)

Pro topologický prostor X jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

1. *X je extremálně nesouvislý.*
2. *Uzávěr každé otevřené podmnožiny X je otevřený.*
3. *Každé dvě otevřené disjunktní podmnožiny X mají disjunktní uzávěry.*
4. *Každá otevřená podmnožina X je C^*-vnořená v X.*
5. *Každá hustá podmnožina X je C^*-vnořená v X.*

Důkaz

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Extremálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá extremálně nesouvislý, jestliže pro každé dvě disjunktní množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Charakterizace extremálně nesouvislých prostorů)

Pro topologický prostor X jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

1. *X je extremálně nesouvislý.*
2. *Uzávěr každé otevřené podmnožiny X je otevřený.*
3. *Každé dvě otevřené disjunktní podmnožiny X mají disjunktní uzávěry.*
4. *Každá otevřená podmnožina X je C^*-vnořená v X.*
5. *Každá hustá podmnožina X je C^*-vnořená v X.*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Extremálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá extremálně nesouvislý, jestliže pro každé dvě disjunktní množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

Každý diskrétní nebo indiskrétní prostor je extremálně nesouvislý. Sierpiňského dvoubodový prostor je extremálně nesouvislý. Hrubý T_1-prostor je extremálně nesouvislý.

TVRZENÍ (Charakterizace extremálně nesouvislých prostorů)

Pro topologický prostor X jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

1. *X je extremálně nesouvislý.*
2. *Uzávěr každé otevřené podmnožiny X je otevřený.*
3. *Každé dvě otevřené disjunktní podmnožiny X mají disjunktní uzávěry.*
4. *Každá otevřená podmnožina X je C^*-vnořená v X.*
5. *Každá hustá podmnožina X je C^*-vnořená v X.*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Extremálně nesouvislé prostory)

Topologický prostor se nazývá extremálně nesouvislý, jestliže pro každé dvě disjunktní množiny A, B existuje obojetná množina G tak, že $A \subset G \subset X \setminus B$.

TVRZENÍ (Charakterizace extremálně nesouvislých prostorů)

Pro topologický prostor X jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

1. *X je extremálně nesouvislý.*
2. *Uzávěr každé otevřené podmnožiny X je otevřený.*
3. *Každé dvě otevřené disjunktní podmnožiny X mají disjunktní uzávěry.*
4. *Každá otevřená podmnožina X je C^*-vnořená v X.*
5. *Každá hustá podmnožina X je C^*-vnořená v X.*

Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti extremálně nesouvislých prostorů)

1. *Extremálně nesouvislý úplně regulární prostor je silně nuldimenzionální (opak neplatí).*
2. *Úplně regulární prostor X je extremálně nesouvislý právě když je βX extremálně nesouvislý.*
3. *Je-li X extremálně nesouvislý a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost v X, je $\{x_n\}$ konstantní od jistého indexu počínaje.*
4. *Třída extremálně nesouvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, na husté podprostory, na disjunktní součty.*
5. *Třída extremálně nesouvislých prostorů není uzavřená na součiny a na kvocienty.*

Důkaz