13. SOUVISLOST

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

V euklidovských prostorech se v matematické analýze používá pojem souvislosti, který je názorný a vhodný pro otevřené množiny: každé dva body množiny lze spojit lomenou čarou. Tuto definici lze použít i obecně, změníme-li lomenou čáru na křivku.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině.
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

V euklidovských prostorech se v matematické analýze používá pojem souvislosti, který je názorný a vhodný pro otevřené množiny: každé dva body množiny lze spojit lomenou čarou. Tuto definici lze použít i obecně, změníme-li lomenou čáru na křivku.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině.
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině.
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Křivka je kompaktní, souvislý a lokálně souvislý prostor. Hahn a Mazurkiewicz ukázali, že takovýto Hausdorffův prostor je obloukově souvislý. Odtud vyplývá, že v Hausdorffových prostorech splývá oblouková souvislost s křivkovou souvislostí.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0, 1]$ (nebo $[a, b]$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0, 1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Křivka je kompaktní, souvislý a lokálně souvislý prostor. Hahn a Mazurkiewicz ukázali, že takovýto Hausdorffův prostor je obloukově souvislý. Odtud vyplývá, že v Hausdorffových prostorech splývá oblouková souvislost s křivkovou souvislostí.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x,y existuje spojité zobrazení $\varphi:[0,1]\to X$ takové, že $\varphi(0)=x, \varphi(1)=y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Křivka je kompaktní, souvislý a lokálně souvislý prostor. Hahn a Mazurkiewicz ukázali, že takovýto Hausdorffův prostor je obloukově souvislý. Odtud vyplývá, že v Hausdorffových prostorech splývá oblouková souvislost s křivkovou souvislostí.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině.
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Křivka je kompaktní, souvislý a lokálně souvislý prostor. Hahn a Mazurkiewicz ukázali, že takovýto Hausdorffův prostor je obloukově souvislý. Odtud vyplývá, že v Hausdorffových prostorech splývá oblouková souvislost s křivkovou souvislostí.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Křivka je kompaktní, souvislý a lokálně souvislý prostor. Hahn a Mazurkiewicz ukázali, že takovýto Hausdorffův prostor je obloukově souvislý. Odtud vyplývá, že v Hausdorffových prostorech splývá oblouková souvislost s křivkovou souvislostí.

Připomeňme, že křivka je spojitý obraz uzavřeného intervalu $[0,1]$ (nebo $[a,b]$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

DEFINICE (Křivková souvislost)

Topologický prostor X se nazývá křivkově souvislý, jestliže pro každé dva jeho body x, y existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to X$ takové, že $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$.

Vlastnosti křivkové souvislosti

1. Každý křivkově souvislý prostor je souvislý. Opak neplatí ani pro množiny v rovině.
2. Třída křivkově souvislých prostorů je uzavřená na spojité obrazy a na součiny.
3. Otevřená podmnožina euklidovského prostoru je souvislá právě když je křivkově souvislá.

V definici křivkové souvislosti lze místo spojitosti zobrazení φ požadovat jeho homeomorphismus. Dostane se oblouková souvislost.

Křivka je kompaktní, souvislý a lokálně souvislý prostor. Hahn a Mazurkiewicz ukázali, že takovýto Hausdorffův prostor je obloukově souvislý. Odtud vyplývá, že v Hausdorffových prostorech splývá oblouková souvislost s křivkovou souvislostí.

DEFINICE (Lokální křivková souvislost)

Topologický prostor se nazývá lokálně křivkově souvislý, jestliže každý jeho bod má lokální bázi složenou z křivkově souvislých okolí.

Vlastnosti lokálně křivkově souvislých prostorů

1. Topologický prostor je křivkově souvislý právě když každý jeho bod x a každé jeho okolí U obsahuje menší okolí V takové, že každé dva body V (nebo bod z V a bod x) lze spojit křivkou v U.
2. Souvislý a lokálně křivkově souvislý prostor je křivkově souvislý.
3. Lokálně křivkově souvislý prostor je lokálně souvislý, opak neplatí ani pro podmnožiny roviny.

DEFINICE (Lokální křivková souvislost)

Topologický prostor se nazývá lokálně křivkově souvislý, jestliže každý jeho bod má lokální bázi složenou z křivkově souvislých okolí.

Vlastnosti lokálně křivkově souvislých prostorů

1. Topologický prostor je křivkově souvislý právě když každý jeho bod x a každé jeho okolí U obsahuje menší okolí V takové, že každé dva body V (nebo bod z V a bod x) lze spojit křivkou v U.
2. Souvislý a lokálně křivkově souvislý prostor je křivkově souvislý.
3. Lokálně křivkově souvislý prostor je lokálně souvislý, opak neplatí ani pro podmnožiny roviny.

DEFINICE (Lokální křivková souvislost)

Topologický prostor se nazývá lokálně křivkově souvislý, jestliže každý jeho bod má lokální bázi složenou z křivkově souvislých okolí.

Vlastnosti lokálně křivkově souvislých prostorů

1. Topologický prostor je křivkově souvislý právě když každý jeho bod x a každé jeho okolí U obsahuje menší okolí V takové, že každé dva body V (nebo bod z V a bod x) lze spojit křivkou v U.
2. Souvislý a lokálně křivkově souvislý prostor je křivkově souvislý.
3. Lokálně křivkově souvislý prostor je lokálně souvislý, opak neplatí ani pro podmnožiny roviny.

DEFINICE (Lokální křivková souvislost)

Topologický prostor se nazývá lokálně křivkově souvislý, jestliže každý jeho bod má lokální bázi složenou z křivkově souvislých okolí.

Vlastnosti lokálně křivkově souvislých prostorů

1. Topologický prostor je křivkově souvislý právě když každý jeho bod x a každé jeho okolí U obsahuje menší okolí V takové, že každé dva body V (nebo bod z V a bod x) lze spojit křivkou v U.
2. Souvislý a lokálně křivkově souvislý prostor je křivkově souvislý.
3. Lokálně křivkově souvislý prostor je lokálně souvislý, opak neplatí ani pro podmnožiny roviny.

V metrických prostorech, obecněji v uniformních prostorech, lze definovat souvislost v závislosti na metrice.

DEFINICE (Stejnoměrná souvislost)

Pseudometrický prostor (X, d) se nazývá stejnoměrně souvislý, jestliže pro každé jeho dva body x, y a každé $r > 0$ existuje konečná podmnožina $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ tak, že $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_{i-1}, x_i) < r$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.

Definice stejnoměrné souvislosti se dá zformulovat pomocí pokrytí: *pro každé dva body x, z a každé stejnoměrné r-pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, \ldots, G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, \ldots, n$.* Lze navíc požadovat, že $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Nyní je už snadné převést uvedenou formulaci do uniformních prostorů.

Lze celkem snadno ukázat, že topologický prostor X je souvislý právě když pro každé dva body x, y a každé otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, \ldots, G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, \ldots, n$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Odtud vyplývá např., že v parakompaktních prostorech splývá souvislost se stejnoměrnou souvislostí jemných uniformit.

V metrických prostorech, obecněji v uniformních prostorech, lze definovat souvislost v závislosti na metrice.

DEFINICE (Stejnoměrná souvislost)

Pseudometrický prostor (X, d) se nazývá stejnoměrně souvislý, jestliže pro každé jeho dva body x, y a každé $r > 0$ existuje konečná podmnožina $\{x_0, x_1, ... x_n\}$ tak, že $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_{i-1}, x_i) < r$ pro každé $i = 1, ..., n$.

Definice stejnoměrné souvislosti se dá zformulovat pomocí pokrytí: *pro každé dva body x, z a každé stejnoměrné r-pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, ..., G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, ..., n$.* Lze navíc požadovat, že $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Nyní je už snadné převést uvedenou formulaci do uniformních prostorů.

Lze celkem snadno ukázat, že topologický prostor X je souvislý právě když pro každé dva body x, y a každé otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, ..., G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, ..., n$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Odtud vyplývá např., že v parakompaktních prostorech splývá souvislost se stejnoměrnou souvislostí jemných uniformit.

V metrických prostorech, obecněji v uniformních prostorech, lze definovat souvislost v závislosti na metrice.

DEFINICE (Stejnoměrná souvislost)

Pseudometrický prostor (X, d) se nazývá stejnoměrně souvislý, jestliže pro každé jeho dva body x, y a každé $r > 0$ existuje konečná podmnožina $\{x_0, x_1, ...x_n\}$ tak, že $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_{i-1}, x_i) < r$ pro každé $i = 1, ..., n$.

Vlastnosti stejnoměrné souvislosti

- Souvislý metrický prostor je stejnoměrně souvislý. Opak neplatí (např. množina racionálních čísel v $\mathbb{R}$ je stejnoměrně souvislá).
- V kompaktních pseudometrických prostorech souvislost a stejnoměrná souvislost splývají.

Definice stejnoměrné souvislosti se dá zformulovat pomocí pokrytí: *pro každé dva body x, z a každé stejnoměrné r-pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, ..., G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, ..., n$.* Lze navíc požadovat, že $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Nyní je už snadné převést uvedenou formulaci do uniformních prostorů.

V metrických prostorech, obecněji v uniformních prostorech, lze definovat souvislost v závislosti na metrice.

DEFINICE (Stejnoměrná souvislost)

Pseudometrický prostor (X, d) se nazývá stejnoměrně souvislý, jestliže pro každé jeho dva body x, y a každé $r > 0$ existuje konečná podmnožina $\{x_0, x_1, ...x_n\}$ tak, že $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_{i-1}, x_i) < r$ pro každé $i = 1, ..., n$.

Definice stejnoměrné souvislosti se dá zformulovat pomocí pokrytí: *pro každé dva body x, z a každé stejnoměrné r-pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, ..., G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, ..., n$.* Lze navíc požadovat, že $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Nyní je už snadné převést uvedenou formulaci do uniformních prostorů.

Lze celkem snadno ukázat, že topologický prostor X je souvislý právě když pro každé dva body x, y a každé otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, ..., G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, ..., n$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Odtud vyplývá např., že v parakompaktních prostorech splývá souvislost se stejnoměrnou souvislostí jemných uniformit.

V metrických prostorech, obecněji v uniformních prostorech, lze definovat souvislost v závislosti na metrice.

DEFINICE (Stejnoměrná souvislost)

Pseudometrický prostor (X, d) se nazývá stejnoměrně souvislý, jestliže pro každé jeho dva body x, y a každé $r > 0$ existuje konečná podmnožina $\{x_0, x_1, ...x_n\}$ tak, že $x_0 = x, x_n = y$ a $d(x_{i-1}, x_i) < r$ pro každé $i = 1, ..., n$.

Definice stejnoměrné souvislosti se dá zformulovat pomocí pokrytí: *pro každé dva body* x, z *a každé stejnoměrné* r*-pokrytí* $\mathcal{G}$ *existuje konečně mnoho prvků* $\{G_0, ..., G_n\}$ *z* $\mathcal{G}$ *tak, že* $x \in G_0, y \in G_n$ *a* $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ *pro* $i = 1, ..., n$. Lze navíc požadovat, že $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Nyní je už snadné převést uvedenou formulaci do uniformních prostorů.

Lze celkem snadno ukázat, že topologický prostor X je souvislý právě když pro každé dva body x, y a každé otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ existuje konečně mnoho prvků $\{G_0, ..., G_n\}$ z $\mathcal{G}$ tak, že $x \in G_0, y \in G_n$ a $G_{i-1} \cap G_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, ..., n$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ jakmile $|i - j| > 1$.
Odtud vyplývá např., že v parakompaktních prostorech splývá souvislost se stejnoměrnou souvislostí jemných uniformit.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;$ každé spojité zobrazení souvislého prostoru do X je konstantní $\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.
Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;$ každé spojité zobrazení X do prostoru z $\mathcal{N}$ je konstantní $\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.
Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;$ každé spojité zobrazení souvislého prostoru do X je konstantní $\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.
Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;$ každé spojité zobrazení X do prostoru z $\mathcal{N}$ je konstantní $\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.
Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\}\,,$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}\,.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;$ každé spojité zobrazení souvislého prostoru do X je konstantní $\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.

Z charakterizace souvislosti zmíněné v prvním odstavci vyplyne ihned, že podobně lze popsat souvislost pomocí totální nesouvislosti:

Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;$ každé spojité zobrazení X do prostoru z $\mathcal{N}$ je konstantní $\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.
Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;$ každé spojité zobrazení souvislého prostoru do X je konstantní $\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.
Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;$ každé spojité zobrazení X do prostoru z $\mathcal{N}$ je konstantní $\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.
Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení souvislého prostoru do } X \text{ je konstantní}\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.
Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{N} \text{ je konstantní}\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.

Dostáváme jakousi dualitu, kterou lze využít pro definici jiných souvislostí a, navíc, pro definice souvislosti v jiných strukturách (např. v topologických grupách apod.). Snadno se uvedený vztah přenese do uniformních prostorů požadavkem, že uvedená zobrazení jsou stejnoměrně spojitá.

Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;$ každé spojité zobrazení souvislého prostoru do X je konstantní $\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.
Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;$ každé spojité zobrazení X do prostoru z $\mathcal{N}$ je konstantní $\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.
Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

Bylo zmíněno, že topologický prostor X je souvislý právě když každé spojité zobrazení do dvoubodového diskrétního prostoru D je konstantní.
Samozřejmě, konstantní spojitá zobrazení souvislých prostorů jsou nejen do dvoubodového diskrétního prostoru, ale i do všech diskrétních prostorů, i do nuldimenzionálních Hausdorffových prostorů. Vezměme všechny takové obory hodnot. Co dostaneme?

Třída $\mathcal{N} = \{X;$ každé spojité zobrazení souvislého prostoru do X je konstantní $\}$ se skládá ze všech totálně nesouvislých prostorů.
Třída $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \{X;$ každé spojité zobrazení X do prostoru z $\mathcal{N}$ je konstantní $\}$ se skládá ze všech souvislých prostorů.
Nechť $\mathcal{A}$ je třída topologických prostorů. Definujme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení prostoru } Y \in \mathcal{A} \text{ do } X \text{ je konstantní}\},$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{X;\ \text{každé spojité zobrazení } X \text{ do prostoru z } \mathcal{A} \text{ je konstantní}\}.$$

Prvky $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ se nazývají $\mathcal{A}$-souvislé prostory, prvky $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ se nazývají totálně $\mathcal{A}$-nesouvislé prostory.

Nyní lze vytvořit teorii $\mathcal{A}$-souvislosti, která má mnohdy stejné vlastnosti jako souvislost. A podobně pro totální $\mathcal{A}$-nesouvislost.

DEFINICE (Propojené kontinuum)

Kontinuum se nazývá propojené (aposyndetické), když pro každou dvojici bodů leží každý z nich ve vnitřku subkontinua, které neobsahuje druhý bod.

DEFINICE (Dědičně nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum se nazývá dědičně nerozložitelné, jestliže každé jeho subkontinuum je nerozložitelné.

DEFINICE (Propojené kontinuum)

Kontinuum se nazývá propojené (aposyndetické), když pro každou dvojici bodů leží každý z nich ve vnitřku subkontinua, které neobsahuje druhý bod.

DEFINICE (Dědičně nerozložitelné kontinuum)

Kontinuum se nazývá dědičně nerozložitelné, jestliže každé jeho subkontinuum je nerozložitelné.

DEFINICE (Velikost)

Funkci $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ nazýváme velikostí, když

1. pro $A, B \in 2^X$, $A \subset B$, $A \neq B$ platí $\mu(A) < \mu(B)$,
2. $\mu(\{x\}) = 0$ pro $x \in X$.

Pozorování

V kompaktním metrickém prostoru existuje velikost. [Hint. Zvolme hustou spočetnou podmnožinu $\{x_n\}$, funkce $f_n(x) = 1/(1 + d(x, x_n))$, $\mu_n(A)$ diametr $f_n(A)$ a $\mu(A)$ vážený součet $\mu_n(A)$.]
Velikosti se někdy říká Whitneyovo zobrazení.

DEFINICE (Velikost)

Funkci $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ nazýváme velikostí, když

1. pro $A, B \in 2^X$, $A \subset B$, $A \neq B$ platí $\mu(A) < \mu(B)$,
2. $\mu(\{x\}) = 0$ pro $x \in X$.

Pozorování

V kompaktním metrickém prostoru existuje velikost. [Hint. Zvolme hustou spočetnou podmnožinu $\{x_n\}$, funkce $f_n(x) = 1/(1 + d(x, x_n))$, $\mu_n(A)$ diametr $f_n(A)$ a $\mu(A)$ vážený součet $\mu_n(A)$.]
Velikosti se někdy říká Whitneyovo zobrazení.

DEFINICE (Velikost)

Funkci $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ nazýváme velikostí, když

1. pro $A, B \in 2^X$, $A \subset B$, $A \neq B$ platí $\mu(A) < \mu(B)$,
2. $\mu(\{x\}) = 0$ pro $x \in X$.

Pozorování

V kompaktním metrickém prostoru existuje velikost. [Hint. Zvolme hustou spočetnou podmnožinu $\{x_n\}$, funkce $f_n(x) = 1/(1 + d(x, x_n))$, $\mu_n(A)$ diametr $f_n(A)$ a $\mu(A)$ vážený součet $\mu_n(A)$.]
Velikosti se někdy říká Whitneyovo zobrazení.

Každý kompaktní interval v $\mathbb{R}$ je tzv. injektivní vzhledem k normálním prostorům a jejich uzavřeným podmnožinám. tj. každé spojité zobrazení z uzavřeného podprostoru normálního prostoru do kompaktního intervalu lze spojitě rozšířit na celý prostor. Tyto prostory jsou uzavřené na součiny a retrakty (jsou to právě tzv. absolutní retrakty).
Uvedený pojem můžeme zdualizovat a dostaneme tzv. projektivní objekt:

DEFINICE (Projektivní prostory)

Topologický prostor $P \in \mathcal{C}$ se nazývá projektivní vzhledem ke třídě prostorů $\mathcal{C}$ a třídě spojitých zobrazení $\mathcal{F}$, jestliže pro každé $X \in \mathcal{C}$, $f : X \to Y$ z $\mathcal{F}$ a libovolné spojité zobrazení $g : P \to Y$ existuje spojité zobrazení $\widetilde{g} : P \to X$ tak, že $f\widetilde{g} = g$.

Je snadno vidět, jak se uvedená definice upraví např. pro uniformní prostory nebo grupy,...
Je-li $\mathcal{C}$ složené ze všech kompaktních Hausdorffových prostorů a $\mathcal{F}$ ze zobrazení na kompaktní Hausdorffovy prostory, jsou projektivními objekty právě extremálně nesouvislé kompaktní prostory.

Každý kompaktní interval v $\mathbb{R}$ je tzv. injektivní vzhledem k normálním prostorům a jejich uzavřeným podmnožinám. tj. každé spojité zobrazení z uzavřeného podprostoru normálního prostoru do kompaktního intervalu lze spojitě rozšířit na celý prostor. Tyto prostory jsou uzavřené na součiny a retrakty (jsou to právě tzv. absolutní retrakty).
Uvedený pojem můžeme zdualizovat a dostaneme tzv. projektivní objekt:

DEFINICE (Projektivní prostory)

Topologický prostor $P \in \mathcal{C}$ se nazývá projektivní vzhledem ke třídě prostorů $\mathcal{C}$ a třídě spojitých zobrazení $\mathcal{F}$, jestliže pro každé $X \in \mathcal{C}$, $f : X \to Y$ z $\mathcal{F}$ a libovolné spojité zobrazení $g : P \to Y$ existuje spojité zobrazení $\widetilde{g} : P \to X$ tak, že $f\widetilde{g} = g$.

Je snadno vidět, jak se uvedená definice upraví např. pro uniformní prostory nebo grupy,...
Je-li $\mathcal{C}$ složené ze všech kompaktních Hausdorffových prostorů a $\mathcal{F}$ ze zobrazení na kompaktní Hausdorffovy prostory, jsou projektivními objekty právě extremálně nesouvislé kompaktní prostory.

Každý kompaktní interval v $\mathbb{R}$ je tzv. injektivní vzhledem k normálním prostorům a jejich uzavřeným podmnožinám. tj. každé spojité zobrazení z uzavřeného podprostoru normálního prostoru do kompaktního intervalu lze spojitě rozšířit na celý prostor. Tyto prostory jsou uzavřené na součiny a retrakty (jsou to právě tzv. absolutní retrakty).
Uvedený pojem můžeme zdualizovat a dostaneme tzv. projektivní objekt:

DEFINICE (Projektivní prostory)

Topologický prostor $P \in \mathcal{C}$ se nazývá projektivní vzhledem ke třídě prostorů $\mathcal{C}$ a třídě spojitých zobrazení $\mathcal{F}$, jestliže pro každé $X \in \mathcal{C}$, $f : X \to Y$ z $\mathcal{F}$ a libovolné spojité zobrazení $g : P \to Y$ existuje spojité zobrazení $\widetilde{g} : P \to X$ tak, že $f\widetilde{g} = g$.

Je snadno vidět, jak se uvedená definice upraví např. pro uniformní prostory nebo grupy,...
Je-li $\mathcal{C}$ složené ze všech kompaktních Hausdorffových prostorů a $\mathcal{F}$ ze zobrazení na kompaktní Hausdorffovy prostory, jsou projektivními objekty právě extremálně nesouvislé kompaktní prostory.