13. SOUVISLOST

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Speciální prostory

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou souvislé.
2. Prostor ω_1 není souvislý, dlouhá přímka je souvislá.
3. Nejvýše spočetný metrizovatelný aspoň dvoubodový prostor není souvislý.
4. Euklidovské prostory jsou souvislé.
5. Prostor $[-1,1] \times [-1,1]$ s topologií danou lexikografickým uspořádáním je souvislý. Platí tvrzení vezmete-li $\mathbb{R}^2$ místo čtverce?
6. Jednobodová kompaktifikace prostoru racionálních čísel je souvislá.
7. Prostory vytvořené pomocí skoro disjunktních soustav nejsou souvislé.
8. Nekonečné prostory s jediným hromadným bodem nejsou souvislé (najděte souvislý konečný prostor s jedním hromadným bodem).
9. Podmnožina roviny $\{(0,x); x \in [0,1]\} \cup \{(x, \sin x); x \in (0,\pi]\}$ je souvislá.

$\Rightarrow$

Spočetné prostory

- Existuje spočetný souvislý Hausdorffův prostor.
- Neexistuje spočetný souvislý regulární prostor (metrizovatelost).

A je to spočítaný.

$\Rightarrow$

Spočetné prostory

- Existuje spočetný souvislý Hausdorffův prostor.
- Neexistuje spočetný souvislý regulární prostor (metrizovatelost).

A je to spočítaný.

$\Rightarrow$

Vlastnosti souvislých množin lze často použít k zjišťování nehomeomorfních dvojic prostorů.

Aplikace souvislosti

Ukažte, že následující dvojice prostorů nejsou homeomorfní:

- $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, n : 1;
- $\mathbb{R}$ a $[0, +\infty)$;
- $[0, 1]$ a kružnice S^1;
- S^1 a kulová plocha S^2.

$\Rightarrow$

Vlastnosti souvislých množin lze často použít k zjišťování nehomeomorfních dvojic prostorů.

Aplikace souvislosti

Ukažte, že následující dvojice prostorů nejsou homeomorfní:

- $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, $n : 1$;
- $\mathbb{R}$ a $[0, +\infty)$;
- $[0, 1]$ a kružnice S^1;
- S^1 a kulová plocha S^2.

$\Rightarrow$

Vlastnosti souvislých množin lze často použít k zjišťování nehomeomorfních dvojic prostorů.

Aplikace souvislosti

Ukažte, že následující dvojice prostorů nejsou homeomorfní:

- $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$, $n : 1$;
- $\mathbb{R}$ a $[0, +\infty)$;
- $[0, 1]$ a kružnice S^1;
- S^1 a kulová plocha S^2.

$\Rightarrow$

Komponenty a kvazikomponenty

1. Popište komponenty a kvazikomponenty Sorgenfreyovy přímky a Michaelovy přímky.
2. Najděte komponenty a kvazikomponenty podprostoru X roviny $\mathbb{R}^2$ definovaného jako

$$\{(0,0)\} \cup \{(0,1)\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(1/n \times [0,1]\right).$$

3. Pomocí myšlenky předchozího příkladu najděte spočetně kompaktní lokálně kompaktní prostor, jehož komponenty a kvazikomponenty jsou různé.

$\Rightarrow$

Lokální souvislost

1. Euklidovské prostory jsou lokálně souvislé.
2. Najděte lokálně souvislý kompaktní podprostor přímky, který není souvislý.
3. Najděte souvislý uzavřený podprostor roviny, který není lokálně souvislý. Lze takový příklad najít v $\mathbb{R}$?
4. Prostor z Příkladu 9 není lokálně souvislý.
5. Nechť $X = \{n \in \mathbb{N}; n \geq 2\}$ s otevřenou bází $\{x \in X; x \text{ dělí } n\}$, $n \in X$. Prostor X je T_0 a není T_1, je souvislý i lokálně souvislý.

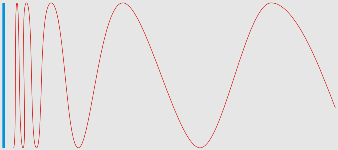
$\Rightarrow$

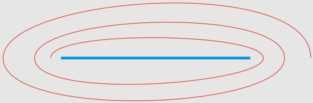
Základní kontinua

1. Základní zajímavé kontinuum je oblouk, což je kontinuum homeomorfní s intervalem $[0,1]$, krajním bodům intervalu odpovídají v kontinuu koncové body.
2. n-buňka je kontinuum homeomorfní uzavřené jednotkové kouli B^n v $\mathbb{R}^n$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$.
3. n-sféra je kontinuum homeomorfní jednotkové sféře S^n v $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x|| = 1\}$. 1-sféra se nazývá jednoduchá uzavřená křivka.
4. Hilbertova kostka je prostor homeomorfní spočetnému součinu jednotkových intervalů, uvažovaný spolu se součinovou topologií. Každé kontinuum má topologickou kopii v Hilbertově kostce.
5. $\sin(1/x)$-kontinuum je uzávěr množiny
$$\{(x, \sin(x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}.$$
6. Peanovo kontinuum se nazývá každé kontinuum, v němž má každý bod bázi souvislých okolí. Jde právě o kontinua, která jsou spojitým obrazem oblouku (Hahn-Mazurkiewicz).
7. Sierpinského kobereček je kontinuum, které vznikne rozdělením jednotkového čtverce na 9 menších čtverců (síť 3x3), vynecháním vnitřku prostředního čtverce a opakováním postupu se zbývajícími 8 čtverci. V průniku dostaneme kontinuum, obsahuje topologickou kopii každého jednodimenzionálního kontinua. Třírozměrná analogie Sierpinského koberečku se nazývá Mengerova houba, obsahuje topologickou kopii každého jednodimenzionálního separabilního metrického prostoru. Animace zde.

$\sin(1/x)$-kontinuum

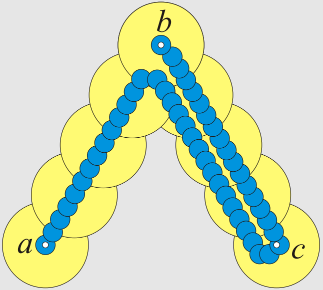
Na obrázku jsou dvě vnoření $\sin(1/x)$-kontinua do roviny.





Nerozložitelné kontinuum

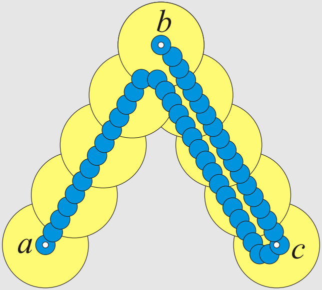
Uvažujme tři různé body a, b, c v rovině $\mathbb{R}^2$. Natáhneme řetěz kroužků z bodu a přes b do c (jde o plné kroužky v řadě za sebou, protínají se jenom sousední), jejich sjednocení nazveme C_1. Nyní v C_1 natáhneme řetěz kroužků z bodu b do c přes a, jejich sjednocení bude C_2. Pak v C_2 natáhneme řetěz kroužků z bodu a do b přes c, jejich sjednocení bude C_3. A takto to opakujeme do nekonečna. V průniku najdeme nerozložitelné kontinuum.



Když se snažíme (vedeme řetízky rovně), je každé jeho subkontinuum oblouk.

Nerozložitelné kontinuum

Uvažujme tři různé body a, b, c v rovině $\mathbb{R}^2$. Natáhneme řetěz kroužků z bodu a přes b do c (jde o plné kroužky v řadě za sebou, protínají se jenom sousední), jejich sjednocení nazveme C_1. Nyní v C_1 natáhneme řetěz kroužků z bodu b do c přes a, jejich sjednocení bude C_2. Pak v C_2 natáhneme řetěz kroužků z bodu a do b přes c, jejich sjednocení bude C_3. A takto to opakujeme do nekonečna. V průniku najdeme nerozložitelné kontinuum.



Když se snažíme (vedeme řetízky rovně), je každé jeho subkontinuum oblouk.

Pseudo-oblouk

Jde o jediné kontinuum (až na homeomorfismus), které je řetízkové a dědičně nerozložitelné.

Konstrukce pseudo-oblouku je podobná předchozímu příkladu. Navíc se požaduje, aby každý další řetízek se v předchozím řetízku choval velmi "klikatě". Obrázky jsou zde.

Typické kontinuum je pseudo-oblouk, mimojiné neobsahuje oblouk.

$\Rightarrow$

Pseudo-oblouk

Jde o jediné kontinuum (až na homeomorfismus), které je řetízkové a dědičně nerozložitelné.

Konstrukce pseudo-oblouku je podobná předchozímu příkladu. Navíc se požaduje, aby každý další řetízek se v předchozím řetízku choval velmi ”klikatě”. Obrázky jsou zde.

Typické kontinuum je pseudo-oblouk, mimojiné neobsahuje oblouk.

⇒

Pseudo-oblouk

Jde o jediné kontinuum (až na homeomorfismus), které je řetízkové a dědičně nerozložitelné.

Konstrukce pseudo-oblouku je podobná předchozímu příkladu. Navíc se požaduje, aby každý další řetízek se v předchozím řetízku choval velmi "klikatě". Obrázky jsou zde.

Typické kontinuum je pseudo-oblouk, mimojiné neobsahuje oblouk.

$\Rightarrow$

p-adický selenoid

Nechť je dáno $p \geq 2$ přirozené. Uvažujme jednotkovou kružnici S^1 jako podmnožinu komplexní roviny. Pak p-tá mocnina $z^p : z \mapsto z^p$ zobrazuje S^1 samu na sebe (p-krát dokola). p-adický selenoid je

$$\sum_p = \varprojlim \{S^1, z^p\}_{n=1}^{\infty} .$$

Pro $n = 2$ se používá pojmenování dyadický selenoid. Obrázek zde.

Vlastnosti

1. Jde o nerozložitelné kontinuum homeomorfní s kontinuem v $\mathbb{R}^3$, které získáme, když v anuloidu sestrojíme anuloid, který jej projde dvakrát a tento proces opakujeme donekonečna.
2. Ukažte, že p-adický selenoid je topologickou grupou.
3. Ukažte, že $\sum_p$ je homogenní (existuje homeomorfismus vyměňující danou dvojici bodů).
4. Dokažte, že každé nedegenerované vlastní subkontinuum $\sum_p$ je oblouk.
5. Předchozí dvě vlastnosti charakterizují p-adické selenoidy.

p-adický selenoid

Nechť je dáno $p \geq 2$ přirozené. Uvažujme jednotkovou kružnici S^1 jako podmnožinu komplexní roviny. Pak p-tá mocnina $z^p : z \mapsto z^p$ zobrazuje S^1 samu na sebe (p-krát dokola). p-adický selenoid je

$$\sum_p = \varprojlim \{S^1, z^p\}_{n=1}^{\infty} .$$

Pro $n = 2$ se používá pojmenování dyadický selenoid. Obrázek zde.

Vlastnosti

1. Jde o nerozložitelné kontinuum homeomorfní s kontinuem v $\mathbb{R}^3$, které získáme, když v anuloidu sestrojíme anuloid, který jej projde dvakrát a tento proces opakujeme donekonečna.
2. Ukažte, že p-adický selenoid je topologickou grupou.
3. Ukažte, že $\sum_p$ je homogenní (existuje homeomorfismus vyměňující danou dvojici bodů).
4. Dokažte, že každé nedegenerované vlastní subkontinuum $\sum_p$ je oblouk.
5. Předchozí dvě vlastnosti charakterizují p-adické selenoidy.

$\Rightarrow$

Podkova

Uvažujme po částech lineární zobrazení $g : [0,1] \to [0,1]$ splňující $g(0) = g(1) = 0$, $g(1/2) = 1$. Pro $\lim_{\leftarrow}\{[0,1], g\}_{n=1}^{\infty}$ se používá pojmenování podkova. Obrázky zde.

$\sin(1/x)$-kontinuum

1. Která ze stanových funkcí použita jako lepicí funkce mezi jednotkovými intervaly generuje jako inverzní limitu oblouk, $\sin(1/x)$-kontinuum či kontinuum obsahující nerozložitelné kontinuum.
2. Uvažte dvě kopie $\sin(1/x)$-kontinua aproximující dvě polokružnice jednotkové kružnice (vše v rovině). Podobně jako v předchozím příkladě získejte kontinuum, které dědičně rozděluje rovinu, je dědičně rozložitelné a neobsahuje oblouk.
3. Dovedete $\sin(1/x)$-kontinuum vytvořit pomocí Choquet-Andersonovy věty?
4. $\sin(1/x)$-kontinuum je oblouku-podobné a proto lze napsat jako inverzní limita oblouků s lepícími zobrazeními, která jsou na.
5. V $\sin(1/x)$-kontinuu lze nahradit zvolený oblouk zmenšenou kopií $\sin(1/x)$-kontinua. V takto získaném kontinuu lze tuto operaci opakovat a po nekonečně mnoha šikovných (hustých) krocích získáme kontinuum, které je dědičně rozložitelné, a navíc neobsahuje oblouk. Dovedete postup popsat jako inverzní limitění?

Pozorování

1. Inverzní limita oblouků mnemůže obsahovat kružnici ani triodu (prostor homeomorfní s písmenem T).
2. Inverzní limita oblouků mnemůže obsahovat kružnici ani triodu (prostor homeomorfní s písmenem T).
3. Hilbertova kostka lze napsat jako inverzní limita, kde X_n jsou n-buňky.

Projektivní n-prostor

Nechť dělení $\mathcal{D}$ na n-sféře S^n identifikuje protilehlé body

$$\mathcal{D} = \{\{z, -z\} : z \in S^n\}.$$

Identifikace podle tohoto dělení vytváří projektivní n-prostor, který značíme P^n.

Jde ukázat, že se jedná o n-rozměrnou varietu.

Pro $n = 2$ dostaneme P^2, projektivní sféra, která nelze vnořit do $\mathbb{R}^3$, ale jde vnořit do $\mathbb{R}^4$. Animace je zde.

$\Rightarrow$

Projektivní n-prostor

Nechť dělení $\mathcal{D}$ na n-sféře S^n identifikuje protilehlé body

$$\mathcal{D} = \{\{z, -z\} : z \in S^n\}.$$

Identifikace podle tohoto dělení vytváří projektivní n-prostor, který značíme P^n.

Jde ukázat, že se jedná o n-rozměrnou varietu.

Pro $n = 2$ dostaneme P^2, projektivní sféra, která nelze vnořit do $\mathbb{R}^3$, ale jde vnořit do $\mathbb{R}^4$. Animace je zde.

$\Rightarrow$

Projektivní n-prostor

Nechť dělení $\mathcal{D}$ na n-sféře S^n identifikuje protilehlé body

$$\mathcal{D} = \{\{z, -z\} : z \in S^n\}.$$

Identifikace podle tohoto dělení vytváří projektivní n-prostor, který značíme P^n.

Jde ukázat, že se jedná o n-rozměrnou varietu.

Pro $n = 2$ dostaneme P^2, projektivní sféra, která nelze vnořit do $\mathbb{R}^3$, ale jde vnořit do $\mathbb{R}^4$. Animace je zde.

$\Rightarrow$

Moebiusova páska

Moebiusova páska vznikne z jednotkového čtverce identifikací bodů $(x, 0)$ a $(x, 1)$, $0 \le x \le 1$.

Animace je zde.

Jde o kontinuum, které je příkladem jednostranné plochy v $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$

Moebiusova páska

Moebiusova páska vznikne z jednotkového čtverce identifikací bodů $(x, 0)$ a $(x, 1)$, $0 \leq x \leq 1$.

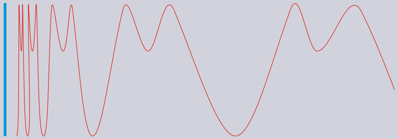
Animace je zde.

Jde o kontinuum, které je příkladem jednostranné plochy v $\mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$

M-kontinuum

Identifikací bodů $(0, y)$ a $(0, 1 - y)$, $0 \leq y < 1/2$, v $\sin(1/x)$-kontinuu dostaneme M-kontinuum.



DEFINICE (Topologický kužel)

Nechť X je topologický prostor,v kartézském součinu $S = X \times [0,1]$ se součinovou topologií označme $A = \{(x,1) : x \in X\}$. Identifikace S/A se nazývá topologický kužel nad X. Značíme $TC(X)$. V tomto kuželu je vrchol bod A, základna je obraz $X \times \{0\}$ při přirozeném zobrazení π.

DEFINICE (Topologický kužel)

Nechť X je topologický prostor,v kartézském součinu $S = X \times [0,1]$ se součinovou topologií označme $A = \{(x,1) : x \in X\}$. Identifikace S/A se nazývá topologický kužel nad X. Značíme $TC(X)$. V tomto kuželu je vrchol bod A, základna je obraz $X \times \{0\}$ při přirozeném zobrazení π.

Obrázek je zde.

DEFINICE (Topologický kužel)

Nechť X je topologický prostor,v kartézském součinu $S = X \times [0,1]$ se součinovou topologií označme $A = \{(x,1) : x \in X\}$. Identifikace S/A se nazývá topologický kužel nad X. Značíme $TC(X)$. V tomto kuželu je vrchol bod A, základna je obraz $X \times \{0\}$ při přirozeném zobrazení π.

Obrázek je zde.

Topologický kužel

1. Kužel je vždy obloukově souviský.
2. Pro X kompaktní je $TC(X)$ kontinuum.
3. Pro X kompaktní metrický prostor je $TC(X)$ homeomorfní s geometrickým kuželem (vnoříme do Hilbertovy kostky a ...).
4. Dvojnásobný kužel $TC(TC(X))$ je homeomorfní s $TC(X) \times [0,1]$.
5. V kuželu jde dělat identifikace podle základny a hrát si.

$\Rightarrow$

Projektivní prostor P^n

1. Projektivní prostor P^n je homeomorfní dělení

$$\mathcal{D} = \{D_v : v \in R^{n+1} \setminus \{\Theta\}\},$$

kde

$$D_v = \{t.v : t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}\}$$

prostoru $R^{n+1} \setminus \{\Theta\}$ (zde Θ je počátek) .

2. Projektivní prostor P^2 je homeomorfní dělení jednotkového kruhu, které identifikuje protilehlé body na jednotkové kružnici. Podobně P^n.
3. Projektivní prostor P^2 lze vnořit do $\mathbb{R}^4$. [Hint. Použijte zobrazení $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$.]
4. Projektivní prostor P^2 vznikne přilepením Moebiusova pásku svým okrajem k jednotkové kružnici ohraničující jednotkový kruh.
5. Projektivní prostor P^n neobsahuje n-sféru S^n (pro $n > 1$).

Pro $n = 2$ dostaneme P^2, projektivní sféra, která nelze vnořit do $\mathbb{R}^3$, ale jde vnořit do $\mathbb{R}^4$. Animace je zde.

Projektivní prostor P^n

1. Projektivní prostor P^n je homeomorfní dělení

$$\mathcal{D} = \{D_v : v \in R^{n+1} \setminus \{\Theta\}\},$$

kde $$D_v = \{t.v : t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}\}$$

prostoru $R^{n+1} \setminus \{\Theta\}$ (zde Θ je počátek) .

2. Projektivní prostor P^2 je homeomorfní dělení jednotkového kruhu, které identifikuje protilehlé body na jednotkové kružnici. Podobně P^n.
3. Projektivní prostor P^2 lze vnořit do $\mathbb{R}^4$. [Hint. Použijte zobrazení $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$.]
4. Projektivní prostor P^2 vznikne přilepením Moebiusova pásku svým okrajem k jednotkové kružnici ohraničující jednotkový kruh.
5. Projektivní prostor P^n neobsahuje n-sféru S^n (pro $n > 1$).

Pro $n = 2$ dostaneme P^2, projektivní sféra, která nelze vnořit do $\mathbb{R}^3$, ale jde vnořit do $\mathbb{R}^4$. Animace je zde.

usc dělení

1. Dokažte, že ze separabilního metrického prostoru usc dělením, jehož prvky jsou kompaktní v původním prostoru, získáme separabilní metrický prostor.
2. Nechť (S, T) je topologický prostor a nechť $(\mathcal{D}, T(\mathcal{D}))$ je dělení S. Dokažte, že $\mathcal{D}$ je usc právě když pro každou $U \in T$ platí
$$\{D \in \mathcal{D} : D \subset U\} \in T(\mathcal{D}).$$

$\Rightarrow$

Hyperprostor

1. Hyperprostor $C([0,1])$ jednotkového intervalu je homeomorfní s trojúhelníkem.
2. Hyperprostor $2^{[0,1]}$ jednotkového intervalu obsahuje Hilbertovu kostku (to platí o 2^X pro libovolné nedegenerované kontinuum X).

$\Rightarrow$

Pozorování

1. Sestrojte posloupnost souvislých podmnožin nekompaktního prostoru, jejíž limita je nesouvislá.
2. Sestrojte lokálně kompaktní souvislou podmnožinu roviny, která je sjednocením spočetně mnoha neprázdných, navzájem disjunktních uzavřených souvislých množin.
3. Nalezněte příklad kontinua, které je v daném bodě cik, ale není v tomto bodě lokálně souvislé.

$\Rightarrow$

Pozorování

1. Sestrojte posloupnost souvislých podmnožin nekompaktního prostoru, jejíž limita je nesouvislá.
2. Sestrojte lokálně kompaktní souvislou podmnožinu roviny, která je sjednocením spočetně mnoha neprázdných, navzájem disjunktních uzavřených souvislých množin.
3. Nalezněte příklad kontinua, které je v daném bodě cik, ale není v tomto bodě lokálně souvislé.

$\Rightarrow$

Pozorování

1. Sestrojte posloupnost souvislých podmnožin nekompaktního prostoru, jejíž limita je nesouvislá.
2. Sestrojte lokálně kompaktní souvislou podmnožinu roviny, která je sjednocením spočetně mnoha neprázdných, navzájem disjunktních uzavřených souvislých množin.
3. Nalezněte příklad kontinua, které je v daném bodě cik, ale není v tomto bodě lokálně souvislé.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Koncový bod)

Nechť (X, T) je kontinuum. Bod $p \in X$ se nazývá koncový bod X, pokud v libovolném okolí $U \in T$ existuje okolí $V \in T$, $p \in V \subset U$, které má jednobodovou hranici v X.

Koncový bod

1. lze uvažovat i neotevřená okolí
2. koncový bod je ne-kat
3. koncový bod má libovolně malá otevřená okolí, jejichž doplněk je souvislý (neplatilo by pro uzavřená okolí)
4. v koncovém bodě je kontinuum cik (nemusí být v bodě lokálně souvislé)
5. Je-li X ireducibilní mezi p a q, pak p a q jsou ne-kat body X a jediné možné koncové body X.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Koncový bod)

Nechť (X, T) je kontinuum. Bod $p \in X$ se nazývá koncový bod X, pokud v libovolném okolí $U \in T$ existuje okolí $V \in T$, $p \in V \subset U$, které má jednobodovou hranici v X.

Koncový bod

1. lze uvažovat i neotevřená okolí
2. koncový bod je ne-kat
3. koncový bod má libovolně malá otevřená okolí, jejichž doplněk je souvislý (neplatilo by pro uzavřená okolí)
4. v koncovém bodě je kontinuum cik (nemusí být v bodě lokálně souvislé)
5. Je-li X ireducibilní mezi p a q, pak p a q jsou ne-kat body X a jediné možné koncové body X.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Koncový bod)

Nechť (X, T) je kontinuum. Bod $p \in X$ se nazývá koncový bod X, pokud v libovolném okolí $U \in T$ existuje okolí $V \in T$, $p \in V \subset U$, které má jednobodovou hranici v X.

Koncový bod

1. lze uvažovat i neotevřená okolí
2. koncový bod je ne-kat
3. koncový bod má libovolně malá otevřená okolí, jejichž doplněk je souvislý (neplatilo by pro uzavřená okolí)
4. v koncovém bodě je kontinuum cik (nemusí být v bodě lokálně souvislé)
5. Je-li X ireducibilní mezi p a q, pak p a q jsou ne-kat body X a jediné možné koncové body X.

$\Rightarrow$

Hyperprostory

1. Nechť $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Pak 2^X je homeomorfní Cantorově množině doplněné o středy vynechaných úseček.
2. Jestliže nedegenerované Peanovo kontinuum není oblouk, obsahuje jednoduchou uzavřenou křivku nebo jednoduchou triodu.
3. Prostor X je Peanovo kontinuum právě tehdy, když jeho hyperprostor (2^X nebo $C(X)$) je Peanovo kontinuum.

$\Rightarrow$

Monotónní obraz

1. Monotónní obraz jednoduché uzavřené křivky je jednoduchá uzavřená křivka.
2. Monotónní obraz grafu je graf.
3. Monotónní obraz dendritu je dendrit.

$\Rightarrow$

Otevřené zobrazení kontinua

Nechť $f : X \to Y$ je otevřené zobrazení kontinua X na kontinuum Y. Pak

1. $\mathrm{Bd}(f(U)) \subset f(\mathrm{Bd}(U))$ pro U otevřenou
2. $\mathrm{ord}(f(p), Y) \leq \mathrm{ord}(p, X)$ pro $p \in X$.
3. Je-li X graf, je Y graf.
4. Je-li X oblouk a Y nedegenerované, je Y oblouk.
5. Je-li X jednoduchá uzavřená křivka, je Y bod, oblouk nebo jednoduchá uzavřená křivka.

$\Rightarrow$

Dendrity

1. Gehmanův dendrit má větvící body pouze řádu 3 a nespočetně mnoho koncových bodů v uzávěru větvících bodů ....
2. D_n dendrit vznikne z jednoduché n-ody postupným přidáváním $(n-2)$-od k prostředním bodům volných oblouků.

$\Rightarrow$

Trioda

1. Hilbertova kostka je trioda.
2. Kruh je trioda.
3. Nerozložitelné kontinuum není trioda.
4. Trioda je ireducibilní.
5. Šestka je slabá trioda, která není trioda.
6. Slabá trioda není ireducibilní.
7. Každá trioda je slabá trioda.

$\Rightarrow$

Ireducibilní subkontinuum

Nechť X a Y jsou kontinua a f je spojité zobrazení X na Y. Jestliže Y je ireducibilní, pak X obsahuje ireducibilní subkontinuum A takové, že $f(A) = Y$.

$\Rightarrow$

Oblouku-podobná kontinua

1. Jestliže je kontinuum zároveň oblouku-podobné a kružnici-podobné, pak je buď nerozložitelné, nebo je sjednocením dvou nerozložitelných kontinuí.
2. Každé nedegenerované vlastní subkontinuum kružnici-podobného kontinua je oblouku-podobné.
3. p-adický selenoid je netriodický, dědičně unikoherentní a není oblouku-podobný.

$\Rightarrow$

Totální nesouvislost

1. Cantorův prostor a prostory racionálních nebo iracionálních čísel jsou totálně nesouvislé.
2. Sorgenfreyova přímka a Michaelova přímka jsou totálně nesouvislé prostory.
3. $\beta\mathbb{N}$ je totálně nesouvislý.
4. Indiskrétní prostory jsou nuldimenzionální a nemusí být totálně nesouvislé.
5. Nechť X je prostor složený ze dvou úseček $L_0 = (0,1] \times \{0\}$ a $L_1 = [0,1) \times \{1\}$ s topologií definovanou pomocí báze okolí: bázové okolí bodu $(p,0)$ z L_0 je $(p-r,p] \times (p-r,p)$ a bodu $(q,1)$ z L_1 je $[q,q+r) \times \{1\}$. Tento prostor je totálně nesouvislý a není nuldimenzionální (není regulární).
6. Podprostor racionálních posloupností v Hilbertově prostoru (tj. metrickém prostoru všech posloupností $\{x_n\}$ reálných čísel s vlastností $\sum |x_n^2| < +\infty$ a s metrikou $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \left(\sum |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$) je totálně nesouvislý a není nuldimenzionální.

Ve všech předchozích příkladech lze psát místo totální nesouvislosti totální separovanost.

Totální nesouvislost

1. Cantorův prostor a prostory racionálních nebo iracionálních čísel jsou totálně nesouvislé.
2. Sorgenfreyova přímka a Michaelova přímka jsou totálně nesouvislé prostory.
3. $\beta\mathbb{N}$ je totálně nesouvislý.
4. Indiskrétní prostory jsou nuldimenzionální a nemusí být totálně nesouvislé.
5. Nechť X je prostor složený ze dvou úseček $L_0 = (0,1] \times \{0\}$ a $L_1 = [0,1) \times \{1\}$ s topologií definovanou pomocí báze okolí: bázové okolí bodu $(p,0)$ z L_0 je $(p-r,p] \times (p-r,p)$ a bodu $(q,1)$ z L_1 je $[q,q+r) \times \{1\}$. Tento prostor je totálně nesouvislý a není nuldimenzionální (není regulární).
6. Podprostor racionálních posloupností v Hilbertově prostoru (tj. metrickém prostoru všech posloupností $\{x_n\}$ reálných čísel s vlastností $\sum |x_n^2| < +\infty$ a s metrikou $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \left(\sum |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$) je totálně nesouvislý a není nuldimenzionální.

Ve všech předchozích příkladech lze psát místo totální nesouvislosti totální separovanost.

$\Rightarrow$

Totální nesouvislost versus totální separovanost

1. Zavedeme do roviny novou topologii. Každý bod s racionálními koeficienty bude izolovaný. Ostatní body z mají bázová okolí tvaru $\{z\} \cup \{(x, y) \in U; x, y,$ racionální, kde U probíhá kruhy se středem v z. Tento prostor není regulární, je totálně nesouvislý, není totálně separovaný.
2. Spojme v rovině každý bod Cantorovy množiny C úsečkou s bodem (1/2,1/2) a na těchto úsečkách nechme buď jen body s druhou racionální souřadnicí pokud spojujeme bod (1/2,1/2) s bodem tvaru $k/3^n$ z C nebo iracionální ve zbývajících případech. Tento podprostor roviny je souvislý. Po vynechání bodu (1/2,1/2) zůstane totálně nesouvislý prostor, který není totálně separovaný.

$\Rightarrow$

Beta obaly a nesouvislost

1. $\beta\mathbb{N}$ je extremálně nesouvislý.
2. $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ není extremálně nesouvislý (takže ne každý silně nuldimenzionální prostor je extremálně nesouvislý).
3. $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$ není extremálně nesouvislý (takže $\beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$ není homeomorfní s $\beta(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$).

$\Rightarrow$