OBECNÁ TOPOLOGIE

Učení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2010

Někdy je docela těžké rozhodnout, zda nějaký prostor je či není souvislý.

Například?

Uvažujme prostor, jehož nosnou množinu tvoří dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$.

Jak bude zadaná topologie?

Její subbáze bude sestávat ze všech množin tvaru $\{x\} \cup A \cup B$, kde x je libovolný bod roviny a A a B jsou disjunktní otevřené kruhy, jejichž obvodové kružnice se protínají právě v bodě x.

Někdy je docela těžké rozhodnout, zda nějaký prostor je či není souvislý.

Například?

Uvažujme prostor, jehož nosnou množinu tvoří dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$.

Jak bude zadaná topologie?

Její subbáze bude sestávat ze všech množin tvaru $\{x\} \cup A \cup B$, kde x je libovolný bod roviny a A a B jsou disjunktní otevřené kruhy, jejichž obvodové kružnice se protínají právě v bodě x.

Někdy je docela těžké rozhodnout, zda nějaký prostor je či není souvislý.

Například?

Uvažujme prostor, jehož nosnou množinu tvoří dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$.

Jak bude zadaná topologie?

Její subbáze bude sestávat ze všech množin tvaru $\{x\} \cup A \cup B$, kde x je libovolný bod roviny a A a B jsou disjunktní otevřené kruhy, jejichž obvodové kružnice se protínají právě v bodě x.

Někdy je docela těžké rozhodnout, zda nějaký prostor je či není souvislý.

Například?

Uvažujme prostor, jehož nosnou množinu tvoří dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$.

Jak bude zadaná topologie?

Její subbáze bude sestávat ze všech množin tvaru $\{x\} \cup A \cup B$, kde x je libovolný bod roviny a A a B jsou disjunktní otevřené kruhy, jejichž obvodové kružnice se protínají právě v bodě x.

Někdy je docela těžké rozhodnout, zda nějaký prostor je či není souvislý.

Například?

Uvažujme prostor, jehož nosnou množinu tvoří dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$.

Jak bude zadaná topologie?

Její subbáze bude sestávat ze všech množin tvaru $\{x\} \cup A \cup B$, kde x je libovolný bod roviny a A a B jsou disjunktní otevřené kruhy, jejichž obvodové kružnice se protínají právě v bodě x.

Někdy je docela těžké rozhodnout, zda nějaký prostor je či není souvislý.

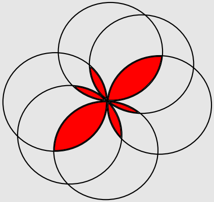
Například?

Uvažujme prostor, jehož nosnou množinu tvoří dvojice reálných čísel $\mathbb{R}^2$.

Jak bude zadaná topologie?

Její subbáze bude sestávat ze všech množin tvaru $\{x\} \cup A \cup B$, kde x je libovolný bod roviny a A a B jsou disjunktní otevřené kruhy, jejichž obvodové kružnice se protínají právě v bodě x.

Typické otevřené okolí nějakého bodu tedy může vypadat třeba jako taková kytička:



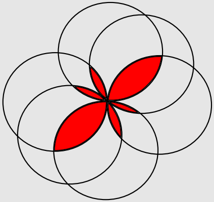
Tato topologie je jemnější než euklidovská topologie na $\mathbb{R}^2$.

A opravdu je takový prostor souvislý? Vždyť každá úsečka zdědí diskrétní topologii.

I přesto je uvedený prostor souvislý.

Zajímalo by mě, jak se to dokáže.

Typické otevřené okolí nějakého bodu tedy může vypadat třeba jako taková kytička:



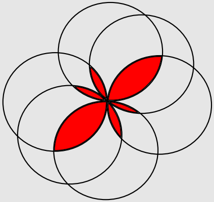
Tato topologie je jemnější než euklidovská topologie na $\mathbb{R}^2$.

A opravdu je takový prostor souvislý? Vždyť každá úsečka zdědí diskrétní topologii.

I přesto je uvedený prostor souvislý.

Zajímalo by mě, jak se to dokáže.

Typické otevřené okolí nějakého bodu tedy může vypadat třeba jako taková kytička:



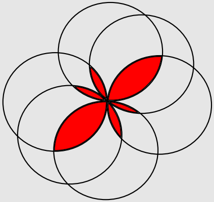
Tato topologie je jemnější než euklidovská topologie na $\mathbb{R}^2$.

A opravdu je takový prostor souvislý? Vždyť každá úsečka zdědí diskrétní topologii.

I přesto je uvedený prostor souvislý.

Zajímalo by mě, jak se to dokáže.

Typické otevřené okolí nějakého bodu tedy může vypadat třeba jako taková kytička:



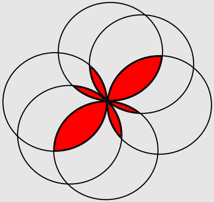
Tato topologie je jemnější než euklidovská topologie na $\mathbb{R}^2$.

A opravdu je takový prostor souvislý? Vždyť každá úsečka zdědí diskrétní topologii.

I přesto je uvedený prostor souvislý.

Zajímalo by mě, jak se to dokáže.

Typické otevřené okolí nějakého bodu tedy může vypadat třeba jako taková kytička:



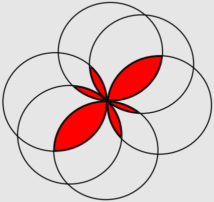
Tato topologie je jemnější než euklidovská topologie na $\mathbb{R}^2$.

A opravdu je takový prostor souvislý? Vždyť každá úsečka zdědí diskrétní topologii.

I přesto je uvedený prostor souvislý.

Zajímalo by mě, jak se to dokáže.

Typické otevřené okolí nějakého bodu tedy může vypadat třeba jako taková kytička:



Tato topologie je jemnější než euklidovská topologie na $\mathbb{R}^2$.

A opravdu je takový prostor souvislý? Vždyť každá úsečka zdědí diskrétní topologii.

I přesto je uvedený prostor souvislý.

Zajímalo by mě, jak se to dokáže.

Zkusíme dokázat obecnější tvrzení. Definujeme si na $\mathbb{R}^2$ takzvanou hustotní topologii.

DEFINICE (Hustotní topologie v rovině)

O měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ řekneme, že je otevřená (v hustotní topologii), pokud každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. To znamená, že

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(M \cap I(x,\delta))}{\mu(I(x,\delta))} = 1.$$

Písmeno μ zde značí Lebesgueovu míru a $I(x,\delta)$ je čtverec o straně délky δ se středem v bodě x.

Není úplně snadné ověřit, že se jedná o topologii. Je potřeba totiž zdůvodnit, že sjednocení libovolného systému měřitelných množin s danou vlastností je opět měřitelná.

Hustotní topologie je ještě jemnější než kytičková. Takže pokud dokážeme, že rovina s hustotní topologií je souvislý prostor, budeme vědět, že i rovina s kytičkovou topologií je souvislá.

Pustíme se do toho.

Zkusíme dokázat obecnější tvrzení. Definujeme si na $\mathbb{R}^2$ takzvanou hustotní topologii.

DEFINICE (Hustotní topologie v rovině)

O měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ řekneme, že je otevřená (v hustotní topologii), pokud každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. To znamená, že

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(M \cap I(x,\delta))}{\mu(I(x,\delta))} = 1.$$

Písmeno μ zde značí Lebesgueovu míru a $I(x,\delta)$ je čtverec o straně délky δ se středem v bodě x.

Není úplně snadné ověřit, že se jedná o topologii. Je potřeba totiž zdůvodnit, že sjednocení libovolného systému měřitelných množin s danou vlastností je opět měřitelná.

Hustotní topologie je ještě jemnější než kytičková. Takže pokud dokážeme, že rovina s hustotní topologií je souvislý prostor, budeme vědět, že i rovina s kytičkovou topologií je souvislá.

Pustíme se do toho.

Zkusíme dokázat obecnější tvrzení. Definujeme si na $\mathbb{R}^2$ takzvanou hustotní topologii.

DEFINICE (Hustotní topologie v rovině)

O měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ řekneme, že je otevřená (v hustotní topologii), pokud každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. To znamená, že

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(M \cap I(x,\delta))}{\mu(I(x,\delta))} = 1.$$

Písmeno μ zde značí Lebesgueovu míru a $I(x,\delta)$ je čtverec o straně délky δ se středem v bodě x.

Není úplně snadné ověřit, že se jedná o topologii. Je potřeba totiž zdůvodnit, že sjednocení libovolného systému měřitelných množin s danou vlastností je opět měřitelná.

Hustotní topologie je ještě jemnější než kytičková. Takže pokud dokážeme, že rovina s hustotní topologií je souvislý prostor, budeme vědět, že i rovina s kytičkovou topologií je souvislá.

Pustíme se do toho.

Zkusíme dokázat obecnější tvrzení. Definujeme si na $\mathbb{R}^2$ takzvanou hustotní topologii.

DEFINICE (Hustotní topologie v rovině)

O měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ řekneme, že je otevřená (v hustotní topologii), pokud každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. To znamená, že

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(M \cap I(x,\delta))}{\mu(I(x,\delta))} = 1.$$

Písmeno μ zde značí Lebesgueovu míru a $I(x,\delta)$ je čtverec o straně délky δ se středem v bodě x.

Není úplně snadné ověřit, že se jedná o topologii. Je potřeba totiž zdůvodnit, že sjednocení libovolného systému měřitelných množin s danou vlastností je opět měřitelná.

Hustotní topologie je ještě jemnější než kytičková. Takže pokud dokážeme, že rovina s hustotní topologií je souvislý prostor, budeme vědět, že i rovina s kytičkovou topologií je souvislá.

Pustíme se do toho.

Zkusíme dokázat obecnější tvrzení. Definujeme si na $\mathbb{R}^2$ takzvanou hustotní topologii.

DEFINICE (Hustotní topologie v rovině)

O měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ řekneme, že je otevřená (v hustotní topologii), pokud každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. To znamená, že

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(M \cap I(x, \delta))}{\mu(I(x, \delta))} = 1.$$

Písmeno μ zde značí Lebesgueovu míru a $I(x, \delta)$ je čtverec o straně délky δ se středem v bodě x.

Není úplně snadné ověřit, že se jedná o topologii. Je potřeba totiž zdůvodnit, že sjednocení libovolného systému měřitelných množin s danou vlastností je opět měřitelná.

Hustotní topologie je ještě jemnější než kytičková. Takže pokud dokážeme, že rovina s hustotní topologií je souvislý prostor, budeme vědět, že i rovina s kytičkovou topologií je souvislá.

Pustíme se do toho.

Zkusíme dokázat obecnější tvrzení. Definujeme si na $\mathbb{R}^2$ takzvanou hustotní topologii.

DEFINICE (Hustotní topologie v rovině)

O měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ řekneme, že je otevřená (v hustotní topologii), pokud každý bod $x \in M$ je bodem hustoty množiny M. To znamená, že

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mu(M \cap I(x, \delta))}{\mu(I(x, \delta))} = 1.$$

Písmeno μ zde značí Lebesgueovu míru a $I(x, \delta)$ je čtverec o straně délky δ se středem v bodě x.

Není úplně snadné ověřit, že se jedná o topologii. Je potřeba totiž zdůvodnit, že sjednocení libovolného systému měřitelných množin s danou vlastností je opět měřitelná.

Hustotní topologie je ještě jemnější než kytičková. Takže pokud dokážeme, že rovina s hustotní topologií je souvislý prostor, budeme vědět, že i rovina s kytičkovou topologií je souvislá.

Pustíme se do toho.

TVRZENÍ

Rovina s hustotní topologií je souvislý prostor.

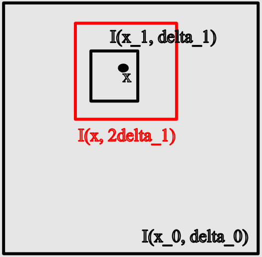
Důkaz.

Předpokládejme pro spor, že existují disjunktní neprázdné měřitelné množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, jejichž sjednocením je celá rovina a jejichž každý bod je jejich bodem hustoty.
Vezměme nějaký bod $a \in A$ a $b \in B$ a najděme $\delta_0 > 0$ takové, že $\mu(A \cap I(a, \delta_0)) > \frac{1}{2}\mu(I(a, \delta_0))$ a $\mu(B \cap I(b, \delta_0)) > \frac{1}{2}\mu(I(b, \delta_0))$. Následně uvažujme funkci

$$\varphi(x) = \frac{\mu(A \cap I(x, \delta_0))}{\mu(I(x, \delta_0))}.$$

Tato funkce má v bodě a hodnotu větší než $\frac{1}{2}$ a v bodě b hodnotu menší než $\frac{1}{2}$. Proto musí na úsečce spojující body a a b existovat nějaký bod x_0, pro který $\varphi(x_0) = \frac{1}{2}$.
Celý postup můžeme opakovat v rámci množiny $I(x_0, \delta_0)$. Najdeme $x_1 \in I(x_0, \delta_0)$ a $\delta_1 < \frac{1}{2}\delta_0$ taková, že $I(x_1, \delta_1) \subseteq I(x_0, \delta_0)$ a $\frac{\mu(A \cap I(x_1, \delta_1))}{\mu(I(x_1, \delta_1))} = \frac{1}{2}$. Opakováním získáme cauchyovskou posloupnost bodů x_n, která nutně konverguje k nějakému bodu x. Nyní ale dostáváme, že $\frac{\mu(A \cap I(x, 2\delta_n))}{\mu(I(x, 2\delta_n))} \leq \frac{7}{8}$, neboť ve čtverci $I(x, 2\delta_n)$ tvoří čtverec $I(x_n, \delta_n)$ jednu čtvrtinu a jeho jedna polovina je tvořená množinou B. Podobně $\frac{\mu(B \cap I(x, 2\delta_n))}{\mu(I(x, 2\delta_n))} \leq \frac{7}{8}$. Bod x tedy nemůže být bodem hustoty ani množiny A ani množiny B. Tím dostáváme spor. $\square$

Argumentace druhé části důkazu se nejlépe pochopí s pomocí obrázku.

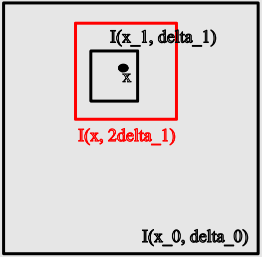


Čtverec $I(x_1, \delta_1)$ má čtvrtinový obsah oproti červenému čtverci $I(x, 2\delta_1)$, takže alespoň jedna osmina červeného čtverce je vyplněna množinou B. Proto těch $\frac{7}{8}$.

Teď už si snadno rozmyslíš, že hustotní topologie se dá definovat na euklidovském prostoru libovolné dimenze. Důkaz její souvislosti je pak jenom modifikací našeho postupu.

Jen místo té konstanty $\frac{7}{8}$ již bude nějaká jiná, závisející na dimenzi prostoru.

Argumentace druhé části důkazu se nejlépe pochopí s pomocí obrázku.

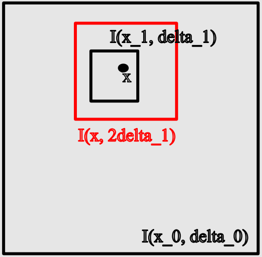


Čtverec $I(x_1, \delta_1)$ má čtvrtinový obsah oproti červenému čtverci $I(x, 2\delta_1)$, takže alespoň jedna osmina červeného čtverce je vyplněna množinou B. Proto těch $\frac{7}{8}$.

Teď už si snadno rozmyslíš, že hustotní topologie se dá definovat na euklidovském prostoru libovolné dimenze. Důkaz její souvislosti je pak jenom modifikací našeho postupu.

Jen místo té konstanty $\frac{7}{8}$ již bude nějaká jiná, závisející na dimenzi prostoru.

Argumentace druhé části důkazu se nejlépe pochopí s pomocí obrázku.

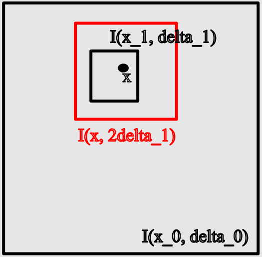


Čtverec $I(x_1, \delta_1)$ má čtvrtinový obsah oproti červenému čtverci $I(x, 2\delta_1)$, takže alespoň jedna osmina červeného čtverce je vyplněna množinou B. Proto těch $\frac{7}{8}$.

Teď už si snadno rozmyslíš, že hustotní topologie se dá definovat na euklidovském prostoru libovolné dimenze. Důkaz její souvislosti je pak jenom modifikací našeho postupu.

Jen místo té konstanty $\frac{7}{8}$ již bude nějaká jiná, závisející na dimenzi prostoru.

Argumentace druhé části důkazu se nejlépe pochopí s pomocí obrázku.

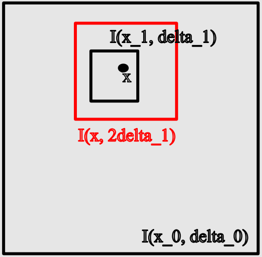


Čtverec $I(x_1, \delta_1)$ má čtvrtinový obsah oproti červenému čtverci $I(x, 2\delta_1)$, takže alespoň jedna osmina červeného čtverce je vyplněna množinou B. Proto těch $\frac{7}{8}$.

Teď už si snadno rozmyslíš, že hustotní topologie se dá definovat na euklidovském prostoru libovolné dimenze. Důkaz její souvislosti je pak jenom modifikací našeho postupu.

Jen místo té konstanty $\frac{7}{8}$ již bude nějaká jiná, závisející na dimenzi prostoru.

Argumentace druhé části důkazu se nejlépe pochopí s pomocí obrázku.



Čtverec $I(x_1, \delta_1)$ má čtvrtinový obsah oproti červenému čtverci $I(x, 2\delta_1)$, takže alespoň jedna osmina červeného čtverce je vyplněna množinou B. Proto těch $\frac{7}{8}$.

Teď už si snadno rozmyslíš, že hustotní topologie se dá definovat na euklidovském prostoru libovolné dimenze. Důkaz její souvislosti je pak jenom modifikací našeho postupu.

Jen místo té konstanty $\frac{7}{8}$ již bude nějaká jiná, závisející na dimenzi prostoru.

Víš, že přímka bez libovolného bodu již není souvislá?

To je přeci triviální.

A co rovina, ze které odebereme spočetně mnoho bodů, je souvislá?

To vypadá jako zajímavější otázka.

Pokud uvažujeme podprostor roviny, který vznikne vynecháním méně než kontinuum mnoha bodů roviny, dostaneme opět souvislý prostor.

Ale jak to dokázat?

Víš, že přímka bez libovolného bodu již není souvislá?

To je přeci triviální.

A co rovina, ze které odebereme spočetně mnoho bodů, je souvislá?

To vypadá jako zajímavější otázka.

Pokud uvažujeme podprostor roviny, který vznikne vynecháním méně než kontinuum mnoha bodů roviny, dostaneme opět souvislý prostor.

Ale jak to dokázat?

Víš, že přímka bez libovolného bodu již není souvislá?

To je přeci triviální.

A co rovina, ze které odebereme spočetně mnoho bodů, je souvislá?

To vypadá jako zajímavější otázka.

Pokud uvažujeme podprostor roviny, který vznikne vynecháním méně než kontinuum mnoha bodů roviny, dostaneme opět souvislý prostor.

Ale jak to dokázat?

Víš, že přímka bez libovolného bodu již není souvislá?

To je přeci triviální.

A co rovina, ze které odebereme spočetně mnoho bodů, je souvislá?

To vypadá jako zajímavější otázka.

Pokud uvažujeme podprostor roviny, který vznikne vynecháním méně než kontinuum mnoha bodů roviny, dostaneme opět souvislý prostor.

Ale jak to dokázat?

Víš, že přímka bez libovolného bodu již není souvislá?

To je přeci triviální.

A co rovina, ze které odebereme spočetně mnoho bodů, je souvislá?

To vypadá jako zajímavější otázka.

Pokud uvažujeme podprostor roviny, který vznikne vynecháním méně než kontinuum mnoha bodů roviny, dostaneme opět souvislý prostor.

Ale jak to dokázat?

Víš, že přímka bez libovolného bodu již není souvislá?

To je přeci triviální.

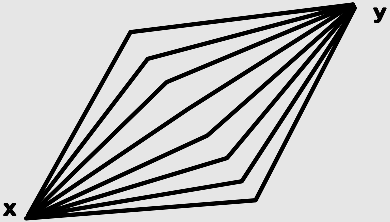
A co rovina, ze které odebereme spočetně mnoho bodů, je souvislá?

To vypadá jako zajímavější otázka.

Pokud uvažujeme podprostor roviny, který vznikne vynecháním méně než kontinuum mnoha bodů roviny, dostaneme opět souvislý prostor.

Ale jak to dokázat?

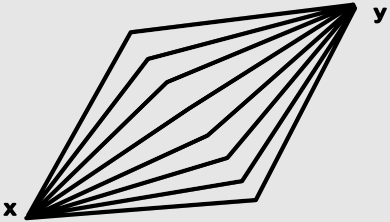
Stačí si uvědomit, že mezi libovolnými dvěma body x a y existuje v rovině kontinuum mnoho oblouků, které jsou až na krajní body disjunktní.



To ovšem znamená, že alespoň jeden z těchto oblouků neprotne množinu, kterou jsme z roviny odebíraly, protože ta měla mohutnost menší než kontinuum.

Takže náš podprostor bude dokonce křivkově souvislý.

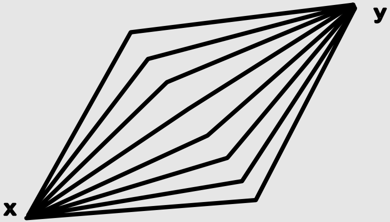
Stačí si uvědomit, že mezi libovolnými dvěma body x a y existuje v rovině kontinuum mnoho oblouků, které jsou až na krajní body disjunktní.



To ovšem znamená, že alespoň jeden z těchto oblouků neprotne množinu, kterou jsme z roviny odebíraly, protože ta měla mohutnost menší než kontinuum.

Takže náš podprostor bude dokonce křivkově souvislý.

Stačí si uvědomit, že mezi libovolnými dvěma body x a y existuje v rovině kontinuum mnoho oblouků, které jsou až na krajní body disjunktní.

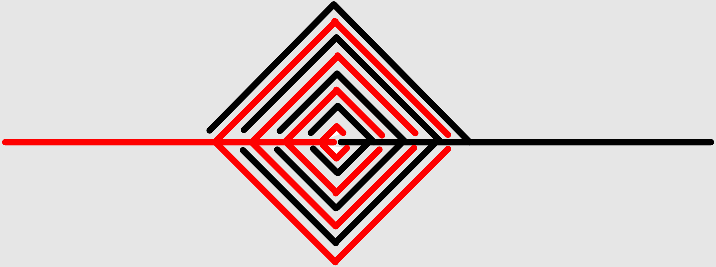


To ovšem znamená, že alespoň jeden z těchto oblouků neprotne množinu, kterou jsme z roviny odebíraly, protože ta měla mohutnost menší než kontinuum.

Takže náš podprostor bude dokonce křivkově souvislý.

Rovina má mnoho dalších překvapivých vlastností. Je možné ji třeba rozdělit na dvě disjunktní husté křivkově souvislé podmnožiny.

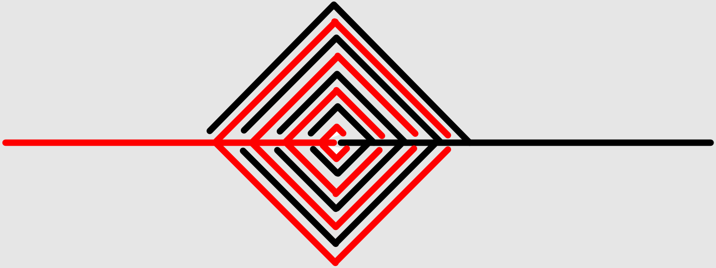
Třeba tak jak je znázorněno na následujícím obrázku.



V první (černé) množině bude nezáporná poloosa x. Dále bude obsahovat za každé kladné racionální číslo q úsečky spojující bod $(q, 0)$ s $(0, q)$ a $(q, 0)$ s $(0, -q)$. Ještě přidáme všechny polouzavřené úsečky spojující body $(0, q)$ s $(-q, 0)$ a $(0, -q)$ s $(-q, 0)$. Druhá (červená) množina bude doplňkem té první.

Rovina má mnoho dalších překvapivých vlastností. Je možné ji třeba rozdělit na dvě disjunktní husté křivkově souvislé podmnožiny.

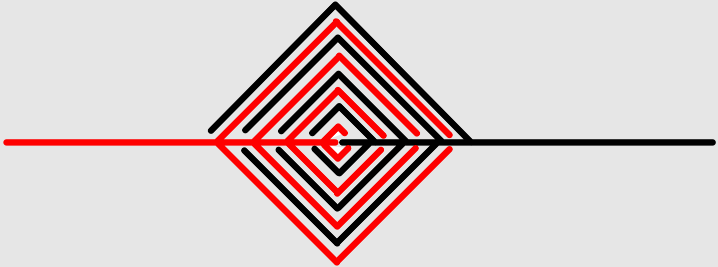
Třeba tak jak je znázorněno na následujícím obrázku.



V první (černé) množině bude nezáporná poloosa x. Dále bude obsahovat za každé kladné racionální číslo q úsečky spojující bod $(q, 0)$ s $(0, q)$ a $(q, 0)$ s $(0, -q)$. Ještě přidáme všechny polouzavřené úsečky spojující body $(0, q)$ s $(-q, 0)$ a $(0, -q)$ s $(-q, 0)$. Druhá (červená) množina bude doplňkem té první.

Rovina má mnoho dalších překvapivých vlastností. Je možné ji třeba rozdělit na dvě disjunktní husté křivkově souvislé podmnožiny.

Třeba tak jak je znázorněno na následujícím obrázku.



V první (černé) množině bude nezáporná poloosa x. Dále bude obsahovat za každé kladné racionální číslo q úsečky spojující bod $(q, 0)$ s $(0, q)$ a $(q, 0)$ s $(0, -q)$. Ještě přidáme všechny polouzavřené úsečky spojující body $(0, q)$ s $(-q, 0)$ a $(0, -q)$ s $(-q, 0)$. Druhá (červená) množina bude doplňkem té první.

A je možné rovinu rozdělit na tři disjunktní husté křivkově souvislé množiny?

To bohužel nevím. Ale vím, že pro každé přirozené číslo n existuje v rovině n disjunktních hustých křivkově souvislých množin.

Aha, ale ty množiny již nemusí pokrývat celou rovinu.

V rovině dokonce najdeme nekonečně mnoho disjunktních hustých křivkově souvislých množin. Stačí ty množiny postupně budovat. v n-tém kroku začneme tvořit n-tou množinu a ke každé z předchozích přilepíme pomocí jednoho koncového bodu oblouk, který bude disjunktní s ostatními množinami

V třídimenzionálním euklidovském prostoru jsou otázky podobného typu triviální, protože tam máme dostatek prostoru pro různé konstrukce.

A je možné rovinu rozdělit na tři disjunktní husté křivkově souvislé množiny?

To bohužel nevím. Ale vím, že pro každé přirozené číslo n existuje v rovině n disjunktních hustých křivkově souvislých množin.

Aha, ale ty množiny již nemusí pokrývat celou rovinu.

V rovině dokonce najdeme nekonečně mnoho disjunktních hustých křivkově souvislých množin. Stačí ty množiny postupně budovat. v n-tém kroku začneme tvořit n-tou množinu a ke každé z předchozích přilepíme pomocí jednoho koncového bodu oblouk, který bude disjunktní s ostatními množinami

V třídimenzionálním euklidovském prostoru jsou otázky podobného typu triviální, protože tam máme dostatek prostoru pro různé konstrukce.

A je možné rovinu rozdělit na tři disjunktní husté křivkově souvislé množiny?

To bohužel nevím. Ale vím, že pro každé přirozené číslo n existuje v rovině n disjunktních hustých křivkově souvislých množin.

Aha, ale ty množiny již nemusí pokrývat celou rovinu.

V rovině dokonce najdeme nekonečně mnoho disjunktních hustých křivkově souvislých množin. Stačí ty množiny postupně budovat. v n-tém kroku začneme tvořit n-tou množinu a ke každé z předchozích přilepíme pomocí jednoho koncového bodu oblouk, který bude disjunktní s ostatními množinami

V třídimenzionálním euklidovském prostoru jsou otázky podobného typu triviální, protože tam máme dostatek prostoru pro různé konstrukce.

A je možné rovinu rozdělit na tři disjunktní husté křivkově souvislé množiny?

To bohužel nevím. Ale vím, že pro každé přirozené číslo n existuje v rovině n disjunktních hustých křivkově souvislých množin.

Aha, ale ty množiny již nemusí pokrývat celou rovinu.

V rovině dokonce najdeme nekonečně mnoho disjunktních hustých křivkově souvislých množin. Stačí ty množiny postupně budovat. v n-tém kroku začneme tvořit n-tou množinu a ke každé z předchozích přilepíme pomocí jednoho koncového bodu oblouk, který bude disjunktní s ostatními množinami

V třídimenzionálním euklidovském prostoru jsou otázky podobného typu triviální, protože tam máme dostatek prostoru pro různé konstrukce.

A je možné rovinu rozdělit na tři disjunktní husté křivkově souvislé množiny?

To bohužel nevím. Ale vím, že pro každé přirozené číslo n existuje v rovině n disjunktních hustých křivkově souvislých množin.

Aha, ale ty množiny již nemusí pokrývat celou rovinu.

V rovině dokonce najdeme nekonečně mnoho disjunktních hustých křivkově souvislých množin. Stačí ty množiny postupně budovat. v n-tém kroku začneme tvořit n-tou množinu a ke každé z předchozích přilepíme pomocí jednoho koncového bodu oblouk, který bude disjunktní s ostatními množinami

V třídimenzionálním euklidovském prostoru jsou otázky podobného typu triviální, protože tam máme dostatek prostoru pro různé konstrukce.

A je možné rovinu rozdělit na tři disjunktní husté křivkově souvislé množiny?

To bohužel nevím. Ale vím, že pro každé přirozené číslo n existuje v rovině n disjunktních hustých křivkově souvislých množin.

Aha, ale ty množiny již nemusí pokrývat celou rovinu.

V rovině dokonce najdeme nekonečně mnoho disjunktních hustých křivkově souvislých množin. Stačí ty množiny postupně budovat. v n-tém kroku začneme tvořit n-tou množinu a ke každé z předchozích přilepíme pomocí jednoho koncového bodu oblouk, který bude disjunktní s ostatními množinami

V třídimenzionálním euklidovském prostoru jsou otázky podobného typu triviální, protože tam máme dostatek prostoru pro různé konstrukce.

Připomeňme si, že číslo nesouvislosti nějakého grafu je každé přirozené číslo n, že daný graf se stane nesouvislým po vynechání libovolných n bodů. Pokud máme graf s číslem nesouvislosti n, pak všechna větší přirozená čísla jsou číslem nesouvislosti pro tento graf. Takže typicky nás zajímá nejmenší číslo nesouvislosti.

Jak vypadají grafy s číslem nesouvislosti jedna?

Žádné takové neexistují, protože každé kontinuum obsahuje bod, který toto kontinuum nedělí.

A existuje graf s číslem nesouvislosti dva?

Takový již existuje a je jediný. Jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Pomocí následujícího tvrzení můžeme snadno určit všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti tři a čtyři.

Připomeňme si, že číslo nesouvislosti nějakého grafu je každé přirozené číslo n, že daný graf se stane nesouvislým po vynechání libovolných n bodů. Pokud máme graf s číslem nesouvislosti n, pak všechna větší přirozená čísla jsou číslem nesouvislosti pro tento graf. Takže typicky nás zajímá nejmenší číslo nesouvislosti.

Jak vypadají grafy s číslem nesouvislosti jedna?

Žádné takové neexistují, protože každé kontinuum obsahuje bod, který toto kontinuum nedělí.

A existuje graf s číslem nesouvislosti dva?

Takový již existuje a je jediný. Jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Pomocí následujícího tvrzení můžeme snadno určit všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti tři a čtyři.

Připomeňme si, že číslo nesouvislosti nějakého grafu je každé přirozené číslo n, že daný graf se stane nesouvislým po vynechání libovolných n bodů. Pokud máme graf s číslem nesouvislosti n, pak všechna větší přirozená čísla jsou číslem nesouvislosti pro tento graf. Takže typicky nás zajímá nejmenší číslo nesouvislosti.

Jak vypadají grafy s číslem nesouvislosti jedna?

Žádné takové neexistují, protože každé kontinuum obsahuje bod, který toto kontinuum nedělí.

A existuje graf s číslem nesouvislosti dva?

Takový již existuje a je jediný. Jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Pomocí následujícího tvrzení můžeme snadno určit všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti tři a čtyři.

Připomeňme si, že číslo nesouvislosti nějakého grafu je každé přirozené číslo n, že daný graf se stane nesouvislým po vynechání libovolných n bodů. Pokud máme graf s číslem nesouvislosti n, pak všechna větší přirozená čísla jsou číslem nesouvislosti pro tento graf. Takže typicky nás zajímá nejmenší číslo nesouvislosti.

Jak vypadají grafy s číslem nesouvislosti jedna?

Žádné takové neexistují, protože každé kontinuum obsahuje bod, který toto kontinuum nedělí.

A existuje graf s číslem nesouvislosti dva?

Takový již existuje a je jediný. Jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Pomocí následujícího tvrzení můžeme snadno určit všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti tři a čtyři.

Připomeňme si, že číslo nesouvislosti nějakého grafu je každé přirozené číslo n, že daný graf se stane nesouvislým po vynechání libovolných n bodů. Pokud máme graf s číslem nesouvislosti n, pak všechna větší přirozená čísla jsou číslem nesouvislosti pro tento graf. Takže typicky nás zajímá nejmenší číslo nesouvislosti.

Jak vypadají grafy s číslem nesouvislosti jedna?

Žádné takové neexistují, protože každé kontinuum obsahuje bod, který toto kontinuum nedělí.

A existuje graf s číslem nesouvislosti dva?

Takový již existuje a je jediný. Jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Pomocí následujícího tvrzení můžeme snadno určit všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti tři a čtyři.

Připomeňme si, že číslo nesouvislosti nějakého grafu je každé přirozené číslo n, že daný graf se stane nesouvislým po vynechání libovolných n bodů. Pokud máme graf s číslem nesouvislosti n, pak všechna větší přirozená čísla jsou číslem nesouvislosti pro tento graf. Takže typicky nás zajímá nejmenší číslo nesouvislosti.

Jak vypadají grafy s číslem nesouvislosti jedna?

Žádné takové neexistují, protože každé kontinuum obsahuje bod, který toto kontinuum nedělí.

A existuje graf s číslem nesouvislosti dva?

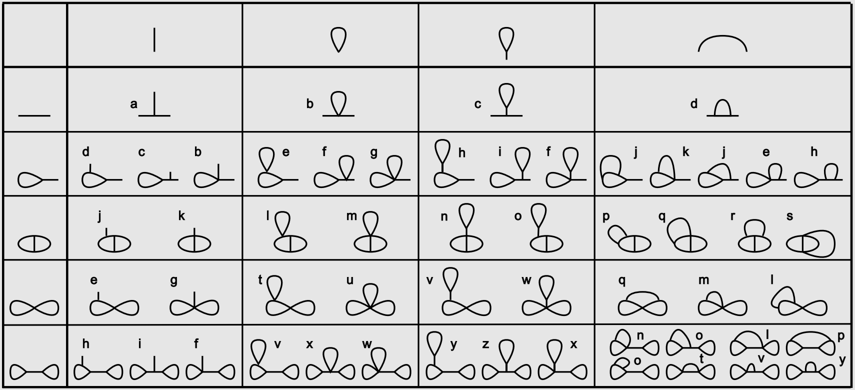
Takový již existuje a je jediný. Jde o jednoduchou uzavřenou křivku. Pomocí následujícího tvrzení můžeme snadno určit všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti tři a čtyři.

TVRZENÍ

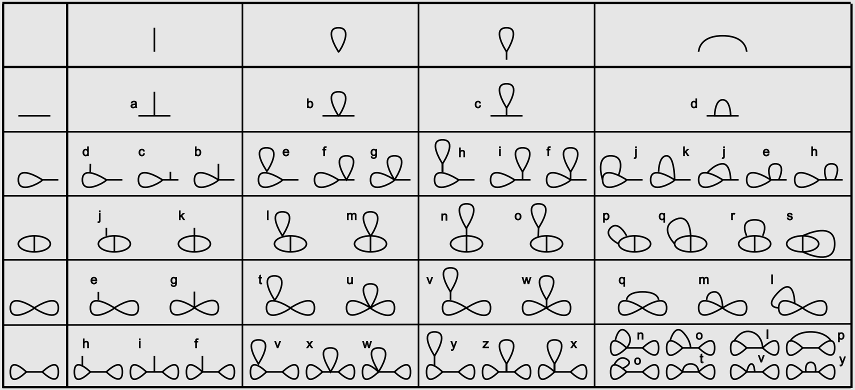
Buď X graf, jehož nejmenší číslo nesouvislosti je $n \in \mathbb{N}$ a který není jednoduchou uzavřenou křivkou (tj. není homeomorfní kružnici) ani obloukem. Potom existuje jeho podgraf Y s nejmenším číslem nesouvislosti rovným $n-1$ a podgraf Z, že $X = Y \cup Z$, společné body grafů Y a Z nejsou koncovými body grafu Y a platí jedna z následujících podmínek

- *Z je oblouk, $|Y \cap Z| = 1$ a společný bod grafů Y a Z je koncovým bodem grafu Z.*
- *Z je homeomorfní oblouku, $|Y \cap Z| = 2$ a společné body grafů Y a Z jsou koncovými body grafu Z.*
- *Z je jednoduchá uzavřená křivka a $|Y \cap Z| = 1$.*
- *Z je homeomorfní devítce, $|Y \cap Z| = 1$ a společný bod grafů Y a Z je koncovým bodem grafu Z.*

Takže v následující tabulce jsou všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti čtyři, které se dostanou pomocí grafů s nejmenším číslem nesouvislosti tři (ty jsou v levém sloupečku) připojováním objektů z prvního řádku.



Takže v následující tabulce jsou všechny grafy s nejmenším číslem nesouvislosti čtyři, které se dostanou pomocí grafů s nejmenším číslem nesouvislosti tři (ty jsou v levém sloupečku) připojováním objektů z prvního řádku.



Grafů s nejmenším číslem nesouvislosti pět tedy již bude poměrně velké množství.

Grafů s nejmenším číslem nesouvislosti pět tedy již bude poměrně velké množství.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha,\beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

A množina dvojic (α,β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \le \alpha \le \beta \le 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha, \beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

A množina dvojic (α, β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha, \beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

A množina dvojic (α, β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha, \beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

A množina dvojic (α, β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \le \alpha \le \beta \le 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha, \beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

A množina dvojic (α, β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \le \alpha \le \beta \le 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha, \beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

A množina dvojic (α, β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

Hyperprostory některých jednoduchých kontinuí se dají docela rozumně reprezentovat.

Hyperprostor $C([0,1])$ je prý homeomorfní trojúhelníku.

Ano, stačí si uvědomit, že každé podkontinuum intervalu $[0,1]$ je zase nějaký interval $[\alpha,\beta]$, kde $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

Ten může být i degenerovaný.

Zbývá si uvědomit, že pokud posloupnost kontinuí $K_n = [\alpha_n, \beta_n] \in C([0,1])$ konverguje k nějakému kontinuu $K = [\alpha,\beta] \in C([0,1])$, pak α_n konverguje k α a β_n konverguje k β.

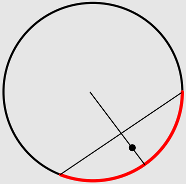
A množina dvojic (α,β) z předepsaných mezí nám v rovině vytvoří ten trojúhelník.

A jak vypadá hyperprostor kružnice $C(S)$?

Ten je homeomorfní s kruhem.

Takže je vlastně topologicky stejný jako hyperprostor oblouku $C([0, 1])$.

Podkontinua kružnice $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si můžeme reprezentovat tak, že každému vlastnímu podkontinuu K kružnice S přiřadíme bod v kruhu následovně. Podíváme se nejprve na střed spojnic koncových bodů kontinua K – označíme si ho s. Kontinuu K přiřadíme střed úsečky spojující bod s se středem oblouku K.

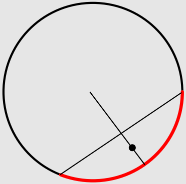


A jak vypadá hyperprostor kružnice $C(S)$?

Ten je homeomorfní s kruhem.

Takže je vlastně topologicky stejný jako hyperprostor oblouku $C([0,1])$.

Podkontinua kružnice $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si můžeme reprezentovat tak, že každému vlastnímu podkontinuu K kružnice S přiřadíme bod v kruhu následovně. Podíváme se nejprve na střed spojnic koncových bodů kontinua K – označíme si ho s. Kontinuu K přiřadíme střed úsečky spojující bod s se středem oblouku K.

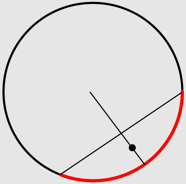


A jak vypadá hyperprostor kružnice $C(S)$?

Ten je homeomorfní s kruhem.

Takže je vlastně topologicky stejný jako hyperprostor oblouku $C([0,1])$.

Podkontinua kružnice $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si můžeme reprezentovat tak, že každému vlastnímu podkontinuu K kružnice S přiřadíme bod v kruhu následovně. Podíváme se nejprve na střed spojnic koncových bodů kontinua K – označíme si ho s. Kontinuu K přiřadíme střed úsečky spojující bod s se středem oblouku K.

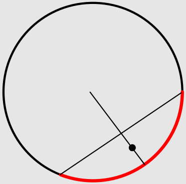


A jak vypadá hyperprostor kružnice $C(S)$?

Ten je homeomorfní s kruhem.

Takže je vlastně topologicky stejný jako hyperprostor oblouku $C([0,1])$.

Podkontinua kružnice $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si můžeme reprezentovat tak, že každému vlastnímu podkontinuu K kružnice S přiřadíme bod v kruhu následovně. Podíváme se nejprve na střed spojnic koncových bodů kontinua K – označíme si ho s. Kontinuu K přiřadíme střed úsečky spojující bod s se středem oblouku K.

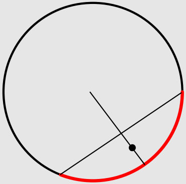


A jak vypadá hyperprostor kružnice $C(S)$?

Ten je homeomorfní s kruhem.

Takže je vlastně topologicky stejný jako hyperprostor oblouku $C([0,1])$.

Podkontinua kružnice $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si můžeme reprezentovat tak, že každému vlastnímu podkontinuu K kružnice S přiřadíme bod v kruhu následovně. Podíváme se nejprve na střed spojnic koncových bodů kontinua K – označíme si ho s. Kontinuu K přiřadíme střed úsečky spojující bod s se středem oblouku K.



Jednobodovým kontinuím na té kružnici asi přiřadíme právě ten jediný bod. A celé kružnici přiradíme bod ve středu té kružnice.

Zbývá si rozmyslet, že toto přiřazení je prosté a spojité.

A jelikož jde o kompaktní prostory, dostáváme homeomorfismus hyperprostoru kružnice $C(S)$ s uzavřeným kruhem v rovině.

Jednobodovým kontinuím na té kružnici asi přiřadíme právě ten jediný bod. A celé kružnici přiradíme bod ve středu té kružnice.

Zbývá si rozmyslet, že toto přiřazení je prosté a spojité.

A jelikož jde o kompaktní prostory, dostáváme homeomorfismus hyperprostoru kružnice $C(S)$ s uzavřeným kruhem v rovině.

Jednobodovým kontinuím na té kružnici asi přiřadíme právě ten jediný bod. A celé kružnici přiradíme bod ve středu té kružnice.

Zbývá si rozmyslet, že toto přiřazení je prosté a spojité.

A jelikož jde o kompaktní prostory, dostáváme homeomorfismus hyperprostoru kružnice $C(S)$ s uzavřeným kruhem v rovině.

Jednobodovým kontinuím na té kružnici asi přiřadíme právě ten jediný bod. A celé kružnici přiradíme bod ve středu té kružnice.

Zbývá si rozmyslet, že toto přiřazení je prosté a spojité.

A jelikož jde o kompaktní prostory, dostáváme homeomorfismus hyperprostoru kružnice $C(S)$ s uzavřeným kruhem v rovině.

A jak vypadá hyperprostor jednoduché triody $C(T)$?

To již bude třídimenzionální kontinuum.

Snadno si uvědomíme, že všechna kontinua v $C(T)$, která obsahují střed triody, tvoří podprostor $C(T)$, jenž je homeomorfní krychli.

Dále uvažujme jeden z oblouků triody, který spojuje koncový bod s jediným jejím větvícím bodem. Kontinua, která jsou částí tohoto oblouku, tvoří v $C(T)$ plochu a ta je přilepená k výchozí krychli.

Takže $C(T)$ je kontinuum sestávající z krychle, ke které jsou vhodným způsobem přilepeny tři plochy.

A jak vypadá hyperprostor jednoduché triody $C(T)$?

To již bude třídimenzionální kontinuum.

Snadno si uvědomíme, že všechna kontinua v $C(T)$, která obsahují střed triody, tvoří podprostor $C(T)$, jenž je homeomorfní krychli.

Dále uvažujme jeden z oblouků triody, který spojuje koncový bod s jediným jejím větvícím bodem. Kontinua, která jsou částí tohoto oblouku, tvoří v $C(T)$ plochu a ta je přilepená k výchozí krychli.

Takže $C(T)$ je kontinuum sestávající z krychle, ke které jsou vhodným způsobem přilepeny tři plochy.

A jak vypadá hyperprostor jednoduché triody $C(T)$?

To již bude třídimenzionální kontinuum.

Snadno si uvědomíme, že všechna kontinua v $C(T)$, která obsahují střed triody, tvoří podprostor $C(T)$, jenž je homeomorfní krychli.

Dále uvažujme jeden z oblouků triody, který spojuje koncový bod s jediným jejím větvícím bodem. Kontinua, která jsou částí tohoto oblouku, tvoří v $C(T)$ plochu a ta je přilepená k výchozí krychli.

Takže $C(T)$ je kontinuum sestávající z krychle, ke které jsou vhodným způsobem přilepeny tři plochy.

A jak vypadá hyperprostor jednoduché triody $C(T)$?

To již bude třídimenzionální kontinuum.

Snadno si uvědomíme, že všechna kontinua v $C(T)$, která obsahují střed triody, tvoří podprostor $C(T)$, jenž je homeomorfní krychli.

Dále uvažujme jeden z oblouků triody, který spojuje koncový bod s jediným jejím větvícím bodem. Kontinua, která jsou částí tohoto oblouku, tvoří v $C(T)$ plochu a ta je přilepená k výchozí krychli.

Takže $C(T)$ je kontinuum sestávající z krychle, ke které jsou vhodným způsobem přilepeny tři plochy.

A jak vypadá hyperprostor jednoduché triody $C(T)$?

To již bude třídimenzionální kontinuum.

Snadno si uvědomíme, že všechna kontinua v $C(T)$, která obsahují střed triody, tvoří podprostor $C(T)$, jenž je homeomorfní krychli.

Dále uvažujme jeden z oblouků triody, který spojuje koncový bod s jediným jejím větvícím bodem. Kontinua, která jsou částí tohoto oblouku, tvoří v $C(T)$ plochu a ta je přilepená k výchozí krychli.

Takže $C(T)$ je kontinuum sestávající z krychle, ke které jsou vhodným způsobem přilepeny tři plochy.

A jak vypadá hyperprostor jednoduché triody $C(T)$?

To již bude třídimenzionální kontinuum.

Snadno si uvědomíme, že všechna kontinua v $C(T)$, která obsahují střed triody, tvoří podprostor $C(T)$, jenž je homeomorfní krychli.

Dále uvažujme jeden z oblouků triody, který spojuje koncový bod s jediným jejím větvícím bodem. Kontinua, která jsou částí tohoto oblouku, tvoří v $C(T)$ plochu a ta je přilepená k výchozí krychli.

Takže $C(T)$ je kontinuum sestávající z krychle, ke které jsou vhodným způsobem přilepeny tři plochy.