12. METRIZACE

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Metrizovatelnost kompaktifikací

1. Ukažte, že pro nekompaktní prostor X není βX nikdy metrizovatelný (zkoumejte spočetnost lokální báze v přidaných bodech).
2. Najděte vnitřní charakterizaci metrických prostorů, jejichž jednobodová kompaktifikace je metrizovatelná.
3. Najděte vnitřní charakterizaci metrických prostorů, které mají metrizovatelnou kompaktifikaci.

$\Rightarrow$

Metrizovatelnost kompaktifikací

1. Ukažte, že pro nekompaktní prostor X není βX nikdy metrizovatelný (zkoumejte spočetnost lokální báze v přidaných bodech).
2. Najděte vnitřní charakterizaci metrických prostorů, jejichž jednobodová kompaktifikace je metrizovatelná.
3. Najděte vnitřní charakterizaci metrických prostorů, které mají metrizovatelnou kompaktifikaci.

$\Rightarrow$

Metrizovatelnost kompaktifikací

1. Ukažte, že pro nekompaktní prostor X není βX nikdy metrizovatelný (zkoumejte spočetnost lokální báze v přidaných bodech).
2. Najděte vnitřní charakterizaci metrických prostorů, jejichž jednobodová kompaktifikace je metrizovatelná.
3. Najděte vnitřní charakterizaci metrických prostorů, které mají metrizovatelnou kompaktifikaci.

$\Rightarrow$

Chittendenova funkce a konvergence

Nechť d má vlastnosti 1 a 2 z Chittendenovy věty.

1. Pokud existuje funkce f z vlastnosti 3 téže věty, existuje taková nejmenší

$$f_m(r) = \sup\{d(x,y); \exists z \ d(x,z) \le r, d(y,z) \le r\}.$$

2. Funkce f_m je spojitá v 0 právě když platí

$$d(x_n, z_n) \to 0, d(y_n, z_n) \to 0 \Rightarrow d(x_n, y_n) \to 0.$$

3. Přeformulujte Chittendenovu větu bez použití funkce f jen s pomocí konvergence (tj., vhodně nahraďte podmínky 3 a 4).

$\Rightarrow$

Uvedeme nyní přímý klasický důkaz Chittendenovy věty bez použití uniformní metrizační věty.

Modifikace Chittendenovy funkce

1. Ukažte, že je ekvivalentní místo podmínky 3 v Chittendenově větě požadovat podmínku (3') existuje funkce $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mající pro každé $x, y, z \in X$ vlastnost

$$d(x,z) \le g(r),\ d(y,z) \le g(r),\ \Rightarrow d(x,y) \le r\,.$$

Tuto funkci g lze zmenšit (se zachováním podmínky $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$) a platnost uvedené implikace se nezmění.

2. K uvedené funkci d existuje funkce p splňující vlastnosti 1 a 2 Chittendenovy věty, přičemž $d(x_n,x) \to 0 \Leftrightarrow p(x_n,x)$. Navíc platí

$$p(x,z) \le r,\ p(y,z) \le r,\ \Rightarrow p(x,y) \le 2r\,.$$

[Návod: Lze předpokládat $g(r) \le r/2$. Potom čísla $r_n = f^n(1)$ (horní index n znamená n-násobné složení, nikoli násobení) konvergují monotónně k 0 ($r_n \le 2^{-n}$). Položte ještě $r_0 = 1$ a předpokládejte, že $d < 1$. Pro každé $x \neq y$ existuje jediné n tak, že $r_{n+1} \le d(x,y) < r_n$ – pak definujte $p(x,y) = 2^{-n}$.]

3. Nechť $\rho(x,y) = \sup\{m; m$ je pseudometrika na X, $m \le p\}$, kde p je funkce z předchozího bodu.

Modifikace Chittendenovy funkce

1. Ukažte, že je ekvivalentní místo podmínky 3 v Chittendenově větě požadovat podmínku (3') existuje funkce $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mající pro každé $x, y, z \in X$ vlastnost

$$d(x,z) \leq g(r),\ d(y,z) \leq g(r),\ \Rightarrow d(x,y) \leq r\,.$$

Tuto funkci g lze zmenšit (se zachováním podmínky $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$) a platnost uvedené implikace se nezmění.

2. K uvedené funkci d existuje funkce p splňující vlastnosti 1 a 2 Chittendenovy věty, přičemž $d(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow p(x_n, x)$. Navíc platí

$$p(x,z) \leq r,\ p(y,z) \leq r,\ \Rightarrow p(x,y) \leq 2r\,.$$

[Návod: Lze předpokládat $g(r) \leq r/2$. Potom čísla $r_n = f^n(1)$ (horní index n znamená n-násobné složení, nikoli násobení) konvergují monotónně k 0 ($r_n \leq 2^{-n}$). Položte ještě $r_0 = 1$ a předpokládejte, že $d < 1$. Pro každé $x \neq y$ existuje jediné n tak, že $r_{n+1} \leq d(x,y) < r_n$ – pak definujte $p(x,y) = 2^{-n}$.]

3. Nechť $\rho(x,y) = \sup\{m; m$ je pseudometrika na X, $m \leq p\}$, kde p je funkce z předchozího bodu. Ukažte, že pseudometrika ρ vytváří topologii prostoru X.
[Návod: Postupujte stejně jako v důkazu uniformní metrizační věty.]

Následující Smirnovovu větu byste měli snadno dokázat z charakterizace parakompaktnosti pomocí lokálně konečných zjemnění a Nagatovy-Smirnovovy metrizační věty.

Lokální metrizovatelnost

Parakompaktní prostor, který je lokálně pseudometrizovatelný (tj., má otevřené pokrytí složené z pseudometrizovatelných podprostorů) je metrizovatelný.

Katětov

Kompaktní Hausdorffův prostor X je metrizovatelný právě když prostor $X \times X \times X$ je dědičně normální.

[Návod: uvedená podmínka implikuje, že diagonála v $X \times X$ je G_δ, protože vhodná podmnožina $X \times (X \times X)$ je normální.]

Uspořádatelný prostor je metrizovatelný právě když má otevřenou bázi $\mathcal{B}$ s vlastností (otevřená $G \neq \emptyset \Rightarrow |\{B \in \mathcal{B}; B \supset G\}| < \omega$).

$\Rightarrow$

Lokální metrizovatelnost

Parakompaktní prostor, který je lokálně pseudometrizovatelný (tj., má otevřené pokrytí složené z pseudometrizovatelných podprostorů) je metrizovatelný.

Katětov

Kompaktní Hausdorffův prostor X je metrizovatelný právě když prostor $X \times X \times X$ je dědičně normální.

[Návod: uvedená podmínka implikuje, že diagonála v $X \times X$ je G_δ, protože vhodná podmnožina $X \times (X \times X)$ je normální.]

Uspořádatelný prostor je metrizovatelný právě když má otevřenou bázi $\mathcal{B}$ s vlastností (otevřená $G \neq \emptyset \Rightarrow |\{B \in \mathcal{B}; B \supset G\}| < \omega$).

$\Rightarrow$

Lokální metrizovatelnost

Parakompaktní prostor, který je lokálně pseudometrizovatelný (tj., má otevřené pokrytí složené z pseudometrizovatelných podprostorů) je metrizovatelný.

Dokažte následující Katětovovo tvrzení:

Katětov

Kompaktní Hausdorffův prostor X je metrizovatelný právě když prostor $X \times X \times X$ je dědičně normální.

[Návod: uvedená podmínka implikuje, že diagonála v $X \times X$ je G_δ, protože vhodná podmnožina $X \times (X \times X)$ je normální.]

Uspořádatelný prostor je metrizovatelný právě když má otevřenou bázi $\mathcal{B}$ s vlastností (otevřená $G \neq \emptyset \Rightarrow |\{B \in \mathcal{B}; B \supset G\}| < \omega$).

$\Longrightarrow$

Lokální metrizovatelnost

Parakompaktní prostor, který je lokálně pseudometrizovatelný (tj., má otevřené pokrytí složené z pseudometrizovatelných podprostorů) je metrizovatelný.

Katětov

Kompaktní Hausdorffův prostor X je metrizovatelný právě když prostor $X \times X \times X$ je dědičně normální.

[Návod: uvedená podmínka implikuje, že diagonála v $X \times X$ je G_δ, protože vhodná podmnožina $X \times (X \times X)$ je normální.]

Uspořádatelný prostor je metrizovatelný právě když má otevřenou bázi $\mathcal{B}$ s vlastností (otevřená $G \neq \emptyset \Rightarrow |\{B \in \mathcal{B}; B \supset G\}| < \omega$).

$\Rightarrow$

Lokální metrizovatelnost

Parakompaktní prostor, který je lokálně pseudometrizovatelný (tj., má otevřené pokrytí složené z pseudometrizovatelných podprostorů) je metrizovatelný.

Katětov

Kompaktní Hausdorffův prostor X je metrizovatelný právě když prostor $X \times X \times X$ je dědičně normální.

[Návod: uvedená podmínka implikuje, že diagonála v $X \times X$ je G_δ, protože vhodná podmnožina $X \times (X \times X)$ je normální.]

Dokažte následující tvrzení:

Uspořádatelný prostor je metrizovatelný právě když má otevřenou bázi $\mathcal{B}$ s vlastností (otevřená $G \neq \emptyset \Rightarrow |\{B \in \mathcal{B}; B \supset G\}| < \omega$).

$\Rightarrow$

Lokální metrizovatelnost

Parakompaktní prostor, který je lokálně pseudometrizovatelný (tj., má otevřené pokrytí složené z pseudometrizovatelných podprostorů) je metrizovatelný.

Katětov

Kompaktní Hausdorffův prostor X je metrizovatelný právě když prostor $X \times X \times X$ je dědičně normální.

[Návod: uvedená podmínka implikuje, že diagonála v $X \times X$ je G_δ, protože vhodná podmnožina $X \times (X \times X)$ je normální.]

Uspořádatelný prostor je metrizovatelný právě když má otevřenou bázi $\mathcal{B}$ s vlastností (otevřená $G \neq \emptyset \Rightarrow |\{B \in \mathcal{B}; B \supset G\}| < \omega$).

$\Rightarrow$