OBECNÁ TOPOLOGIE

11. POKRÝVACÍ VLASTNOSTI

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

Nejdříve zopakujeme z předchozích kapitol pojmy týkající se pokrytí, obecněji soustav podmnožin topologického prostoru. Přidáme v poslední položce jeden nový pojem.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
   Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,...*.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
   Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,...*.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
   Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,...*.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
   Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,...*.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
   Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,....*

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,...*.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$. Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,...*.

DEFINICE (Pokrytí)

1. Soustava $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{A} = X$.
   Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).
2. Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{T}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.
3. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.
4. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathcal{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{B}$.
5. Otevřené pokrytí topologického prostoru X se nazývá normální pokrytí, jestliže je prvním členem nějaké posloupnosti $\{\mathcal{A}_n\}$ otevřených pokrytí, kde $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
6. Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá bodově konečná, jestliže každý bod z X je obsažen jen v konečně mnoho množinách z $\mathcal{S}$.

Je zřejmé, jak se definují pojmy *lokálně spočetná soustava, spočetně bodová soustava,....*

$\Rightarrow$

Lokálně konečné soustavy mají hezké vlastnosti, obdobné vlastnostem konečných soustav. Důkaz následujících vlastnost je jednoduchý (dokažte je).

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X je topologický prostor a $\{A_i\}_I$ je lokálně konečná soustava podmnožin X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny A_i uzavřené (obojetné, řídké), je i $\bigcup A_i$ uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v X.*
4. *Je-li $\{A_i\}_I$ diskrétní, je i $\{\overline{A_i}\}$ diskrétní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X je topologický prostor a $\{A_i\}_I$ je lokálně konečná soustava podmnožin X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny A_i uzavřené (obojetné, řídké), je i $\bigcup A_i$ uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v X.*
4. *Je-li $\{A_i\}_I$ diskrétní, je i $\{\overline{A_i}\}$ diskrétní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X *je topologický prostor a* $\{A_i\}_I$ *je lokálně konečná soustava podmnožin* X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny* A_i *uzavřené (obojetné, řídké), je i* $\bigcup A_i$ *uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v* X.
4. *Je-li* $\{A_i\}_I$ *diskrétní, je i* $\{\overline{A_i}\}$ *diskrétní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X *je topologický prostor a* $\{A_i\}_I$ *je lokálně konečná soustava podmnožin* X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny* A_i *uzavřené (obojetné, řídké), je i* $\bigcup A_i$ *uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v* X.
4. *Je-li* $\{A_i\}_I$ *diskrétní, je i* $\{\overline{A_i}\}$ *diskrétní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X je topologický prostor a $\{A_i\}_I$ je lokálně konečná soustava podmnožin X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny A_i uzavřené (obojetné, řídké), je i $\bigcup A_i$ uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v* X.
4. *Je-li $\{A_i\}_I$ diskrétní, je i $\{\overline{A_i}\}$ diskrétní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X je topologický prostor a $\{A_i\}_I$ je lokálně konečná soustava podmnožin X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny A_i uzavřené (obojetné, řídké), je i $\bigcup A_i$ uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v* X.
4. *Je-li $\{A_i\}_I$ diskrétní, je i $\{\overline{A_i}\}$ diskrétní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně konečných soustav)

Nechť X *je topologický prostor a* $\{A_i\}_I$ *je lokálně konečná soustava podmnožin* X.

1. $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$;
2. *Jsou-li všechny množiny* A_i *uzavřené (obojetné, řídké), je i* $\bigcup A_i$ *uzavřená (obojetná, řídká) množina.*
3. $\{\overline{A_i}\}$ *je lokálně konečný soubor v* X.
4. *Je-li* $\{A_i\}_I$ *diskrétní, je i* $\{\overline{A_i}\}$ *diskrétní.*

$\Rightarrow$

Budeme potřebovat ještě jistá zobecnění uvedených vlastností pokrytí.

DEFINICE (σ-vlastnosti pokrytí)

Je-li P vlastnost soustav podmnožin X, řekneme, že soustava $\mathcal{A}$ má vlastnost σ-P, jestliže $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, kde každá soustava $\mathcal{A}_n$ má vlastnost P. Je-li $\mathcal{A}$ pokrytí, podsoustavy $\mathcal{A}_n$ nemusejí být pokrytími.

DEFINICE (σ-vlastnosti pokrytí)

Je-li P vlastnost soustav podmnožin X, řekneme, že soustava $\mathcal{A}$ má vlastnost σ-P, jestliže $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, kde každá soustava $\mathcal{A}_n$ má vlastnost P. Je-li $\mathcal{A}$ pokrytí, podsoustavy $\mathcal{A}_n$ nemusejí být pokrytími.

DEFINICE (σ-vlastnosti pokrytí)

Je-li P vlastnost soustav podmnožin X, řekneme, že soustava $\mathcal{A}$ má vlastnost σ-P, jestliže $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, kde každá soustava $\mathcal{A}_n$ má vlastnost P. Je-li $\mathcal{A}$ pokrytí, podsoustavy $\mathcal{A}_n$ nemusejí být pokrytími.

Ponejvíce budou užívány pojmy σ-disjunktní, σ-diskrétní, σ-lokálně konečná.

DEFINICE (σ-vlastnosti pokrytí)

Je-li P vlastnost soustav podmnožin X, řekneme, že soustava $\mathcal{A}$ má vlastnost σ-P, jestliže $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, kde každá soustava $\mathcal{A}_n$ má vlastnost P. Je-li $\mathcal{A}$ pokrytí, podsoustavy $\mathcal{A}_n$ nemusejí být pokrytími.

Ponejvíce budou užívány pojmy σ-disjunktní, σ-diskrétní, σ-lokálně konečná.

Později ukážeme, že např. existence jistých σ-lokálně konečných zjemnění je ekvivalentní existenci lokálně konečných zjemnění. To bude využito hlavně v následující kapitole o metrizaci topologických prostorů.

$\Rightarrow$

Další potřebnou vlastností bude vztah mezi pokrytími a soustavami funkcí.

DEFINICE (Rozklad jednotky)

Soustava spojitých nezáporných funkcí $\{f_i\}$ na prostoru X se nazývá rozklad jednotky, jestliže $\sum f_i(x) = 1$ pro každé $z \in X$.

Říkáme, že rozklad jednotky je podřízen pokrytí $\{U_i\}$, jestliže pro každé i se f_i anuluje na $X \setminus U_i$.

Později uvidíme, že existence podřízených rozkladů jednotky je ekvivalentní existenci lokálně konečných nebo hvězdovitých zjemnění.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Rozklad jednotky)

Soustava spojitých nezáporných funkcí $\{f_i\}$ na prostoru X se nazývá rozklad jednotky, jestliže $\sum f_i(x) = 1$ pro každé $z \in X$.
Říkáme, že rozklad jednotky je podřízen pokrytí $\{U_i\}$, jestliže pro každé i se f_i anuluje na $X \setminus U_i$.

Později uvidíme, že existence podřízených rozkladů jednotky je ekvivalentní existenci lokálně konečných nebo hvězdovitých zjemnění.

DEFINICE (Rozklad jednotky)

Soustava spojitých nezáporných funkcí $\{f_i\}$ na prostoru X se nazývá rozklad jednotky, jestliže $\sum f_i(x) = 1$ pro každé $z \in X$.
Říkáme, že rozklad jednotky je podřízen pokrytí $\{U_i\}$, jestliže pro každé i se f_i anuluje na $X \setminus U_i$.

Později uvidíme, že existence podřízených rozkladů jednotky je ekvivalentní existenci lokálně konečných nebo hvězdovitých zjemnění.

$\Rightarrow$

Zopakujme též některé pojmy a tvrzení související s pokrytími.

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

Uvědomte si, že ve všech předchozích definicích lze požadovat místo existence konečných nebo spočetných podpokrytí existenci konečného nebo spočetného zjemnění (které je pokrytím) – toto jemnější pokrytí je možné požadovat otevřené nebo uzavřené nebo pokrytí libovolnými množinami.

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

Známe ještě dvě důležitá tvrzení o použití pokrytí, která byla uvedena v kapitole 6 bez důkazu. Proto důkaz nyní uvedeme.

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Prostory pomocí pokrytí

1. Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.
2. Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
4. Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné otevřené pokrytí je konečné (ekvivalentně, má konečné podpokrytí).

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Úplně regulární prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Viděli jsme, že složitá otevřená pokrytí mohou mít jednodušší zjemnění s vhodnými vlastnostmi. V kapitole 5 o zobecněných kompaktních prostorech bylo naznačeno, že jako jsou Lindelöfovy prostory jakýmsi protipólem spočetně kompaktních prostorů, jsou protipólem pseudokompaktních prostorů ty prostory, v nichž má každé otevřené pokrytí lokálně konečné otevřené pokrytí. Současně byl naznačen název pro takové prostory: parakompaktní prostory.

V 6.kapitole však byly parakompaktními prostory nazývány ty prostory, jejichž jemná uniformita má za bázi všechna otevřená pokrytí, neboli ty prostory, kde má každé otevřené pokrytí hvězdovité otevřené zjemnění. Vyjasníme tyto dva přístupy.

DEFINICE (Parakompaktní prostor)

Řekneme, že symetrický topologický prostor je parakompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má otevřené hvězdovité zjemnění.

TVRZENÍ (Topologie normálních pokrytí)

1. *Regulární kompaktní prostor je parakompaktní.*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.*
3. *Parakompaktní prostor je normální.*

Budeme chtít, aby definice parakompaktnosti pomocí hvězdovitých nebo lokálně konečných zjemnění byly ekvivalentní a navíc, aby se parakompaktní prostory zařadily do hierarchie axiómů oddělování.

DEFINICE (Parakompaktní prostor)

Řekneme, že symetrický topologický prostor je parakompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má otevřené hvězdovité zjemnění.

TVRZENÍ (Topologie normálních pokrytí)

1. *Regulární kompaktní prostor je parakompaktní.*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.*
3. *Parakompaktní prostor je normální.*

$\Longrightarrow$

Konečný topologický prostor má tu vlastnost, že každé jeho otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění. Ale ne v každém konečném prostoru má otevřené pokrytí hvězdovité otevřené zjemnění. Odstranit tento nesoulad pomůže předpoklad symetrických prostorů, tj. prostorů majících vlastnost $x \in \overline{y} \Leftrightarrow y \in \overline{x}$ pro libovolné dva jejich body (neboli, otevřené množiny obsahují se svými body i jejich uzávěry).

Uvědomte si (viz Cvičení), že tvoří-li všechna otevřená pokrytí symetrického prostoru bázi uniformity, pak tato uniformita vytváří danou topologii (a ta je tedy úplně regulární).

DEFINICE (Parakompaktní prostor)

Řekneme, že symetrický topologický prostor je parakompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má otevřené hvězdovité zjemnění.

TVRZENÍ (Topologie normálních pokrytí)

1. *Regulární kompaktní prostor je parakompaktní.*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.*
3. *Parakompaktní prostor je normální.*

DEFINICE (Parakompaktní prostor)

Řekneme, že symetrický topologický prostor je parakompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má otevřené hvězdovité zjemnění.

TVRZENÍ (Topologie normálních pokrytí)

1. *Regulární kompaktní prostor je parakompaktní.*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.*
3. *Parakompaktní prostor je normální.*

$\Rightarrow$

DEFINICE (Parakompaktní prostor)

Řekneme, že symetrický topologický prostor je parakompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má otevřené hvězdovité zjemnění.

Z předchozí strany ihned plyne, že každý parakompaktní prostor je úplně regulární. Z tvrzení o normálním prostoru plyne dokonce normalita parakompaktních prostorů.

TVRZENÍ (Topologie normálních pokrytí)

1. *Regulární kompaktní prostor je parakompaktní.*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.*
3. *Parakompaktní prostor je normální.*

$\Rightarrow$

DEFINICE (Parakompaktní prostor)

Řekneme, že symetrický topologický prostor je parakompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí má otevřené hvězdovité zjemnění.

TVRZENÍ (Topologie normálních pokrytí)

1. *Regulární kompaktní prostor je parakompaktní.*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.*
3. *Parakompaktní prostor je normální.*

$\Rightarrow$

Uvedeme nyní slibovanou ekvivalenci obou přístupů k parakompaktním prostorům. Prostředkem nám bude rozklad jednotky.

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

Z posledně uvedené charakterizace parakompaktnosti a z naší definice pseudokompaktnosti ihned plyne tvrzení *parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.*
Této vlastnosti lze využít při ověřování, že daný prostor není parakompaktní.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

Z posledně uvedené charakterizace parakompaktnosti a z naší definice pseudokompaktnosti ihned plyne tvrzení *parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.*
Této vlastnosti lze využít při ověřování, že daný prostor není parakompaktní.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

Z posledně uvedené charakterizace parakompaktnosti a z naší definice pseudokompaktnosti ihned plyne tvrzení *parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.*
Této vlastnosti lze využít při ověřování, že daný prostor není parakompaktní.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

Z posledně uvedené charakterizace parakompaktnosti a z naší definice pseudokompaktnosti ihned plyne tvrzení *parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.*
Této vlastnosti lze využít při ověřování, že daný prostor není parakompaktní.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

Z posledně uvedené charakterizace parakompaktnosti a z naší definice pseudokompaktnosti ihned plyne tvrzení *parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.*
Této vlastnosti lze využít při ověřování, že daný prostor není parakompaktní.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

Z posledně uvedené charakterizace parakompaktnosti a z naší definice pseudokompaktnosti ihned plyne tvrzení *parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.*
Této vlastnosti lze využít při ověřování, že daný prostor není parakompaktní.

$\Rightarrow$

V literatuře se často používá existence otevřených lokálně konečných pokrytí pro definici parakompaktnosti. Má to výhodu v případech, kdy není známa teorie uniformních prostorů. V našem případě je však přístup přes normální pokrytí jednodušší.

Je však nutné uvést, že lokálně konečná zjemnění umožňují mnoho užitečných modifikací, které nejsou možné pro normální pokrytí. Uvedeme tři takové modifikace.

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz

K charakterizacím parakompaktnosti lze nyní přidat charakterizace z tvrzení v předchozí části.
Z nich např. plyne, že *regulární Lindelöfův prostor je parakompaktní.*

$\Rightarrow$

Podíváme se na zachovávání parakompaktnosti konstrukcemi. Situace je obdobná jako u zachovávání normality.

První tvrzení je triviální a další dvě najdete ve Cvičeních.

TVRZENÍ (Konstrukce a parakompaktní prostory)

1. *Třída parakompaktních prostorů je uzavřeně dědičná a uzavřená na součty.*
2. *Součin dvou parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*
3. *Kvocient parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*

⇒

TVRZENÍ (Konstrukce a parakompaktní prostory)

1. *Třída parakompaktních prostorů je uzavřeně dědičná a uzavřená na součty.*
2. *Součin dvou parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*
3. *Kvocient parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Konstrukce a parakompaktní prostory)

1. *Třída parakompaktních prostorů je uzavřeně dědičná a uzavřená na součty.*
2. *Součin dvou parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*
3. *Kvocient parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Konstrukce a parakompaktní prostory)

1. *Třída parakompaktních prostorů je uzavřeně dědičná a uzavřená na součty.*
2. *Součin dvou parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*
3. *Kvocient parakompaktních prostorů nemusí být parakompaktní.*

$\Rightarrow$

Pomocí soustav pokrytí lze vhodně definovat i zcela jiné pojmy. Dále uvedený postup připomíná cauchyovské filtry a úplnost v uniformních prostorech. Původně Čech definoval úplnost jiným způsobem (viz dále).

DEFINICE (Čechovsky úplné prostory)

Úplně regulární prostor X se nazývá čechovsky úplný (nebo úplný ve smyslu Čecha), jestliže existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí na X taková, že každá subbáze filtru uzavřených množin, obsahující pro každé n množinu obsaženou v nějakém prvku z $\mathcal{G}_n$, má neprázdný průnik.

TVRZENÍ (Čechovská úplnost pomocí kompaktifikací)

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je G_δ v βX (ekvivalentně, v nějaké jiné nebo v každé kompaktifikaci).

Důkaz

DŮSLEDEK

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je homeomorfní G_δ podmnožině kompaktního regulárního prostoru.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Čechovsky úplné prostory)

Úplně regulární prostor X se nazývá čechovsky úplný (nebo úplný ve smyslu Čecha), jestliže existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí na X taková, že každá subbáze filtru uzavřených množin, obsahující pro každé n množinu obsaženou v nějakém prvku z $\mathcal{G}_n$, má neprázdný průnik.

TVRZENÍ (Čechovská úplnost pomocí kompaktifikací)

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je G_δ v βX (ekvivalentně, v nějaké jiné nebo v každé kompaktifikaci).

Důkaz

DŮSLEDEK

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je homeomorfní G_δ podmnožině kompaktního regulárního prostoru.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Čechovsky úplné prostory)

Úplně regulární prostor X se nazývá čechovsky úplný (nebo úplný ve smyslu Čecha), jestliže existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí na X taková, že každá subbáze filtru uzavřených množin, obsahující pro každé n množinu obsaženou v nějakém prvku z $\mathcal{G}_n$, má neprázdný průnik.

Uvedeme nyní původní Čechovu definici:

TVRZENÍ (Čechovská úplnost pomocí kompaktifikací)

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je G_δ v βX (ekvivalentně, v nějaké jiné nebo v každé kompaktifikaci).

Důkaz

DŮSLEDEK

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je homeomorfní G_δ podmnožině kompaktního regulárního prostoru.

DEFINICE (Čechovsky úplné prostory)

Úplně regulární prostor X se nazývá čechovsky úplný (nebo úplný ve smyslu Čecha), jestliže existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí na X taková, že každá subbáze filtru uzavřených množin, obsahující pro každé n množinu obsaženou v nějakém prvku z $\mathcal{G}_n$, má neprázdný průnik.

TVRZENÍ (Čechovská úplnost pomocí kompaktifikací)

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je G_δ v βX (ekvivalentně, v nějaké jiné nebo v každé kompaktifikaci).

Důkaz

DŮSLEDEK

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je homeomorfní G_δ podmnožině kompaktního regulárního prostoru.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Čechovsky úplné prostory)

Úplně regulární prostor X se nazývá čechovsky úplný (nebo úplný ve smyslu Čecha), jestliže existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí na X taková, že každá subbáze filtru uzavřených množin, obsahující pro každé n množinu obsaženou v nějakém prvku z $\mathcal{G}_n$, má neprázdný průnik.

TVRZENÍ (Čechovská úplnost pomocí kompaktifikací)

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je G_δ v βX (ekvivalentně, v nějaké jiné nebo v každé kompaktifikaci).

Důkaz

DŮSLEDEK

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je homeomorfní G_δ podmnožině kompaktního regulárního prostoru.

$\Rightarrow$

Uvedeme nyní několik základních vlastností velmi podobných vlastnostem úplně metrizovatelných prostorů. Připomeňme, že topologický prostor se nazývá úplně (pseudo)metrizovatelný, je-li jeho topologie vytvořena úplnou (pseudo)metrikou.

TVRZENÍ

1. *Průnik spočetně mnoha hustých otevřených podmnožin čechovsky úplného prostoru je hustý.*
2. *Třída čechovsky úplných prostorů je spočetně součinová a uzavřená na uzavřené podmnožiny, na G_δ-podmnožiny a na disjunktní součty.*
3. *Pseudometrický prostor je čechovsky úplný právě když je úplně pseudometrizovatelný.*

Důkaz

DŮSLEDEK

(Pseudo)metrický prostor je úplně (pseudo)metrizovatelný právě když je G_δ v každém (pseudo)metrickém prostoru do něhož je isometricky vnořen (stačí vzít vnoření do úplného obalu).

Důkaz

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ

1. *Průnik spočetně mnoha hustých otevřených podmnožin čechovsky úplného prostoru je hustý.*
2. *Třída čechovsky úplných prostorů je spočetně součinová a uzavřená na uzavřené podmnožiny, na G_δ-podmnožiny a na disjunktní součty.*
3. *Pseudometrický prostor je čechovsky úplný právě když je úplně pseudometrizovatelný.*

▸ Důkaz

DŮSLEDEK

(Pseudo)metrický prostor je úplně (pseudo)metrizovatelný právě když je G_δ v každém (pseudo)metrickém prostoru do něhož je isometricky vnořen (stačí vzít vnoření do úplného obalu).

▸ Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ

1. *Průnik spočetně mnoha hustých otevřených podmnožin čechovsky úplného prostoru je hustý.*
2. *Třída čechovsky úplných prostorů je spočetně součinová a uzavřená na uzavřené podmnožiny, na G_δ-podmnožiny a na disjunktní součty.*
3. *Pseudometrický prostor je čechovsky úplný právě když je úplně pseudometrizovatelný.*

Důkaz

DŮSLEDEK

(Pseudo)metrický prostor je úplně (pseudo)metrizovatelný právě když je G_δ v každém (pseudo)metrickém prostoru do něhož je isometricky vnořen (stačí vzít vnoření do úplného obalu).

Důkaz

$\Rightarrow$