# 11. POKRÝVACÍ VLASTNOSTI

## Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Parakompaktnost je důležitým zobecněním kompaktnosti a má řadu použití, např. v geometrii. Pro použití např. v digitální topologii je nutné vynechat předpoklad symetrického prostoru v definici a za definici vzít existence lokálně konečných zjemnění.
Podobně jako u kompaktnosti se i u parakompaktnosti hledaly různá zobecnění, která by vyhovovala i jiným situacím a přitom zachovávala některé vlastnosti parakompaktnosti. Uvedeme zde dva obecnější pojmy a jeden speciálnější pojem.
První pojem se získá z parakompaktnosti podobně jako spočetná kompaktnost se získala z kompaktnosti.

**DEFINICE** (Spočetně parakompaktní prostor)

Spočetně parakompaktní prostor je symetrický topologický prostor ve kterém má každé spočetné otevřené pokrytí otevřené lokálně konečné zjemnění.

Ne každý spočetně parakompaktní prostor je normální, takže se velmi často používají normální spočetně parakompaktní prostory. Navíc nemusí být spočetně parakompaktní prostor ani regulární. Existuje i normální prostor, který není spočetně parakompaktní – příklad je velmi složitý.
Zřejmě je každý spočetně kompaktní prostor spočetně parakompaktní (takže $\omega_1$ je spočetně parakompaktní). Protože pseudokompaktní spočetně parakompaktní prostor musí být spočetně kompaktní, lze snadno najít pseudokompaktní prostory, které nejsou spočetně parakompaktní.

**DEFINICE** (Spočetně parakompaktní prostor)

Spočetně parakompaktní prostor je symetrický topologický prostor ve kterém má každé spočetné otevřené pokrytí otevřené lokálně konečné zjemnění.

Ne každý spočetně parakompaktní prostor je normální, takže se velmi často používají normální spočetně parakompaktní prostory. Navíc nemusí být spočetně parakompaktní prostor ani regulární. Existuje i normální prostor, který není spočetně parakompaktní – příklad je velmi složitý.
Zřejmě je každý spočetně kompaktní prostor spočetně parakompaktní (takže $\omega_1$ je spočetně parakompaktní). Protože pseudokompaktní spočetně parakompaktní prostor musí být spočetně kompaktní, lze snadno najít pseudokompaktní prostory, které nejsou spočetně parakompaktní.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Spočetně parakompaktní prostor)

Spočetně parakompaktní prostor je symetrický topologický prostor ve kterém má každé spočetné otevřené pokrytí otevřené lokálně konečné zjemnění.

Ne každý spočetně parakompaktní prostor je normální, takže se velmi často používají normální spočetně parakompaktní prostory. Navíc nemusí být spočetně parakompaktní prostor ani regulární. Existuje i normální prostor, který není spočetně parakompaktní – příklad je velmi složitý.
Zřejmě je každý spočetně kompaktní prostor spočetně parakompaktní (takže $\omega_1$ je spočetně parakompaktní). Protože pseudokompaktní spočetně parakompaktní prostor musí být spočetně kompaktní, lze snadno najít pseudokompaktní prostory, které nejsou spočetně parakompaktní.

$\Rightarrow$

Další možností zobecnění parakompaktnosti je požadovat méně než lokální konečnost zjemnění. Možností je celá řada a existuje mnoho publikací popisujících různé varianty a vztahy mezi nimi. My si všimneme jen možnosti bodově konečných zjemnění.

**DEFINICE** (Metakompaktní prostory)

Metakompaktní prostor je symetrický topologický prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí otevřené bodově konečné zjemnění.

Snadno se najdou neregulární metakompaktní prostory, a ty tedy nemohou být parakompaktní. Prostor spočetných ordinálů není metakompaktní.
Metakompaktní kolektivně normální prostor je parakompaktní. Metakompaktní spočetně kompaktní prostor je kompaktní.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Metakompaktní prostory)

Metakompaktní prostor je symetrický topologický prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí otevřené bodově konečné zjemnění.

Snadno se najdou neregulární metakompaktní prostory, a ty tedy nemohou být parakompaktní. Prostor spočetných ordinálů není metakompaktní.
Metakompaktní kolektivně normální prostor je parakompaktní. Metakompaktní spočetně kompaktní prostor je kompaktní.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Metakompaktní prostory)

Metakompaktní prostor je symetrický topologický prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí otevřené bodově konečné zjemnění.

Snadno se najdou neregulární metakompaktní prostory, a ty tedy nemohou být parakompaktní. Prostor spočetných ordinálů není metakompaktní.
Metakompaktní kolektivně normální prostor je parakompaktní. Metakompaktní spočetně kompaktní prostor je kompaktní.

$\Rightarrow$

Nyní uvedeme zesílení parakompaktnosti. Budeme žádat silnější vlastnost pro hvězdovitá zjemnění. Řekneme, že soustava $\{\mathcal{A}\}$ je hvězdovitě konečná, jestliže každý prvek z $\mathcal{A}$ protíná jen konečně mnoho ostatních prvků.

**DEFINICE** (Silně parakompaktní prostory)

Silně parakompaktní prostor je topologický prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí otevřené hvězdovitě konečné zjemnění.

Ne každý metrizovatelný prostor je silně parakompaktní. Lindelöfův symetrický prostor je silně parakompaktní. Metakompaktní LOTS je silně parakompaktní.

$\Longrightarrow$

Nyní uvedeme zesílení parakompaktnosti. Budeme žádat silnější vlastnost pro hvězdovitá zjemnění. Řekneme, že soustava $\{\mathcal{A}\}$ je hvězdovitě konečná, jestliže každý prvek z $\mathcal{A}$ protíná jen konečně mnoho ostatních prvků.

**DEFINICE** (Silně parakompaktní prostory)

Silně parakompaktní prostor je topologický prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí otevřené hvězdovitě konečné zjemnění.

Ne každý metrizovatelný prostor je silně parakompaktní. Lindelöfův symetrický prostor je silně parakompaktní. Metakompaktní LOTS je silně parakompaktní.

$\Rightarrow$

Nyní uvedeme zesílení parakompaktnosti. Budeme žádat silnější vlastnost pro hvězdovitá zjemnění. Řekneme, že soustava $\{\mathcal{A}\}$ je hvězdovitě konečná, jestliže každý prvek z $\mathcal{A}$ protíná jen konečně mnoho ostatních prvků.

**DEFINICE** (Silně parakompaktní prostory)

Silně parakompaktní prostor je topologický prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí otevřené hvězdovitě konečné zjemnění.

Ne každý metrizovatelný prostor je silně parakompaktní. Lindelöfův symetrický prostor je silně parakompaktní. Metakompaktní LOTS je silně parakompaktní.

$\Rightarrow$

Protože úplné metrické prostory mají oproti obecným metrickým prostorům mnoho užitečných vlastností, dalo se očekávat, že vhodná definice úplnosti v topologických prostorech bude také užitečná. Čechovi se povedlo takovou definici najít a jeho úplnost se ukázala velmi významná.

Např. parakompaktní prostory, které jsou navíc čechovsky úplné, mají některé další pěkné vlastnosti, např. jsou spočetně součinové, jejich metrizovatelnost se dá popsat pomocí $G_\delta$-diagonály, dají se charakterizovat pomocí vnoření do součinu spočetné mocniny ježka (s více ostny, které jsou navíc intervaly [0,1]) a nějaké krychle $[0,1]^\kappa$.

Podobně topologické grupy, které jsou čechovsky úplné, tvoří důležitou třídu – o tom více v kapitole o topologických grupách.

Protože úplné metrické prostory mají oproti obecným metrickým prostorům mnoho užitečných vlastností, dalo se očekávat, že vhodná definice úplnosti v topologických prostorech bude také užitečná. Čechovi se povedlo takovou definici najít a jeho úplnost se ukázala velmi významná.

Např. parakompaktní prostory, které jsou navíc čechovsky úplné, mají některé další pěkné vlastnosti, např. jsou spočetně součinové, jejich metrizovatelnost se dá popsat pomocí $G_\delta$-diagonály, dají se charakterizovat pomocí vnoření do součinu spočetné mocniny ježka (s více ostny, které jsou navíc intervaly [0,1]) a nějaké krychle $[0,1]^\kappa$.

Podobně topologické grupy, které jsou čechovsky úplné, tvoří důležitou třídu – o tom více v kapitole o topologických grupách.

Protože úplné metrické prostory mají oproti obecným metrickým prostorům mnoho užitečných vlastností, dalo se očekávat, že vhodná definice úplnosti v topologických prostorech bude také užitečná. Čechovi se povedlo takovou definici najít a jeho úplnost se ukázala velmi významná.

Např. parakompaktní prostory, které jsou navíc čechovsky úplné, mají některé další pěkné vlastnosti, např. jsou spočetně součinové, jejich metrizovatelnost se dá popsat pomocí $G_\delta$-diagonály, dají se charakterizovat pomocí vnoření do součinu spočetné mocniny ježka (s více ostny, které jsou navíc intervaly [0,1]) a nějaké krychle $[0,1]^\kappa$.

Podobně topologické grupy, které jsou čechovsky úplné, tvoří důležitou třídu – o tom více v kapitole o topologických grupách.

$\Rightarrow$