8. PROSTORY FUNKCÍ

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Dokažte následující vlastnosti o uniformitě a topologii stejnoměrné konvergence na množinách. Budeme předpokládat, že jsou dány systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X a uniformní prostor Y s uniformitou $\mathcal{U}$.

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Rightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Longrightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Rightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Longrightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Rightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Rightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Rightarrow$

1. Pro $U \subset Y \times Y$ a $S \subset X$ je $E(U,S) = Y^X \times Y^X$ právě když je $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$. Takže $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je indiskrétní pravě když buď Y je indiskrétní nebo $\mathcal{S} = \{\emptyset\}$.
2. Pro $U, V \subset Y \times Y$ a $S, T \subset X$ je $E(U,S) \supset E(V,T)$ právě když je buď $S \subset T$ a $U \supset V$ nebo $U = Y \times Y$ nebo $S = \emptyset$.
3. Uniformita bodové konvergence splývá s uniformitou mocniny.
4. Usměrněný soubor $\{f_a\}_A$ konverguje v $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ k f právě když konverguje k f stejnoměrně na každém $s \in \mathcal{S}$ (tj. pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $S \in \mathcal{S}$ existuje $a \in A$ tak, že $(f_b(x), f(x)) \in U$ pro každé $b \geq a$ a každé $x \in S$).
5. $(Y^X)_{\mathcal{S}} = (Y^{\bigcup \mathcal{S}})_{\mathcal{S}} \times (Y^{X \setminus \bigcup \mathcal{S}})_{\emptyset}$, tj. poslední uvedený prostor je indiskrétní.
6. Je-li X topologický prostor a $\mathcal{T} = \{\overline{S}; S \in \mathcal{S}\}$, pak $C_{\mathcal{S}}(X,Y) = C_{\mathcal{T}}(X,Y)$.
7. Je-li X úplný uniformní prostor, pak $(Y^X)_c = (Y^X)_{pc}$.
8. Je-li Z zúplnění prostoru Y, pak $(Z^X)_{\mathcal{S}}$ je zúplnění prostoru $(Y^X)_{\mathcal{S}}$.

$\Rightarrow$

Zachovávání různých vlastností uvedených v hlavním textu můžeme rozšířit o některá další jednoduchá tvrzení.

1. $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je Hausdorffův právě když Y je Hausdorffův a buď $\bigcup \mathcal{S} = X$ nebo $|Y| \leq 1$. V tomto případě je kanonické vnoření Y do $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ na uzavřenou množinu.
2. $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$ je Hausdorffův právě když je buď $X = \emptyset$ nebo $|Y| \leq 1$ nebo je Y Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S}$ protíná každou množinu $\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ pro $f, g \in U(X, Y)$, $f \neq g$.
3. $U_{\mathcal{S}}(X)$ je Hausdorffův právě když je $\bigcup \mathcal{S}$ hustý v X. Stejné tvrzení platí pro $U^*_{\mathcal{S}}(X)$.
4. Jestliže v topologickém prostoru X existuje spočetně mnoho kompaktních množin $\{C_n\}$ tak, že každá jiná kompaktní podmnožina je už částí některé C_n (tj. X je hemikompaktní) a Y je metrizovatelný, pak $(Y^X)_c$ je metrizovatelný. (Speciálně to platí, je-li X kompaktní nebo je lokálně kompaktní a separabilní metrizovatelný, např. podprostor euklidovského prostoru.)

1. $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je Hausdorffův právě když Y je Hausdorffův a buď $\bigcup \mathcal{S} = X$ nebo $|Y| \leq 1$. V tomto případě je kanonické vnoření Y do $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ na uzavřenou množinu.
2. $U_{\mathcal{S}}(X,Y)$ je Hausdorffův právě když je buď $X = \emptyset$ nebo $|Y| \leq 1$ nebo je Y Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S}$ protíná každou množinu $\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ pro $f, g \in U(X,Y)$, $f \neq g$.
3. $U_{\mathcal{S}}(X)$ je Hausdorffův právě když je $\bigcup \mathcal{S}$ hustý v X. Stejné tvrzení platí pro $U^*_{\mathcal{S}}(X)$.
4. Jestliže v topologickém prostoru X existuje spočetně mnoho kompaktních množin $\{C_n\}$ tak, že každá jiná kompaktní podmnožina je už částí některé C_n (tj. X je hemikompaktní) a Y je metrizovatelný, pak $(Y^X)_c$ je metrizovatelný. (Speciálně to platí, je-li X kompaktní nebo je lokálně kompaktní a separabilní metrizovatelný, např. podprostor euklidovského prostoru.)

1. $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je Hausdorffův právě když Y je Hausdorffův a buď $\bigcup \mathcal{S} = X$ nebo $|Y| \leq 1$. V tomto případě je kanonické vnoření Y do $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ na uzavřenou množinu.
2. $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$ je Hausdorffův právě když je buď $X = \emptyset$ nebo $|Y| \leq 1$ nebo je Y Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S}$ protíná každou množinu $\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ pro $f, g \in U(X, Y), f \neq g$.
3. $U_{\mathcal{S}}(X)$ je Hausdorffův právě když je $\bigcup \mathcal{S}$ hustý v X. Stejné tvrzení platí pro $U^*_{\mathcal{S}}(X)$.
4. Jestliže v topologickém prostoru X existuje spočetně mnoho kompaktních množin $\{C_n\}$ tak, že každá jiná kompaktní podmnožina je už částí některé C_n (tj. X je hemikompaktní) a Y je metrizovatelný, pak $(Y^X)_c$ je metrizovatelný. (Speciálně to platí, je-li X kompaktní nebo je lokálně kompaktní a separabilní metrizovatelný, např. podprostor euklidovského prostoru.)

1. $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je Hausdorffův právě když Y je Hausdorffův a buď $\bigcup \mathcal{S} = X$ nebo $|Y| \leq 1$. V tomto případě je kanonické vnoření Y do $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ na uzavřenou množinu.
2. $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$ je Hausdorffův právě když je buď $X = \emptyset$ nebo $|Y| \leq 1$ nebo je Y Hausdorffův a $\bigcup \mathcal{S}$ protíná každou množinu $\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ pro $f, g \in U(X, Y), f \neq g$.
3. $U_{\mathcal{S}}(X)$ je Hausdorffův právě když je $\bigcup \mathcal{S}$ hustý v X. Stejné tvrzení platí pro $U^*_{\mathcal{S}}(X)$.
4. Jestliže v topologickém prostoru X existuje spočetně mnoho kompaktních množin $\{C_n\}$ tak, že každá jiná kompaktní podmnožina je už částí některé C_n (tj. X je hemikompaktní) a Y je metrizovatelný, pak $(Y^X)_c$ je metrizovatelný. (Speciálně to platí, je-li X kompaktní nebo je lokálně kompaktní a separabilní metrizovatelný, např. podprostor euklidovského prostoru.)

Nejdříve několik jednoduchých úloh.

1. Nechť X, Y, Z jsou uniformní prostory. Zobrazení $f : X \times Y \to Z$ je stejnoměrně spojité právě když jsou množiny $\{f(.,y) : X \to Z; y \in Y\}$ a $\{f(x,.) : Y \to Z; x \in X\}$ ekviuniformní.
2. Množina konstantních zobrazení uniformních prostorů $X \to Y$ je ekviuniformní. Tedy, např., množina $C(\mathbb{R},\mathbb{N})$ je ekviuniformní.
3. Je-li $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ ekviuniformní, je každá bodová limita usměrněného souboru z $\mathcal{F}$ stejnoměrně spojitá.

Připomeňme, pro $\mathcal{F} \subset Y^X$, zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \mapsto (f \mapsto f(x))\} : X \to Y^{\mathcal{F}}$.

1. $j_{\mathcal{F}}$ je prosté právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X.
2. $j_{\mathcal{F}}(x) \in U(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, Y)$ pro každé $x \in \bigcup \mathcal{S}$.
3. Každá množina $\{j_{\mathcal{F}}(x); x \in S\} \subset U(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, Y)$, pro $S \in \mathcal{S}$, je ekviuniformní. Např. $\{j_{\mathcal{F}}(x); x \in X\} \subset U(\mathcal{F}_u, Y)$ je ekviuniformní.
4. $j_{\mathcal{F}} \in U(X, (Y^{\mathcal{F}})_{\mathcal{T}})$ právě když je každé $T \in \mathcal{T}$ ekviuniformní (každé takové T je podmnožina $\mathcal{F}$).
5. $j_{\mathcal{F}}$ je vnoření X do $(Y^{\mathcal{F}})_{\mathcal{T}}$ právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X a X je slabě vytvořeno souborem

1. Nechť X, Y, Z jsou uniformní prostory. Zobrazení $f : X \times Y \to Z$ je stejnoměrně spojité právě když jsou množiny $\{f(., y) : X \to Z; y \in Y\}$ a $\{f(x, .) : Y \to Z; x \in X\}$ ekviuniformní.
2. Množina konstantních zobrazení uniformních prostorů $X \to Y$ je ekviuniformní. Tedy, např., množina $C(\mathbb{R}, \mathbb{N})$ je ekviuniformní.
3. Je-li $\mathcal{F} \subset U(X, Y)$ ekviuniformní, je každá bodová limita usměrněného souboru z $\mathcal{F}$ stejnoměrně spojitá.

Připomeňme, pro $\mathcal{F} \subset Y^X$, zobrazení $j_{\mathcal{F}} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to Y^X$.

1. $j_{\mathcal{F}}$ je prosté právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X.
2. $j_{\mathcal{F}}(x) \in U(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, Y)$ pro každé $x \in \bigcup \mathcal{S}$.
3. Každá množina $\{j_{\mathcal{F}}(x); x \in S\} \subset U(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, Y)$, pro $S \in \mathcal{S}$, je ekviuniformní. Např. $\{j_{\mathcal{F}}(x); x \in X\} \subset U(\mathcal{F}_u, Y)$ je ekviuniformní.
4. $j_{\mathcal{F}} \in U(X, (Y^{\mathcal{F}})_{\mathcal{T}})$ právě když je každé $T \in \mathcal{T}$ ekviuniformní (každé takové T je podmnožina $\mathcal{F}$).
5. $j_{\mathcal{F}}$ je vnoření X do $(Y^{\mathcal{F}})_{\mathcal{T}}$ právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X a X je slabě vytvořeno souborem $\{f_T : X \to (Y^T)_u; T \in \mathcal{T}\}$, kde f_T je diagonální součin množiny zobrazení T.
6. $j_{\mathcal{F}} : X \to (Y^{\mathcal{F}})_u$ je stejnoměrně spojité právě když je evaluace $e : X \times \mathcal{F}_u$ je stejnoměrně spojité,

1. Nechť X, Y, Z jsou uniformní prostory. Zobrazení $f : X \times Y \to Z$ je stejnoměrně spojité právě když jsou množiny $\{f(.,y) : X \to Z; y \in Y\}$ a $\{f(x,.) : Y \to Z; x \in X\}$ ekviuniformní.
2. Množina konstantních zobrazení uniformních prostorů $X \to Y$ je ekviuniformní. Tedy, např., množina $C(\mathbb{R}, \mathbb{N})$ je ekviuniformní.
3. Je-li $\mathcal{F} \subset U(X, Y)$ ekviuniformní, je každá bodová limita usměrněného souboru z $\mathcal{F}$ stejnoměrně spojitá.

Připomeňme, pro $\mathcal{F} \subset Y^X$, zobrazení $j_\mathcal{F} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to Y^X$.

1. $j_\mathcal{F}$ je prosté právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X.
2. $j_\mathcal{F}(x) \in U(\mathcal{F}_\mathcal{S}, Y)$ pro každé $x \in \bigcup \mathcal{S}$.
3. Každá množina $\{j_\mathcal{F}(x); x \in S\} \subset U(\mathcal{F}_\mathcal{S}, Y)$, pro $S \in \mathcal{S}$, je ekviuniformní. Např. $\{j_\mathcal{F}(x); x \in X\} \subset U(\mathcal{F}_u, Y)$ je ekviuniformní.
4. $j_\mathcal{F} \in U(X, (Y^\mathcal{F})_\mathcal{T})$ právě když je každé $T \in \mathcal{T}$ ekviuniformní (každé takové T je podmnožina $\mathcal{F}$).
5. $j_\mathcal{F}$ je vnoření X do $(Y^\mathcal{F})_\mathcal{T}$ právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X a X je slabě vytvořeno souborem $\{f_T : X \to (Y^T)_u; T \in \mathcal{T}\}$, kde f_T je diagonální součin množiny zobrazení T.
6. $j_\mathcal{F} : X \to (Y^\mathcal{F})_u$ je stejnoměrně spojité právě když je evaluace $e : X \times \mathcal{F}_u$ je stejnoměrně spojité,

1. Nechť X, Y, Z jsou uniformní prostory. Zobrazení $f : X \times Y \to Z$ je stejnoměrně spojité právě když jsou množiny $\{f(.,y) : X \to Z; y \in Y\}$ a $\{f(x,.) : Y \to Z; x \in X\}$ ekviuniformní.
2. Množina konstantních zobrazení uniformních prostorů $X \to Y$ je ekviuniformní. Tedy, např., množina $C(\mathbb{R}, \mathbb{N})$ je ekviuniformní.
3. Je-li $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ ekviuniformní, je každá bodová limita usměrněného souboru z $\mathcal{F}$ stejnoměrně spojitá.

Připomeňme, pro $\mathcal{F} \subset Y^X$, zobrazení $j_\mathcal{F} = \{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to Y^X$.

1. $j_\mathcal{F}$ je prosté právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X.
2. $j_\mathcal{F}(x) \in U(\mathcal{F}_\mathcal{S}, Y)$ pro každé $x \in \bigcup \mathcal{S}$.
3. Každá množina $\{j_\mathcal{F}(x); x \in S\} \subset U(\mathcal{F}_\mathcal{S}, Y)$, pro $S \in \mathcal{S}$, je ekviuniformní. Např. $\{j_\mathcal{F}(x); x \in X\} \subset U(\mathcal{F}_u, Y)$ je ekviuniformní.
4. $j_\mathcal{F} \in U(X, (Y^\mathcal{F})_\mathcal{T})$ právě když je každé $T \in \mathcal{T}$ ekviuniformní (každé takové T je podmnožina $\mathcal{F}$).
5. $j_\mathcal{F}$ je vnoření X do $(Y^\mathcal{F})_\mathcal{T}$ právě když $\mathcal{F}$ rozlišuje body X a X je slabě vytvořeno souborem $\{f_T : X \to (Y^T)_u; T \in \mathcal{T}\}$, kde f_T je diagonální součin množiny zobrazení T.
6. $j_\mathcal{F} : X \to (Y^\mathcal{F})_u$ je stejnoměrně spojité právě když je evaluace $e : X \times \mathcal{F}_u$ je stejnoměrně spojité,

Existují modifikace ekviuniformních množin pro případy topologických prostorů. Jednou možností je použít ekviuniformní množiny na jemné uniformity. Nedostane se však vždy totéž.

DEFINICE (Ekvispojité množiny)

Nechť X je topologický prostor a Y je uniformní prostor. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekvispojitá, jestliže pro každé $x \in X$ a každé uniformní okolí diagonály U v Y existuje okolí G bodu x v X tak, že $f(G) \subset U[f(x)]$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

DEFINICE (Stejně spojité množiny)

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá stejně spojitá, jestliže pro každé $x \in X$, $Y \in Y$ a každé okolí H bodu y v Y existuje okolí G bodu x v X a okolí $\widetilde{H}$ bodu y v Y tak, že $f(G) \subset H$ jakmile $f \in \mathcal{F}$ a $f(x) \in \widetilde{H}$.

1. Každá ekvispojitá nebo stejně spojitá množina je složena ze spojitých zobrazení.
2. Každá ekviuniformní množina v Y^X je ekvispojitá. Opak platí pro parakompaktní jemné uniformity prostoru X.
3. Je-li X úplně regulární prostor a Y uniformní prostor, pak množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ je ekvispojitá právě když je stejně spojitá.

DEFINICE (Ekvispojité množiny)

Nechť X je topologický prostor a Y je uniformní prostor. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekvispojitá, jestliže pro každé $x \in X$ a každé uniformní okolí diagonály U v Y existuje okolí G bodu x v X tak, že $f(G) \subset U[f(x)]$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

DEFINICE (Stejně spojité množiny)

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá stejně spojitá, jestliže pro každé $x \in X$, $y \in Y$ a každé okolí H bodu y v Y existuje okolí G bodu x v X a okolí $\widetilde{H}$ bodu y v Y tak, že $f(G) \subset H$ jakmile $f \in \mathcal{F}$ a $f(x) \in \widetilde{H}$.

DEFINICE (Ekvispojité množiny)

Nechť X je topologický prostor a Y je uniformní prostor. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekvispojitá, jestliže pro každé $x \in X$ a každé uniformní okolí diagonály U v Y existuje okolí G bodu x v X tak, že $f(G) \subset U[f(x)]$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

DEFINICE (Stejně spojité množiny)

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá stejně spojitá, jestliže pro každé $x \in X$, $Y \in Y$ a každé okolí H bodu y v Y existuje okolí G bodu x v X a okolí $\widetilde{H}$ bodu y v Y tak, že $f(G) \subset H$ jakmile $f \in \mathcal{F}$ a $f(x) \in \widetilde{H}$.

- Každá ekvispojitá nebo stejně spojitá množina je složena ze spojitých zobrazení.
- Každá ekviuniformní množina v Y^X je ekvispojitá. [illegible] prostory X.
- Je-li X úplně regulární prostor a Y uniformní prostor, pak množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ je ekvispojitá právě když je stejně spojitá.

DEFINICE (Ekvispojité množiny)

Nechť X je topologický prostor a Y je uniformní prostor. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekvispojitá, jestliže pro každé $x \in X$ a každé uniformní okolí diagonály U v Y existuje okolí G bodu x v X tak, že $f(G) \subset U[f(x)]$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

DEFINICE (Stejně spojité množiny)

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá stejně spojitá, jestliže pro každé $x \in X$, $Y \in Y$ a každé okolí H bodu y v Y existuje okolí G bodu x v X a okolí $\widetilde{H}$ bodu y v Y tak, že $f(G) \subset H$ jakmile $f \in \mathcal{F}$ a $f(x) \in \widetilde{H}$.

1. Každá ekvispojitá nebo stejně spojitá množina je složena ze spojitých zobrazení.
2. Každá ekviuniformní množina v Y^X je ekvispojitá. Opak platí pro parakompaktní jemné uniformní prostory X.
3. Jeli X úplně regulární prostor a Y uniformní prostor, pak množina $F \subset Y^X$ je ekvispojitá právě když je stejně spojitá.

DEFINICE (Ekvispojité množiny)

Nechť X je topologický prostor a Y je uniformní prostor. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekvispojitá, jestliže pro každé $x \in X$ a každé uniformní okolí diagonály U v Y existuje okolí G bodu x v X tak, že $f(G) \subset U[f(x)]$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

DEFINICE (Stejně spojité množiny)

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá stejně spojitá, jestliže pro každé $x \in X$, $Y \in Y$ a každé okolí H bodu y v Y existuje okolí G bodu x v X a okolí $\widetilde{H}$ bodu y v Y tak, že $f(G) \subset H$ jakmile $f \in \mathcal{F}$ a $f(x) \in \widetilde{H}$.

1. Každá ekvispojitá nebo stejně spojitá množina je složena ze spojitých zobrazení.
2. Každá ekviuniformní množina v Y^X je ekvispojitá. Opak platí pro parakompaktní jemné uniformní prostory X.
3. Jeli X úplně regulární prostor a Y uniformní prostor, pak množina $F \subset Y^X$ je ekvispojitá právě když je stejně spojitá.

DEFINICE (Ekvispojité množiny)

Nechť X je topologický prostor a Y je uniformní prostor. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá ekvispojitá, jestliže pro každé $x \in X$ a každé uniformní okolí diagonály U v Y existuje okolí G bodu x v X tak, že $f(G) \subset U[f(x)]$ pro každé $f \in \mathcal{F}$.

DEFINICE (Stejně spojité množiny)

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Množina $\mathcal{F} \subset Y^X$ se nazývá stejně spojitá, jestliže pro každé $x \in X$, $Y \in Y$ a každé okolí H bodu y v Y existuje okolí G bodu x v X a okolí $\widetilde{H}$ bodu y v Y tak, že $f(G) \subset H$ jakmile $f \in \mathcal{F}$ a $f(x) \in \widetilde{H}$.

1. Každá ekvispojitá nebo stejně spojitá množina je složena ze spojitých zobrazení.
2. Každá ekviuniformní množina v Y^X je ekvispojitá. Opak platí pro parakompaktní jemné uniformní prostory X.
3. Jeli X úplně regulární prostor a Y uniformní prostor, pak množina $F \subset Y^X$ je ekvispojitá právě když je stejně spojitá.

Stoneova-Weierstrassova věta je charakteristická pro kompaktní Hausdorffovy prostory. Pro nekompaktní prostory neplatí. V následujících cvičeních jsou uvedeny modifikace této věty. První modifikace uvádí, co se stane, když zkoumaná podalgebra neobsahuje konstantní zobrazení (kromě 0). Další modifikace uvádí situaci, kdy podalgebra neodděluje body. Pokud místo „oddělování bodů" použijeme ekvivalentní (pro Hausdorffovy kompaktní prostory) výraz „slabé vytváření", lze použít tuto větu i pro nekompaktní prostory.

Stoneova-Weierstrassova věta

Nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} \subset C(X)$.

1. Jestliže $\mathcal{F}$ odděluje body X, tak $\mathcal{F}$ je uzavřená podalgebra $C_u(X)$ právě když $\mathcal{F} = \{f \in C(X); f(A) = \{0\}\}$ pro nějakou nejvýše jednobodovou uzavřenou množinu $A \subset X$.
2. Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $C(X)$ obsahující nenulovou konstantu. Pak uzávěr $\mathcal{F}$ v $C_u(X)$ je $\{f \in C(X); f$ is constant on every $A \subset X,$ na které je konstantní každá funkce z $\mathcal{F}\}$.
3. V předchozích tvrzeních je možné místo podalgebry požadovat podokruh – pak je nutné požadovat, aby $\mathcal{F}$ obsahoval všechny konstanty.
4. Je-li X Hausdorffův skoro kompaktní prostor (tj. má jedinou kompaktifikaci), Pak každá uzavřená podalgebra $C_u(X)$ obsahující nenulovou konstantu a slabě vytvářející X je rovna $C(X)$.

Stoneova-Weierstrassova věta

Nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} \subset C(X)$.

1. Jestliže $\mathcal{F}$ odděluje body X, tak $\mathcal{F}$ je uzavřená podalgebra $C_u(X)$ právě když $\mathcal{F} = \{f \in C(X); f(A) = \{0\}\}$ pro nějakou nejvýše jednobodovou uzavřenou množinu $A \subset X$.
2. Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $C(X)$ obsahující nenulovou konstantu. Pak uzávěr $\mathcal{F}$ v $C_u(X)$ je $\{f \in C(X); f \text{ is constant on every } A \subset X, \text{ na které je konstantní každá funkce z } \mathcal{F}\}$.
3. V předchozích tvrzeních je možné místo podalgebry požadovat podokruh – pak je nutné požadovat, aby $\mathcal{F}$ obsahoval všechny konstanty.
4. Je-li X Hausdorffův skoro kompaktní prostor (tj. má jedinou kompaktifikaci), Pak každá uzavřená podalgebra $C_u(X)$ obsahující nenulovou konstantu a slabě vytvářející X je rovna $C(X)$.

Stoneova-Weierstrassova věta

Nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} \subset C(X)$.

1. Jestliže $\mathcal{F}$ odděluje body X, tak $\mathcal{F}$ je uzavřená podalgebra $C_u(X)$ právě když $\mathcal{F} = \{f \in C(X); f(A) = \{0\}\}$ pro nějakou nejvýše jednobodovou uzavřenou množinu $A \subset X$.
2. Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $C(X)$ obsahující nenulovou konstantu. Pak uzávěr $\mathcal{F}$ v $C_u(X)$ je $\{f \in C(X); f \text{ is constant on every } A \subset X,$ na které je konstantní každá funkce z $\mathcal{F}\}$.
3. V předchozích tvrzeních je možné místo podalgebry požadovat podokruh – pak je nutné požadovat, aby $\mathcal{F}$ obsahoval všechny konstanty.
4. Je-li X Hausdorffův skoro kompaktní prostor (tj. má jedinou kompaktifikaci), Pak každá uzavřená podalgebra $C_u(X)$ obsahující nenulovou konstantu a slabě vytvářející X je rovna $C(X)$.

Stoneova-Weierstrassova věta

Nechť X je kompaktní Hausdorffův prostor a $\mathcal{F} \subset C(X)$.

1. Jestliže $\mathcal{F}$ odděluje body X, tak $\mathcal{F}$ je uzavřená podalgebra $C_u(X)$ právě když $\mathcal{F} = \{f \in C(X); f(A) = \{0\}\}$ pro nějakou nejvýše jednobodovou uzavřenou množinu $A \subset X$.
2. Nechť $\mathcal{F}$ je podalgebra $C(X)$ obsahující nenulovou konstantu. Pak uzávěr $\mathcal{F}$ v $C_u(X)$ je $\{f \in C(X); f \text{ is constant on every } A \subset X,$ na které je konstantní každá funkce z $\mathcal{F}\}$.
3. V předchozích tvrzeních je možné místo podalgebry požadovat podokruh – pak je nutné požadovat, aby $\mathcal{F}$ obsahoval všechny konstanty.
4. Je-li X Hausdorffův skoro kompaktní prostor (tj. má jedinou kompaktifikaci), Pak každá uzavřená podalgebra $C_u(X)$ obsahující nenulovou konstantu a slabě vytvářející X je rovna $C(X)$.

Z použití Stoneovy-Weierstrassovy věty uvedeme jen aplikaci na součiny a husté podmnožiny.

1. Každá spojitá reálná funkce na součinu kompaktních Hausdorffových prostorů závisí na spočetně mnoha souřadnicích (tj. pro $f : \Pi_I X_i \to \mathbb{R}$ existuje spočetná množina $J \subset I$ tak, že $f(x) = f(y)$ jakmile $\mathrm{pr}_J(x) = \mathrm{pr}_J(y)$ – jinými slovy, existuje spojité zobrazení $g : \Pi_J X_i \to \mathbb{R}$ takové, že $f = g \circ \mathrm{pr}_J$).
2. Nechť X_i, $i \in I$, jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\mathcal{F} \subset C(\Pi_I X_i)$ je množina všech zobrazení $f_i \circ \mathrm{pr}_i$, $i \in I$, kde $f_i \in C(X_i)$ (tj. uvažujeme všechna spojité reálné funkce na součinu závisejících na jedné souřadnici). Pak konečné součty z $\mathcal{F}$ tvoří hustou množinu v $C(\Pi_I X_i)$.
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor a Y separabilní metrizovatelný prostor, je $C_u(X, Y)$ separabilní.
4. Je-li X hemikompaktní (tj. sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin K_n takových, že každá jiná kompaktní podmnožina X je obsažena v některém K_n) a Y je separabilní metrizovatelný prostor, pak $C_c(X, Y)$ je separabilní.
(Prostor je hemikompaktní, je-li např. lokálně kompaktní, separabilní a metrizovatelný.)

1. Každá spojitá reálná funkce na součinu kompaktních Hausdorffových prostorů závisí na spočetně mnoha souřadnicích (tj. pro $f : \prod_I X_i \to \mathbb{R}$ existuje spočetná množina $J \subset I$ tak, že $f(x) = f(y)$ jakmile $\mathrm{pr}_J(x) = \mathrm{pr}_J(y)$ – jinými slovy, existuje spojité zobrazení $g : \prod_J X_i \to \mathbb{R}$ takové, že $f = g \circ \mathrm{pr}_J$).
2. Nechť X_i, $i \in I$, jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\mathcal{F} \subset C(\prod_I X_i)$ je množina všech zobrazení $f_i \circ \mathrm{pr}_i$, $i \in I$, kde $f_i \in C(X_i)$ (tj. uvažujeme všechna spojité reálné funkce na součinu závisejících na jedné souřadnici). Pak konečné součty z $\mathcal{F}$ tvoří hustou množinu v $C(\prod_I X_i)$.
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor a Y separabilní metrizovatelný prostor, je $C_u(X, Y)$ separabilní.
4. Je-li X hemikompaktní (tj. sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin K_n takových, že každá jiná kompaktní podmnožina X je obsažena v některém K_n) a Y je separabilní metrizovatelný prostor, pak $C_c(X, Y)$ je separabilní.
(Prostor je hemikompaktní, je-li např. lokálně kompaktní, separabilní a metrizovatelný.)

1. Každá spojitá reálná funkce na součinu kompaktních Hausdorffových prostorů závisí na spočetně mnoha souřadnicích (tj. pro $f : \Pi_I X_i \to \mathbb{R}$ existuje spočetná množina $J \subset I$ tak, že $f(x) = f(y)$ jakmile $\mathrm{pr}_J(x) = \mathrm{pr}_J(y)$ – jinými slovy, existuje spojité zobrazení $g : \Pi_J X_i \to \mathbb{R}$ takové, že $f = g \circ \mathrm{pr}_J$).
2. Nechť X_i, $i \in I$, jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\mathcal{F} \subset C(\Pi_I X_i)$ je množina všech zobrazení $f_i \circ \mathrm{pr}_i$, $i \in I$, kde $f_i \in C(X_i)$ (tj. uvažujeme všechna spojité reálné funkce na součinu závisejících na jedné souřadnici). Pak konečné součty z $\mathcal{F}$ tvoří hustou množinu v $C(\Pi_I X_i)$.
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor a Y separabilní metrizovatelný prostor, je $C_u(X, Y)$ separabilní.
4. Je-li X hemikompaktní (tj. sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin K_n takových, že každá jiná kompaktní podmnožina X je obsažena v některém K_n) a Y je separabilní metrizovatelný prostor, pak $C_c(X, Y)$ je separabilní.
(Prostor je hemikompaktní, je-li např. lokálně kompaktní, separabilní a metrizovatelný.)

1. Každá spojitá reálná funkce na součinu kompaktních Hausdorffových prostorů závisí na spočetně mnoha souřadnicích (tj. pro $f : \Pi_I X_i \to \mathbb{R}$ existuje spočetná množina $J \subset I$ tak, že $f(x) = f(y)$ jakmile $\mathrm{pr}_J(x) = \mathrm{pr}_J(y)$ – jinými slovy, existuje spojité zobrazení $g : \Pi_J X_i \to \mathbb{R}$ takové, že $f = g \circ \mathrm{pr}_J$).
2. Nechť X_i, $i \in I$, jsou kompaktní Hausdorffovy prostory a $\mathcal{F} \subset C(\Pi_I X_i)$ je množina všech zobrazení $f_i \circ \mathrm{pr}_i$, $i \in I$, kde $f_i \in C(X_i)$ (tj. uvažujeme všechna spojité reálné funkce na součinu závisejících na jedné souřadnici). Pak konečné součty z $\mathcal{F}$ tvoří hustou množinu v $C(\Pi_I X_i)$.
3. Je-li X kompaktní Hausdorffův prostor a Y separabilní metrizovatelný prostor, je $C_u(X, Y)$ separabilní.
4. Je-li X hemikompaktní (tj. sjednocení spočetně mnoha kompaktních množin K_n takových, že každá jiná kompaktní podmnožina X je obsažena v některém K_n) a Y je separabilní metrizovatelný prostor, pak $C_c(X, Y)$ je separabilní.
(Prostor je hemikompaktní, je-li např. lokálně kompaktní, separabilní a metrizovatelný.)