8. PROSTORY FUNKCÍ

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Některé vlastnosti prostorů zobrazení neplatí v určitých extrémních případech:

Vlastnosti prostorů zobrazení

Některé vlastnosti prostorů zobrazení neplatí v určitých extrémních případech:

Vlastnosti prostorů zobrazení

1. Vezměte $X = \mathbb{R}$ a Y množinu reálných čísel s uniformně diskrétní uniformitou. Oba prostory jsou tedy úplné. Pak $U_{\mathcal{S}}$ je izomorfní Y pro každou neprázdnou soustavu $\mathcal{S}$. Takže některé vlastnosti $U_{\mathcal{S}}$ nemusí záviset na volbě $\mathcal{S}$.
2. Zvolte $X = Y = [0, 1]$. Pak $U_p(X, Y) = C_p(X, Y)$ je hustá podmnožina $(Y^X)_p$, takže každá omezená reálná funkce na X je bodovou limitou usměrněného souboru spojitých funkcí. Prostor $U_p(X, Y) = C_p(X, Y)$ není úplný.
3. Existuje kompaktifikace $b\mathbb{N}$ diskrétního prostoru $\mathbb{N}$ taková, že $b\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ je homeomorfní prostoru $[0, 1]$. Vezměte nyní $X = \mathbb{R}$, $Y = b\mathbb{N}$ a $P = \mathbb{N}$ s uniformně diskrétní uniformitou. Pak P je hustý podprostor prostoru Y, $U_{\mathcal{S}}(X, P)$ je izomorfní prostoru P a Y je vnořeno na vlastní uzavřený podprostor v $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$, takže $U_{\mathcal{S}}(X, P)$ není husté v $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$.

Některé vlastnosti prostorů zobrazení neplatí v určitých extrémních případech:

Vlastnosti prostorů zobrazení

1. Vezměte $X = \mathbb{R}$ a Y množinu reálných čísel s uniformně diskrétní uniformitou. Oba prostory jsou tedy úplné. Pak $U_{\mathcal{S}}$ je izomorfní Y pro každou neprázdnou soustavu $\mathcal{S}$. Takže některé vlastnosti $U_{\mathcal{S}}$ nemusí záviset na volbě $\mathcal{S}$.
2. Zvolte $X = Y = [0, 1]$. Pak $U_p(X, Y) = C_p(X, Y)$ je hustá podmnožina $(Y^X)_p$, takže každá omezená reálná funkce na X je bodovou limitou usměrněného souboru spojitých funkcí. Prostor $U_p(X, Y) = C_p(X, Y)$ není úplný.
3. Existuje kompaktifikace $b\mathbb{N}$ diskrétního prostoru $\mathbb{N}$ taková, že $b\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ je homeomorfní prostoru $[0, 1]$. Vezměte nyní $X = \mathbb{R}$, $Y = b\mathbb{N}$ a $P = \mathbb{N}$ s uniformně diskrétní uniformitou. Pak P je hustý podprostor prostoru Y, $U_{\mathcal{S}}(X, P)$ je izomorfní prostoru P a Y je vnořeno na vlastní uzavřený podprostor v $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$, takže $U_{\mathcal{S}}(X, P)$ není husté v $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$.

Některé vlastnosti prostorů zobrazení neplatí v určitých extrémních případech:

Vlastnosti prostorů zobrazení

1. Vezměte $X = \mathbb{R}$ a Y množinu reálných čísel s uniformně diskrétní uniformitou. Oba prostory jsou tedy úplné. Pak $U_{\mathcal{S}}$ je izomorfní Y pro každou neprázdnou soustavu $\mathcal{S}$. Takže některé vlastnosti $U_{\mathcal{S}}$ nemusí záviset na volbě $\mathcal{S}$.
2. Zvolte $X = Y = [0, 1]$. Pak $U_p(X, Y) = C_p(X, Y)$ je hustá podmnožina $(Y^X)_p$, takže každá omezená reálná funkce na X je bodovou limitou usměrněného souboru spojitých funkcí. Prostor $U_p(X, Y) = C_p(X, Y)$ není úplný.
3. Existuje kompaktifikace $b\mathbb{N}$ diskrétního prostoru $\mathbb{N}$ taková, že $b\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ je homeomorfní prostoru $[0, 1]$. Vezměte nyní $X = \mathbb{R}$, $Y = b\mathbb{N}$ a $P = \mathbb{N}$ s uniformně diskrétní uniformitou. Pak P je hustý podprostor prostoru Y, $U_{\mathcal{S}}(X, P)$ je izomorfní prostoru P a Y je vnořeno na vlastní uzavřený podprostor v $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$, takže $U_{\mathcal{S}}(X, P)$ není husté v $U_{\mathcal{S}}(X, Y)$.

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

$\Rightarrow$

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

$\Rightarrow$

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

$\Rightarrow$

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

$\Rightarrow$

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

⇒

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

Následující příklady svědčí o tom, že různé předpoklady ve větách o vztazích prekompaktnosti a totožnosti různých uniformit na prostorech zobrazení nejdou vynechat.

Ekviuniformní množiny

1. Množina $\{x^n + n; n \in \mathbb{N}\} \subset C([0,1],\mathbb{R})$ není ekviuniformní a je uniformně diskrétní v $U_p([0,1],\mathbb{R})$. To znamená, že na této množině uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence splývají.
2. Množina $\{f \rightsquigarrow f(x)\} : C([0,1],\mathbb{R}); x \in [0,1]\}$ je ekviuniformní.
3. Pro $f \in U(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}$ definujme $f_s = \{x \rightsquigarrow f(x+s)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Množina $\{f_s\}_{\mathbb{R}}$ je ekviuniformní.
4. Nechť X, Y jsou metrické prostory a $k \in (0,\infty)$. Množina všech lipshitzovských zobrazení $X \to Y$ s konstantou k je ekviuniformní.
5. Uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na kompaktních množinách splývají na množině všech homeomorfizmů $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
6. Pokud X je uniformní prostor, který není prekompaktní, pak existuje nekonečná ekviuniformní podmnožina $U_u^*(X)$, která je uniformně diskrétní (není tedy prekompaktní).

$\Rightarrow$

V některých uvedených tvrzeních nelze zaměnit uniformitu stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách za uniformitu stejnoměrné konvergence, nebo naopak.

Konvergence na prekompaktních množinách

V některých uvedených tvrzeních nelze zaměnit uniformitu stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách za uniformitu stejnoměrné konvergence, nebo naopak.

Konvergence na prekompaktních množinách

1. Je-li X uniformně diskrétní a Y aspoň dvoubodový, pak uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na prekompaktních (nebo kompaktních) množinách splývají, ale pro nekonečné X jsou různé od uniformity stejnoměrné konvergence. Pak i evaluace $X \times U_p(X, Y) \to Y$ není stejnoměrně spojitá.
2. Jestliže uniformní prostor X není uniformně diskrétní a $U(X, Y)$ odděluje body X, pak $U(X, Y)$ není ekviuniformní množina pro řádný Hausdorffův prostor Y. Množina $U_p(X, Y)$ je prekompaktní, pokud Y je prekompaktní, ale nebude obecně ekviuniformní, např. pro nespočetnou množinu Y mající za uniformitu jemnou uniformitu topologie s jedniným hromadným bodem mající za okolí doplňky spočetných množin. Pak $U_{pc}(X, Y)$ je prekompaktní a kanonické zobrazení $X \to U_p(U_p(X, Y), Y)$ je stejnoměrně spojité.

V některých uvedených tvrzeních nelze zaměnit uniformitu stejnoměrné konvergence na prekompaktních množinách za uniformitu stejnoměrné konvergence, nebo naopak.

Konvergence na prekompaktních množinách

1. Je-li X uniformně diskrétní a Y aspoň dvoubodový, pak uniformity bodové konvergence a stejnoměrné konvergence na prekompaktních (nebo kompaktních) množinách splývají, ale pro nekonečné X jsou různé od uniformity stejnoměrné konvergence. Pak i evaluace $X \times U_p(X, Y) \to Y$ není stejnoměrně spojitá.
2. Jestliže uniformní prostor X není uniformně diskrétní a $U(X, Y)$ odděluje body X, pak $U(X, Y)$ není ekviuniformní množina pro řádný Hausdorffův prostor Y. Množina $U_p(X, Y)$ je prekompaktní, pokud Y je prekompaktní, ale nebude obecně ekviuniformní, např. pro nespočetnou množinu Y mající za uniformitu jemnou uniformitu topologie s jediným hromadným bodem mající za okolí doplňky spočetných množin. Pak $U_{pc}(X, Y)$ je prekompaktní a kanonické zobrazení $X \to U_p(U_p(X, Y), Y)$ je stejnoměrně spojité.