7. ÚPLNÉ A PREKOMPAKTNÍ PROSTORY

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Právě jsme viděli, že topologický prostor je vytvořen úplnou uniformitou, právě když je jeho jemná uniformita úplná. Parakompaktní prostor má úplnou jemnou uniformitu, jsou však i neparakompaktní prostory s úplnou jemnou uniformitou.

TVRZENÍ (Prostory s úplnou uniformitou)

Protože úplné uniformní prostory jsou součinové a uzavřeně dědičné a přechod k topologickým prostorům tyto operace zachovává, platí následující tvrzení:

TVRZENÍ (Prostory s úplnou uniformitou)

TVRZENÍ (Prostory s úplnou uniformitou)

1. *Třída $\mathcal{D}$ všech topologických prostorů vytvořených úplnými uniformními prostory je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů z $\mathcal{D}$ je epireflektivní ve všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorech.*
3. *Příslušná epireflekce prostoru X je topologie zúplnění jemné uniformity na X.*

Přirozený název pro prostory ze třídy $\mathcal{D}$ je *úplně uniformizovatelné prostory*. Používá se i název *Dieudonné complete spaces*.

TVRZENÍ (Prostory s úplnou uniformitou)

1. *Třída $\mathcal{D}$ všech topologických prostorů vytvořených úplnými uniformními prostory je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů z $\mathcal{D}$ je epireflektivní ve všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorech.*
3. *Příslušná epireflekce prostoru X je topologie zúplnění jemné uniformity na X.*

Přirozený název pro prostory ze třídy $\mathcal{D}$ je *úplně uniformizovatelné prostory*. Používá se i název *Dieudonné complete spaces*.

TVRZENÍ (Prostory s úplnou uniformitou)

1. *Třída $\mathcal{D}$ všech topologických prostorů vytvořených úplnými uniformními prostory je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů z $\mathcal{D}$ je epireflektivní ve všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorech.*
3. *Příslušná epireflekce prostoru X je topologie zúplnění jemné uniformity na X.*

Přirozený název pro prostory ze třídy $\mathcal{D}$ je *úplně uniformizovatelné prostory*. Používá se i název *Dieudonné complete spaces*.

TVRZENÍ (Prostory s úplnou uniformitou)

1. *Třída $\mathcal{D}$ všech topologických prostorů vytvořených úplnými uniformními prostory je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů z $\mathcal{D}$ je epireflektivní ve všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorech.*
3. *Příslušná epireflekce prostoru X je topologie zúplnění jemné uniformity na X.*

Přirozený název pro prostory ze třídy $\mathcal{D}$ je *úplně uniformizovatelné prostory*. ´Používá se i název *Dieudonné complete spaces*.

TVRZENÍ (Úplně uniformizovatelné prostory)

1. *Každý parakompaktní (speciálně tedy i každý metrizovatelný) prostor je úplně uniformizovatelný.*
2. *Každý reálně kompaktní prostor je úplně uniformizovatelný.*
3. *Diskrétní topologický prostor měřitelné mohutnosti je úplně uniformizovatelný a není reálně kompaktní.*
4. *Pokud neexistují měřitelné mohutnosti, třída reálně kompaktních prostorů splývá s třídou úplně uniformizovatelných prostorů.*

Je nutné si znovu uvědomit, že tato „úplnost" metrizovatelných prostorů není totéž jako úplná metrizovatelnost, tj., že daný metrizovatelný prostor je vytvořen úplnou metrikou. Např. prostor racionálních čísel není úplně metrizovatelný, ale je úplně uniformizovatelný.

TVRZENÍ (Úplně uniformizovatelné prostory)

1. *Každý parakompaktní (speciálně tedy i každý metrizovatelný) prostor je úplně uniformizovatelný.*
2. *Každý reálně kompaktní prostor je úplně uniformizovatelný.*
3. *Diskrétní topologický prostor měřitelné mohutnosti je úplně uniformizovatelný a není reálně kompaktní.*
4. *Pokud neexistují měřitelné mohutnosti, třída reálně kompaktních prostorů splývá s třídou úplně uniformizovatelných prostorů.*

Je nutné si znovu uvědomit, že tato „úplnost" metrizovatelných prostorů není totéž jako úplná metrizovatelnost, tj., že daný metrizovatelný prostor je vytvořen úplnou metrikou. Např. prostor racionálních čísel není úplně metrizovatelný, ale je úplně uniformizovatelný.

TVRZENÍ (Úplně uniformizovatelné prostory)

1. *Každý parakompaktní (speciálně tedy i každý metrizovatelný) prostor je úplně uniformizovatelný.*
2. *Každý reálně kompaktní prostor je úplně uniformizovatelný.*
3. *Diskrétní topologický prostor měřitelné mohutnosti je úplně uniformizovatelný a není reálně kompaktní.*
4. *Pokud neexistují měřitelné mohutnosti, třída reálně kompaktních prostorů splývá s třídou úplně uniformizovatelných prostorů.*

Je nutné si znovu uvědomit, že tato „úplnost" metrizovatelných prostorů není totéž jako úplná metrizovatelnost, tj., že daný metrizovatelný prostor je vytvořen úplnou metrikou. Např. prostor racionálních čísel není úplně metrizovatelný, ale je úplně uniformizovatelný.

TVRZENÍ (Úplně uniformizovatelné prostory)

1. *Každý parakompaktní (speciálně tedy i každý metrizovatelný) prostor je úplně uniformizovatelný.*
2. *Každý reálně kompaktní prostor je úplně uniformizovatelný.*
3. *Diskrétní topologický prostor měřitelné mohutnosti je úplně uniformizovatelný a není reálně kompaktní.*
4. *Pokud neexistují měřitelné mohutnosti, třída reálně kompaktních prostorů splývá s třídou úplně uniformizovatelných prostorů.*

Je nutné si znovu uvědomit, že tato „úplnost" metrizovatelných prostorů není totéž jako úplná metrizovatelnost, tj., že daný metrizovatelný prostor je vytvořen úplnou metrikou. Např. prostor racionálních čísel není úplně metrizovatelný, ale je úplně uniformizovatelný.

TVRZENÍ (Úplně uniformizovatelné prostory)

1. *Každý parakompaktní (speciálně tedy i každý metrizovatelný) prostor je úplně uniformizovatelný.*
2. *Každý reálně kompaktní prostor je úplně uniformizovatelný.*
3. *Diskrétní topologický prostor měřitelné mohutnosti je úplně uniformizovatelný a není reálně kompaktní.*
4. *Pokud neexistují měřitelné mohutnosti, třída reálně kompaktních prostorů splývá s třídou úplně uniformizovatelných prostorů.*

Je nutné si znovu uvědomit, že tato „úplnost" metrizovatelných prostorů není totéž jako úplná metrizovatelnost, tj., že daný metrizovatelný prostor je vytvořen úplnou metrikou. Např. prostor racionálních čísel není úplně metrizovatelný, ale je úplně uniformizovatelný.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je *jemnější* (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je jemnější (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je jemnější (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Jinými slovy, identické zobrazení $X \to X$ lze spojitě rozšířit na $Y \to Z$. Jednoduše lze dokázat následující pozorování.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je jemnější (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

1. Čechova-Stoneova kompaktifikace je nejjemnější kompaktifikace na X.
2. Jednobodová kompaktifikace (pokud existuje) je nejhrubší kompaktifikace na X.
3. Y je jemnější než Z právě když prekompaktní unifomita příslušná k Y je jemnější než prekompaktní unifomita příslušná k Z.
4. Množina všech kompaktifikací prostoru X je úplný dolní polosvaz (existují libovolná infima neprázdných podmnožin). Tato množina je úplný svaz právě když je X lokálně kompaktní.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je jemnější (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

1. Čechova-Stoneova kompaktifikace je nejjemnější kompaktifikace na X.
2. Jednobodová kompaktifikace (pokud existuje) je nejhrubší kompaktifikace na X
3. Y je jemnější než Z právě když prekompaktní unifomita příslušná k Y je jemnější než prekompaktní unifomita příslušná k Z.
4. Množina všech kompaktifikací prostoru X je úplný dolní polosvaz (existují libovolná infima neprázdných podmnožin). Tato množina je úplný svaz právě když je X lokálně kompaktní.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je jemnější (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

1. Čechova-Stoneova kompaktifikace je nejjemnější kompaktifikace na X.
2. Jednobodová kompaktifikace (pokud existuje) je nejhrubší kompaktifikace na X
3. Y je jemnější než Z právě když prekompaktní unifomita příslušná k Y je jemnější než prekompaktní unifomita příslušná k Z.
4. Množina všech kompaktifikací prostoru X je úplný dolní polosvaz (existují libovolná infima neprázdných podmnožin). Tato množina je úplný svaz právě když je X lokálně kompaktní.

V kapitole o kompaktifikacích byla naznačena možnost uspořádání kompaktifikací daného prostoru X. Budeme se zajímat jen o $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory X a o jejich Hausdorffovy kompaktifikace. Známe-li vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami na X, můžeme dát do souvislosti i uspořádání těchto struktur.

DEFINICE (Uspořádání kompaktifikací)

Řekneme, že kompaktifikace $\varphi : X \to Y$ je jemnější (nebo větší) než kompaktifikace $\psi : X \to Z$, jestliže existuje spojité zobrazení $f : Y \to Z$ tak, že $f \circ \varphi = \psi$.

Polosvaz kompaktifikací

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor a Y, Z jsou jeho kompaktifikace.

1. Čechova-Stoneova kompaktifikace je nejjemnější kompaktifikace na X.
2. Jednobodová kompaktifikace (pokud existuje) je nejhrubší kompaktifikace na X
3. Y je jemnější než Z právě když prekompaktní unifomita příslušná k Y je jemnější než prekompaktní unifomita příslušná k Z.
4. Množina všech kompaktifikací prostoru X je úplný dolní polosvaz (existují libovolná infima neprázdných podmnožin). Tato množina je úplný svaz právě když je X lokálně kompaktní.

Je známo, že zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi metrickými prostory je stejnoměrně spojité právě když zachovává blízkost množin ve smyslu $d(A, B) = 0 \Rightarrow e(f(A), f(B)) = 0$. Vztah $d(A, B) = 0$ lze popsat i tak, že každá r-koule okolo A protíná B, neboli, že $U_r[A] \cap B \neq \emptyset$. To už je ale smysluplné i pro libovolné uniformity, kde místo U_r bereme prvky dané uniformity. Získaný vztah má jednoduché vlastnosti, které si popíšeme.

DEFINICE (Proximitní prostory)

Proximitní prostor je dvojice (X, p), kde X je množina a p je relace na podmnožinách X s vlastnostmi pro libovolná $A, B, C \subset X$:

1. $(\emptyset, B) \notin p$, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A, B) \in p$;
2. $(A, B) \in p \Leftrightarrow (B, A) \in p$;
3. $(A \cup C, B) \in p \Leftrightarrow$ buď $(A, B) \in p$ nebo $(C, B) \in p$;
4. $(A, B) \notin p \Rightarrow$ existuje C tak, že $(A, C) \notin p$, $(B, X \setminus C) \notin p$.

Relace p se nazývá proximita (nebo blízkost) a vztah $(A, B) \in p$ se značí i jako $A\, p\, B$ a čte se A *je blízké k* B v proximitě p.

Zobrazení $f : (X, p) \to (Y, q)$ se nazývá proximálně spojité, jestliže $A\, p\, B \Rightarrow f(A)\, q\, f(B)$.

Je známo, že zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi metrickými prostory je stejnoměrně spojité právě když zachovává blízkost množin ve smyslu $d(A, B) = 0 \Rightarrow e(f(A), f(B)) = 0$. Vztah $d(A, B) = 0$ lze popsat i tak, že každá r-koule okolo A protíná B, neboli, že $U_r[A] \cap B \neq \emptyset$. To už je ale smysluplné i pro libovolné uniformity, kde místo U_r bereme prvky dané uniformity. Získaný vztah má jednoduché vlastnosti, které si popíšeme.

DEFINICE (Proximitní prostory)

Proximitní prostor je dvojice (X, p), kde X je množina a p je relace na podmnožinách X s vlastnostmi pro libovolná $A, B, C \subset X$:

1. $(\emptyset, B) \notin p$, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A, B) \in p$;
2. $(A, B) \in p \Leftrightarrow (B, A) \in p$;
3. $(A \cup C, B) \in p \Leftrightarrow$ buď $(A, B) \in p$ nebo $(C, B) \in p$;
4. $(A, B) \notin p \Rightarrow$ existuje C tak, že $(A, C) \notin p$, $(B, X \setminus C) \notin p$.

Relace p se nazývá proximita (nebo blízkost) a vztah $(A, B) \in p$ se značí i jako $A\, p\, B$ a čte se A *je blízké k* B v proximitě p.
Zobrazení $f : (X, p) \to (Y, q)$ se nazývá proximálně spojité, jestliže $A\, p\, B \Rightarrow f(A)\, q\, f(B)$.

Každá uniformita $\mathcal{U}$ na X vytváří proximitu na X: $A\,p\,B \Leftrightarrow U[A] \cap B \neq \emptyset$ pro každé $U \in \mathcal{U}$.

Možná je překvapující i částečně obrácený vztah, uvedený v následujícím tvrzení. Nejdříve si však uvědomme, že každá proximita p na X vytváří na X i topologii:

$$x \in \overline{A}, \text{ jestliže } \{x\}\,p\,A\,.$$

$\Rightarrow$

Každá uniformita $\mathcal{U}$ na X vytváří proximitu na X: $A\, p\, B \Leftrightarrow U[A] \cap B \neq \emptyset$ pro každé $U \in \mathcal{U}$.

Možná je překvapující i částečně obrácený vztah, uvedený v následujícím tvrzení. Nejdříve si však uvědomme, že každá proximita p na X vytváří na X i topologii:

$$x \in \overline{A}, \text{ jestliže } \{x\}\, p\, A\,.$$

$\Rightarrow$

Každá uniformita $\mathcal{U}$ na X vytváří proximitu na X: $A\, p\, B \Leftrightarrow U[A] \cap B \neq \emptyset$ pro každé $U \in \mathcal{U}$.

Možná je překvapující i částečně obrácený vztah, uvedený v následujícím tvrzení. Nejdříve si však uvědomme, že každá proximita p na X vytváří na X i topologii:

$$x \in \overline{A}, \text{ jestliže } \{x\}\, p\, A\,.$$

$\Rightarrow$

TVRZENÍ

1. *Každá proximita p na X je vytvořena uniformitou na X.*
2. *Dvě uniformity vytvářejí stejnou proximitu právě když mají stejnou prekompaktní modifikaci.*
3. *Zobrazení $f : (X, p) \to (Y, q)$ je proximálně spojité právě když je $f : (X, \mathcal{U}_p) \to (Y, \mathcal{U}_q)$ stejnoměrně spojité.*

Třída proximitních prostorů se tedy dá ztotožnit s třídou prekompaktních prostorů. Situaci lze však chápat i tak, že máme jiný popis prekompaktních prostorů, který se někdy může hodit. Např. dříve uvedený vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami přejde na vztah mezi kompaktifikacemi a proximitami. Jak se popíše proximita příslušná k dané kompaktifikaci Y prostoru X? Velice přirozeně:

$$A \, p \, B \Leftrightarrow \overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y \neq \emptyset \, .$$

TVRZENÍ (Urysonovo lemma pro proximitní prostory)

Nechť (X, p) je proximitní prostor a A, B nejsou blízké podmnožiny. Pak existuje proximálně spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

TVRZENÍ

1. *Každá proximita* p *na* X *je vytvořena uniformitou na* X.
2. *Dvě uniformity vytvářejí stejnou proximitu právě když mají stejnou prekompaktní modifikaci.*
3. *Zobrazení* $f : (X, p) \to (Y, q)$ *je proximálně spojité právě když je* $f : (X, \mathcal{U}_p) \to (Y, \mathcal{U}_q)$ *stejnoměrně spojité.*

Třída proximitních prostorů se tedy dá ztotožnit s třídou prekompaktních prostorů. Situaci lze však chápat i tak, že máme jiný popis prekompaktních prostorů, který se někdy může hodit. Např. dříve uvedený vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami přejde na vztah mezi kompaktifikacemi a proximitami. Jak se popíše proximita příslušná k dané kompaktifikaci Y prostoru X? Velice přirozeně:

$$A\, p\, B \Leftrightarrow \overline{A}^{Y} \cap \overline{B}^{Y} \neq \emptyset\,.$$

TVRZENÍ (Urysonovo lemma pro proximitní prostory)

Nechť (X, p) *je proximitní prostor a* A, B *nejsou blízké podmnožiny. Pak existuje proximálně spojitá funkce* $f : X \to [0, 1]$, *která má hodnotu 0 na* A *a hodnotu 1 na* B.

TVRZENÍ

1. *Každá proximita* p *na* X *je vytvořena uniformitou na* X.
2. *Dvě uniformity vytvářejí stejnou proximitu právě když mají stejnou prekompaktní modifikaci.*
3. *Zobrazení* $f:(X,p)\to(Y,q)$ *je proximálně spojité právě když je* $f:(X,\mathcal{U}_p)\to(Y,\mathcal{U}_q)$ *stejnoměrně spojité.*

Třída proximitních prostorů se tedy dá ztotožnit s třídou prekompaktních prostorů. Situaci lze však chápat i tak, že máme jiný popis prekompaktních prostorů, který se někdy může hodit. Např. dříve uvedený vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami přejde na vztah mezi kompaktifikacemi a proximitami. Jak se popíše proximita příslušná k dané kompaktifikaci Y prostoru X? Velice přirozeně:

$$A\,p\,B \Leftrightarrow \overline{A}^{Y} \cap \overline{B}^{Y} \neq \emptyset\,.$$

TVRZENÍ (Urysonovo lemma pro proximitní prostory)

Nechť (X,p) *je proximitní prostor a* A, B *nejsou blízké podmnožiny. Pak existuje proximálně spojitá funkce* $f:X\to[0,1]$, *která má hodnotu 0 na* A *a hodnotu 1 na* B.

TVRZENÍ

1. *Každá proximita* p *na* X *je vytvořena uniformitou na* X.
2. *Dvě uniformity vytvářejí stejnou proximitu právě když mají stejnou prekompaktní modifikaci.*
3. *Zobrazení* $f : (X, p) \to (Y, q)$ *je proximálně spojité právě když je* $f : (X, \mathcal{U}_p) \to (Y, \mathcal{U}_q)$ *stejnoměrně spojité.*

Třída proximitních prostorů se tedy dá ztotožnit s třídou prekompaktních prostorů. Situaci lze však chápat i tak, že máme jiný popis prekompaktních prostorů, který se někdy může hodit. Např. dříve uvedený vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami přejde na vztah mezi kompaktifikacemi a proximitami. Jak se popíše proximita příslušná k dané kompaktifikaci Y prostoru X? Velice přirozeně:

$$A\, p\, B \Leftrightarrow \overline{A}^{Y} \cap \overline{B}^{Y} \neq \emptyset\,.$$

Z tvrzení o oddělování množin funkcemi v prekompaktních prostorech plyne obdoba Urysonova lemmatu pro proximitní prostory:

TVRZENÍ (Urysonovo lemma pro proximitní prostory)

Nechť (X, p) *je proximitní prostor a* A, B *nejsou blízké podmnožiny. Pak existuje proximálně spojitá funkce*

TVRZENÍ

1. *Každá proximita* p *na* X *je vytvořena uniformitou na* X.
2. *Dvě uniformity vytvářejí stejnou proximitu právě když mají stejnou prekompaktní modifikaci.*
3. *Zobrazení* $f:(X,p)\to(Y,q)$ *je proximálně spojité právě když je* $f:(X,\mathcal{U}_p)\to(Y,\mathcal{U}_q)$ *stejnoměrně spojité.*

Třída proximitních prostorů se tedy dá ztotožnit s třídou prekompaktních prostorů. Situaci lze však chápat i tak, že máme jiný popis prekompaktních prostorů, který se někdy může hodit. Např. dříve uvedený vztah mezi kompaktifikacemi a prekompaktními uniformitami přejde na vztah mezi kompaktifikacemi a proximitami. Jak se popíše proximita příslušná k dané kompaktifikaci Y prostoru X? Velice přirozeně:

$$A\,p\,B \Leftrightarrow \overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y \neq \emptyset\,.$$

TVRZENÍ (Urysonovo lemma pro proximitní prostory)

Nechť (X,p) *je proximitní prostor a* A, B *nejsou blízké podmnožiny. Pak existuje proximálně spojitá funkce* $f:X\to[0,1]$, *která má hodnotu 0 na* A *a hodnotu 1 na* B.