7. ÚPLNÉ A PREKOMPAKTNÍ PROSTORY

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Obecnosti

1. Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho uniformně diskrétní podprostor konečný metrických prostorů této formulaci odpovídá, že každá r-síť je konečná).
2. Definujeme-li na uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ a pro $U \in \mathcal{U}$ U-síť jako podmnožinu, pro jejíž libovolné dva různé body x, y je $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ (což odpovídá r-síti v metrických prostorech), je uniformní prostor prekompaktní právě když je každá jeho U-síť konečná.
3. Prekompaktní prostor má za subbázi pokrytí složené z nejvýše dvou množin.
4. Existuje uniformní prostor, který není prekompaktní, ale každá jeho stejnoměrně spojitá reálná funkce je omezená.

Obecnosti

1. Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho uniformně diskrétní podprostor konečný metrických prostorů této formulaci odpovídá, že každá r-síť je konečná).
2. Definujeme-li na uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ a pro $U \in \mathcal{U}$ U-síť jako podmnožinu, pro jejíž libovolné dva různé body x, y je $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ (což odpovídá r-síti v metrických prostorech), je uniformní prostor prekompaktní právě když je každá jeho U-síť konečná.
3. Prekompaktní prostor má za subbázi pokrytí složené z nejvýše dvou množin.
4. Existuje uniformní prostor, který není prekompaktní, ale každá jeho stejnoměrně spojitá reálná funkce je omezená.

Obecnosti

1. Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho uniformně diskrétní podprostor konečný metrických prostorů této formulaci odpovídá, že každá r-síť je konečná).
2. Definujeme-li na uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ a pro $U \in \mathcal{U}$ U-síť jako podmnožinu, pro jejíž libovolné dva různé body x, y je $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ (což odpovídá r-síti v metrických prostorech), je uniformní prostor prekompaktní právě když je každá jeho U-síť konečná.
3. Prekompaktní prostor má za subbázi pokrytí složené z nejvýše dvou množin.
4. Existuje uniformní prostor, který není prekompaktní, ale každá jeho stejnoměrně spojitá reálná funkce je omezená.

Obecnosti

1. Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho uniformně diskrétní podprostor konečný metrických prostorů této formulaci odpovídá, že každá r-síť je konečná).
2. Definujeme-li na uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ a pro $U \in \mathcal{U}$ U-síť jako podmnožinu, pro jejíž libovolné dva různé body x, y je $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ (což odpovídá r-síti v metrických prostorech), je uniformní prostor prekompaktní právě když je každá jeho U-síť konečná.
3. Prekompaktní prostor má za subbázi pokrytí složené z nejvýše dvou množin.
4. Existuje uniformní prostor, který není prekompaktní, ale každá jeho stejnoměrně spojitá reálná funkce je omezená.

Úplně regulární prostor X je pseudokompaktní právě když je každá spojitá reálná funkce na X omezená. Uniformní prostor X je prekompaktní právě když je každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na X omezená. Dá se očekávat, že mezi pseudokompaktností a prekompaktností bude nějaký bližší vztah.

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

Předchozí věta má za důsledek i následující charakterizaci kompaktnosti úplně regulárních prostorů.

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *Každá uniformita na X je prekompaktní.*
3. *Jemná uniformita na X je prekompaktní.*

TVRZENÍ (Pseudokompaktnost a prekompaktnost)

Nechť X je úplně regulární prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *X je parakompaktní a pseudokompaktní.*
3. *X je parakompaktní a jemná uniformita na X je prekompaktní.*

Prostor spočetných ordinálů má jedinou uniformitu. Ta musí být prekompaktní (proč?). Lze charakterizovat topologické prostory mající jedinou uniformitu pomocí nějaké vnitřní podmínky? Tato otázka má samozřejmě smysl jen pro úplně regulární prostory. Předpokládejme navíc, že naše prostory X budou Hausdorffovy (kvůli lepším popisům kompaktifikací, které nyní bereme také jen Hausdorffovy).

Pomocí tvrzení o vztahu prekompaktních uniformit na X a kompaktifikací prostoru X se snadno ukáží následující tvrzení:

TVRZENÍ (Prostory s jedinou uniformitou)

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *Prostor X je vytvářen jedinou uniformitou.*
2. *Prostor X má jedinou kompaktifikaci.*
3. *Prostor X je buď kompaktní nebo βX je jeho jednobodová kompaktifikace.*
4. *Ze dvou disjunktních uzavřených podmnožin v X musí být jedna kompaktní.*

Dalšími příklady nekompaktních prostorů jejichž Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, jsou některé součiny kompaktních prostorů, z nichž se odebere jeden bod. Např. $[0,1]^{\omega_1} \setminus \{p\}$.

Pomocí tvrzení o vztahu prekompaktních uniformit na X a kompaktifikací prostoru X se snadno ukáží následující tvrzení:

TVRZENÍ (Prostory s jedinou uniformitou)

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *Prostor X je vytvářen jedinou uniformitou.*
2. *Prostor X má jedinou kompaktifikaci.*
3. *Prostor X je buď kompaktní nebo βX je jeho jednobodová kompaktifikace.*
4. *Ze dvou disjunktních uzavřených podmnožin v X musí být jedna kompaktní.*

Dalšími příklady nekompaktních prostorů jejichž Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, jsou některé součiny kompaktních prostorů, z nichž se odebere jeden bod. Např. $[0,1]^{\omega_1} \setminus \{p\}$.

Uvědomte si, že prostor jehož Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, musí být pseudokompaktní (proč?). Nemusí být spočetně kompaktní, jak ukazuje příklad z předchozího odstavce.

Pomocí tvrzení o vztahu prekompaktních uniformit na X a kompaktifikací prostoru X se snadno ukáží následující tvrzení:

TVRZENÍ (Prostory s jedinou uniformitou)

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *Prostor X je vytvářen jedinou uniformitou.*
2. *Prostor X má jedinou kompaktifikaci.*
3. *Prostor X je buď kompaktní nebo βX je jeho jednobodová kompaktifikace.*
4. *Ze dvou disjunktních uzavřených podmnožin v X musí být jedna kompaktní.*

Dalšími příklady nekompaktních prostorů jejichž Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, jsou některé součiny kompaktních prostorů, z nichž se odebere jeden bod. Např. $[0,1]^{\omega_1} \setminus \{p\}$.

Uvědomte si, že prostor jehož Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, musí být pseudokompaktní (proč?). Nemusí být spočetně kompaktní, jak ukazuje příklad z předchozího odstavce.

Pomocí tvrzení o vztahu prekompaktních uniformit na X a kompaktifikací prostoru X se snadno ukáží následující tvrzení:

TVRZENÍ (Prostory s jedinou uniformitou)

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *Prostor X je vytvářen jedinou uniformitou.*
2. *Prostor X má jedinou kompaktifikaci.*
3. *Prostor X je buď kompaktní nebo βX je jeho jednobodová kompaktifikace.*
4. *Ze dvou disjunktních uzavřených podmnožin v X musí být jedna kompaktní.*

Dalšími příklady nekompaktních prostorů jejichž Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, jsou některé součiny kompaktních prostorů, z nichž se odebere jeden bod. Např. $[0,1]^{\omega_1} \setminus \{p\}$.

Uvědomte si, že prostor jehož Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, musí být pseudokompaktní (proč?). Nemusí být spočetně kompaktní, jak ukazuje příklad z předchozího odstavce.

Pomocí tvrzení o vztahu prekompaktních uniformit na X a kompaktifikací prostoru X se snadno ukáží následující tvrzení:

TVRZENÍ (Prostory s jedinou uniformitou)

Nechť X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní.

1. *Prostor X je vytvářen jedinou uniformitou.*
2. *Prostor X má jedinou kompaktifikaci.*
3. *Prostor X je buď kompaktní nebo βX je jeho jednobodová kompaktifikace.*
4. *Ze dvou disjunktních uzavřených podmnožin v X musí být jedna kompaktní.*

Dalšími příklady nekompaktních prostorů jejichž Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, jsou některé součiny kompaktních prostorů, z nichž se odebere jeden bod. Např. $[0,1]^{\omega_1} \setminus \{p\}$.

Uvědomte si, že prostor jehož Čechova-Stoneova kompaktifikace je jednobodová, musí být pseudokompaktní (proč?). Nemusí být spočetně kompaktní, jak ukazuje příklad z předchozího odstavce.

Práce s filtry bývá často jednodušší než s usměrněnými soubory (až na výjimky, např. posloupnosti). Nicméně, představa konvergence je zase jednodušší pro usměrněné soubory. Uvedeme nyní ekvivalentní přístup úplnosti pomocí usměrněných souborů. Přechod mezi filtry a usměrněnými soubory už znáte z topologických prostporů.

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

Nyní lze zopakovat a dokázat obdobná tvrzení, jaká platí pro cauchyovské filtry. Vynecháme „ultra-soubory” odpovídající ultrafiltrům (poslední vlastnost), modifikaci minimálních cauchyovských filtrů a také první vlastnost, která není pro soubory zajímavá.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

1. *Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje množinu, ve které leží všechny body x_a od nějakého indexu počínaje.*
2. *Hromadný bod cauchyovského usměrněného souboru je jeho limitou.*
3. *Každý konvergentní usměrněný soubor v uniformním prostoru je cauchyovský.*
4. *Cauchyovský usměrněný soubor v X je cauchyovský v každém podprostoru, ve kterém leží.*
5. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského usměrněného souboru je cauchyovský soubor.*

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

1. *Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje množinu, ve které leží všechny body x_a od nějakého indexu počínaje.*
2. *Hromadný bod cauchyovského usměrněného souboru je jeho limitou.*
3. *Každý konvergentní usměrněný soubor v uniformním prostoru je cauchyovský.*
4. *Cauchyovský usměrněný soubor v X je cauchyovský v každém podprostoru, ve kterém leží.*
5. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského usměrněného souboru je cauchyovský soubor.*

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

1. *Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje množinu, ve které leží všechny body x_a od nějakého indexu počínaje.*
2. *Hromadný bod cauchyovského usměrněného souboru je jeho limitou.*
3. *Každý konvergentní usměrněný soubor v uniformním prostoru je cauchyovský.*
4. *Cauchyovský usměrněný soubor v X je cauchyovský v každém podprostoru, ve kterém leží.*
5. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského usměrněného souboru je cauchyovský soubor.*

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

1. *Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje množinu, ve které leží všechny body x_a od nějakého indexu počínaje.*
2. *Hromadný bod cauchyovského usměrněného souboru je jeho limitou.*
3. *Každý konvergentní usměrněný soubor v uniformním prostoru je cauchyovský.*
4. *Cauchyovský usměrněný soubor v X je cauchyovský v každém podprostoru, ve kterém leží.*
5. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského usměrněného souboru je cauchyovský soubor.*

DEFINICE (Cauchyovský usměrněný soubor)

Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé uniformní okolí U diagonály existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, x_c) \in U$ pro každé $b, c \in A$, $b, c > a$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských souborů)

1. *Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje množinu, ve které leží všechny body x_a od nějakého indexu počínaje.*
2. *Hromadný bod cauchyovského usměrněného souboru je jeho limitou.*
3. *Každý konvergentní usměrněný soubor v uniformním prostoru je cauchyovský.*
4. *Cauchyovský usměrněný soubor v X je cauchyovský v každém podprostoru, ve kterém leží.*
5. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského usměrněného souboru je cauchyovský soubor.*

Aby mělo smysl pracovat i s cauchyovskými soubory místo filtrů, musí platit následující tvrzení.

TVRZENÍ (Úplnost pomocí cauchyovských souborů)

Uniformní prostor X je úplný právě když každý jeho cauchyovský soubor konverguje.

Pokud bychom tuto charakterizaci přenesli na uniformní metrizovatelné prostory, dostali bychom, že nejen cauchyovské posloupnosti, ale i „delší" usměrněné soubory se musí zkontrolovat, že konvergují. To by asi nebylo příliš vhodné. Není však těžké dokázat, že opravdu se stačí omezit na posloupnosti:

Omezení pomocí báze

Nechť $\mathcal{V}$ je báze uniformních okolí diagonály uniformního prostoru X. Prostor X je úplný právě když konverguje každý cauchyovský soubor indexovaný množinou $\mathcal{V}$.

TVRZENÍ (Úplnost pomocí cauchyovských souborů)

Uniformní prostor X je úplný právě když každý jeho cauchyovský soubor konverguje.

Pokud bychom tuto charakterizaci přenesli na uniformní metrizovatelné prostory, dostali bychom, že nejen cauchyovské posloupnosti, ale i „delší" usměrněné soubory se musí zkontrolovat, že konvergují. To by asi nebylo příliš vhodné. Není však těžké dokázat, že opravdu se stačí omezit na posloupnosti:

Omezení pomocí báze

Nechť $\mathcal{V}$ je báze uniformních okolí diagonály uniformního prostoru X. Prostor X je úplný právě když konverguje každý cauchyovský soubor indexovaný množinou $\mathcal{V}$.

TVRZENÍ (Úplnost pomocí cauchyovských souborů)

Uniformní prostor X je úplný právě když každý jeho cauchyovský soubor konverguje.

Pokud bychom tuto charakterizaci přenesli na uniformní metrizovatelné prostory, dostali bychom, že nejen cauchyovské posloupnosti, ale i „delší" usměrněné soubory se musí zkontrolovat, že konvergují. To by asi nebylo příliš vhodné. Není však těžké dokázat, že opravdu se stačí omezit na posloupnosti:

Omezení pomocí báze

Nechť $\mathcal{V}$ je báze uniformních okolí diagonály uniformního prostoru X. Prostor X je úplný právě když konverguje každý cauchyovský soubor indexovaný množinou $\mathcal{V}$.

TVRZENÍ (Úplnost pomocí cauchyovských souborů)

Uniformní prostor X je úplný právě když každý jeho cauchyovský soubor konverguje.

Pokud bychom tuto charakterizaci přenesli na uniformní metrizovatelné prostory, dostali bychom, že nejen cauchyovské posloupnosti, ale i „delší" usměrněné soubory se musí zkontrolovat, že konvergují. To by asi nebylo příliš vhodné. Není však těžké dokázat, že opravdu se stačí omezit na posloupnosti:

Omezení pomocí báze

Nechť $\mathcal{V}$ je báze uniformních okolí diagonály uniformního prostoru X. Prostor X je úplný právě když konverguje každý cauchyovský soubor indexovaný množinou $\mathcal{V}$.

TVRZENÍ (Úplnost pomocí cauchyovských souborů)

Uniformní prostor X je úplný právě když každý jeho cauchyovský soubor konverguje.

Pokud bychom tuto charakterizaci přenesli na uniformní metrizovatelné prostory, dostali bychom, že nejen cauchyovské posloupnosti, ale i „delší" usměrněné soubory se musí zkontrolovat, že konvergují. To by asi nebylo příliš vhodné. Není však těžké dokázat, že opravdu se stačí omezit na posloupnosti:

Omezení pomocí báze

Nechť $\mathcal{V}$ je báze uniformních okolí diagonály uniformního prostoru X. Prostor X je úplný právě když konverguje každý cauchyovský soubor indexovaný množinou $\mathcal{V}$.

Obdobná charakterizace platí i pro cauchyovské filtry, ale hůře se formuluje.

TVRZENÍ (Úplnost pomocí cauchyovských souborů)

Uniformní prostor X je úplný právě když každý jeho cauchyovský soubor konverguje.

Pokud bychom tuto charakterizaci přenesli na uniformní metrizovatelné prostory, dostali bychom, že nejen cauchyovské posloupnosti, ale i „delší" usměrněné soubory se musí zkontrolovat, že konvergují. To by asi nebylo příliš vhodné. Není však těžké dokázat, že opravdu se stačí omezit na posloupnosti:

Omezení pomocí báze

Nechť $\mathcal{V}$ je báze uniformních okolí diagonály uniformního prostoru X. Prostor X je úplný právě když konverguje každý cauchyovský soubor indexovaný množinou $\mathcal{V}$.

Naznačíme nyní klasický postup zúplnění uniformního prostoru, který nepředpokládá existenci dostatečně mnoha úplných metrických prostorů, ani úplnost prostoru reálných čísel. Postup ukážeme pro cauchyovské soubory, sami zkuste postup zmodifikovat pro cauchyovské filtry – pro ty lze výhodně použít minimální cauchyovské filtry, není třeba pak dělat nějakou ekvivalenci.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\},\}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V \in \mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W, y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y = X \cup \mathcal{T}$. Pro $U \in \mathcal{U}$ definujeme
$$\widetilde{U} = \{\dots\}$$
Soustava $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U};\, U \in \mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.
2. $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X,\mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\},\}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V \in \mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W, y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y = X \cup \mathcal{T}$. Pro $U \in \mathcal{U}$ definujeme
$$\widetilde{U} = \{\ldots\}$$
Soustava $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}; U \in \mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.
2. $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X,\mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\},\}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V \in \mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W, y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y = X \cup \mathcal{T}$. Pro $U \in \mathcal{U}$ definujeme
$$\widetilde{U} = \{\dots\}$$
Soustava $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}; U \in \mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.
2. $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X,\mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\},\}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V\in\mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W,y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y=X\cup\mathcal{T}$. Pro $U\in\mathcal{U}$ definujeme
$$\widetilde{U}=\{\dots\}$$
Soustava $\widetilde{\mathcal{U}}=\{\widetilde{U};\,U\in\mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.
2. $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X,\mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\},\}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V \in \mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W, y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y = X \cup \mathcal{T}$. Pro $U \in \mathcal{U}$ definujeme

$$\widetilde{U} = \{\dots\}$$

   Soustava $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}; U \in \mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.

2. $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X,\mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X, \mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\}, \}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V \in \mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W, y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y = X \cup \mathcal{T}$. Pro $U \in \mathcal{U}$ definujeme

$$\widetilde{U} = \{\ldots\}$$

   Soustava $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\widetilde{U}; U \in \mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.

2. $(Y, \widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X, \mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y, \widetilde{\mathcal{U}})$.

Klasický postup zúplnění

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je množina všech jeho nekonvergentních cauchyovských souborů indexovaných nějakou bází $\mathcal{V}$. Řekneme, že dva soubory $\{x_V\},\}y_V\}$ z $\mathcal{S}$ jsou ekvivalentní, jestliže každé $V\in\mathcal{V}$ obsahuje všechna (x_W,y_W) od nějakého indexu počínaje. Označme $\mathcal{T}$ třídy v $\mathcal{S}$ podle této ekvivalence.

1. Nechť $Y=X\cup\mathcal{T}$. Pro $U\in\mathcal{U}$ definujeme

   $$\widetilde{U}=\{\ldots\}$$

   Soustava $\widetilde{\mathcal{U}}=\{\widetilde{U};\,U\in\mathcal{U}\}$ je uniformita na Y.
2. $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$ je úplný prostor.
3. $(X,\mathcal{U})$ je hustý podprostor prostoru $(Y,\widetilde{\mathcal{U}})$.

V předchozí klasické konstrukci zúplnění nebylo nutné pro získání většího úplného prostoru dělat ekvivalenci a bylo možné brát celé $\mathcal{S}$ místo $\mathcal{T}$ (a nebylo nutné se omezit jen na cauchyovské soubory indexované nějakou bází). Potom je však přidáváno zbytečně mnoho bodů a vzniklý prostor nebude Hausdorffův, i když X Hausdorffův je. Uvedená konstrukce Hausdorffovost zachovává a i když X není Hausdorffův, lze od sebe vždy oddělit každé dva body v Y, z nichž aspoň jeden neleží v X.
V jistém smyslu souvisí předchozí odstavec s následujícím snadným tvrzením:

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X, d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X, d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor* X *slabě vytvořen zobrazením na prostor* Y*, je* X *úplný právě když je* Y *úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť* $f : X \to \mathbb{R}$ *a* $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ *je pseudometrika na* X*. Pak* (X, d) *je úplný právě když je* $f(X)$ *uzavřený v* $\mathbb{R}$*.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X, d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

Jaká je situace s úplností v množině uniformit vytvářejících danou topologii? Mohou nastat skoro všechny možnosti.

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X,d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

1. *Každá uniformita na X je úplná právě když X je kompaktní.*
2. *Je-li X parakompaktní, je jeho jemná uniformita úplná.*
3. *Má-li X úplnou uniformitu $\mathcal{U}$, je každá uniformita jemnější než $\mathcal{U}$ a vytvářející topologii na X, také úplná (speciálně je tedy i jemná uniformita úplná).*
4. *Existuje neparakompaktní prostor, jehož jemná uniformita je úplná.*
5. *Existuje úplně regulární prostor, jehož žádná uniformita není úplná.*

V poznámkách najdete další poznatky o topologických prostorech majících úplnou uniformitu.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor* X *slabě vytvořen zobrazením na prostor* Y, *je* X *úplný právě když je* Y *úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť* $f : X \to \mathbb{R}$ *a* $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ *je pseudometrika na* X. *Pak* (X, d) *je úplný právě když je* $f(X)$ *uzavřený v* $\mathbb{R}$.

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X *je úplně regulární prostor.*

1. *Každá uniformita na* X *je úplná právě když* X *je kompaktní.*
2. *Je-li* X *parakompaktní, je jeho jemná uniformita úplná.*
3. *Má-li* X *úplnou uniformitu* $\mathcal{U}$, *je každá uniformita jemnější než* $\mathcal{U}$ *a vytvářející topologii na* X, *také úplná (speciálně je tedy i jemná uniformita úplná).*
4. *Existuje neparakompaktní prostor, jehož jemná uniformita je úplná.*
5. *Existuje úplně regulární prostor, jehož žádná uniformita není úplná.*

V poznámkách najdete další poznatky o topologických prostorech majících úplnou uniformitu.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X,d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

1. *Každá uniformita na X je úplná právě když X je kompaktní.*
2. *Je-li X parakompaktní, je jeho jemná uniformita úplná.*
3. *Má-li X úplnou uniformitu $\mathcal{U}$, je každá uniformita jemnější než $\mathcal{U}$ a vytvářející topologii na X, také úplná (speciálně je tedy i jemná uniformita úplná).*
4. *Existuje neparakompaktní prostor, jehož jemná uniformita je úplná.*
5. *Existuje úplně regulární prostor, jehož žádná uniformita není úplná.*

V poznámkách najdete další poznatky o topologických prostorech majících úplnou uniformitu.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X, d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

1. *Každá uniformita na X je úplná právě když X je kompaktní.*
2. *Je-li X parakompaktní, je jeho jemná uniformita úplná.*
3. *Má-li X úplnou uniformitu $\mathcal{U}$, je každá uniformita jemnější než $\mathcal{U}$ a vytvářející topologii na X, také úplná (speciálně je tedy i jemná uniformita úplná).*
4. *Existuje neparakompaktní prostor, jehož jemná uniformita je úplná.*
5. *Existuje úplně regulární prostor, jehož žádná uniformita není úplná.*

V poznámkách najdete další poznatky o topologických prostorech majících úplnou uniformitu.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X, d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

1. *Každá uniformita na X je úplná právě když X je kompaktní.*
2. *Je-li X parakompaktní, je jeho jemná uniformita úplná.*
3. *Má-li X úplnou uniformitu $\mathcal{U}$, je každá uniformita jemnější než $\mathcal{U}$ a vytvářející topologii na X, také úplná (speciálně je tedy i jemná uniformita úplná).*
4. *Existuje neparakompaktní prostor, jehož jemná uniformita je úplná.*
5. *Existuje úplně regulární prostor, jehož žádná uniformita není úplná.*

V poznámkách najdete další poznatky o topologických prostorech majících úplnou uniformitu.

TVRZENÍ (Úplnost na slabě vytvořených uniformitách)

1. *Je-li uniformní prostor X slabě vytvořen zobrazením na prostor Y, je X úplný právě když je Y úplný.*
2. *Uniformní prostor slabě vytvořený zobrazeními na úplné prostory, je úplný.*
3. *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ a $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ je pseudometrika na X. Pak (X,d) je úplný právě když je $f(X)$ uzavřený v $\mathbb{R}$.*

TVRZENÍ (Úplné uniformity na topologických prostorech)

Nechť X je úplně regulární prostor.

1. *Každá uniformita na X je úplná právě když X je kompaktní.*
2. *Je-li X parakompaktní, je jeho jemná uniformita úplná.*
3. *Má-li X úplnou uniformitu $\mathcal{U}$, je každá uniformita jemnější než $\mathcal{U}$ a vytvářející topologii na X, také úplná (speciálně je tedy i jemná uniformita úplná).*
4. *Existuje neparakompaktní prostor, jehož jemná uniformita je úplná.*
5. *Existuje úplně regulární prostor, jehož žádná uniformita není úplná.*

V poznámkách najdete další poznatky o topologických prostorech majících úplnou uniformitu.