6. UNIFORMNÍ PROSTORY

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Protože uniformita je o něco více než jen filtr relací, má i báze uniformity další vlastnosti. Podle definice je $\mathcal{V}$ báze uniformity $\mathcal{U}$ na množině X, jestliže $\mathcal{U} = \{U \subset X \times X; U \supset V \text{ pro nějaké } V \in \mathcal{V}\}$. Je potřeba zodpovědět otázku, kdy je báze filtru relací na X bází nějaké uniformity. Odpověď je snadná a jednoduchá (zvláště když se bere báze filtru složená z reflexivních a symetrických relací).

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

V uniformitě vytvořené pseudometrikou d na X, je tedy bází každá soustava $\{U_r\}_R$, kde $\inf R = 0$. Většinou se bere za R spočetná posloupnost konvergující k 0.
Každá báze filtru ekvivalencí na množině X je bází uniformity.

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H);\ H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

Je vhodné si uvědomit, že

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

To znamená, že báze uniformních pokrytí jsou právě báze filtru vzhledem k hvězdovitému zjemnění.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

TVRZENÍ (Charakterizace báze uniformity)

1. *Báze filtru $\mathcal{V}$ relací na množině X je bází uniformity právě když*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje diagonálu;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje V^{-1} pro nějaké $V \in \mathcal{V}$;*
   - *každý prvek z $\mathcal{V}$ obsahuje $V \circ V$ pro nějaké $V \in \mathcal{V}$.*
2. *Báze filtru η (vzhledem ke zjemnění) pokrytí množiny X je bází uniformity právě když každé pokrytí z η má hvězdovité zjemnění v η.*

TVRZENÍ (Filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění)

Všechna uniformní pokrytí dané uniformity tvoří filtr vzhledem k hvězdovitému zjemnění.
Každý filtr η pokrytí množiny X (vzhledem k hvězdovitému zjemnění) určuje jednoznačně uniformitu, která má za uniformní pokrytí právě prvky z η.

Je-li pokrytí $\mathcal{H}$ dvojité hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ množiny X (tj. $\mathcal{H}$ hvězdovitě zjemňuje nějaké hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$), je $\mathcal{H}$ silné hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$, tj. $\{\mathrm{star}_{\mathcal{H}}(H); H \in \mathcal{H}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.
Místo hvězdovitých zjemnění v popisu uniformních pokrytí lze tedy brát silná hvězdovitá zjemnění.

$\Rightarrow$

V topologii tvoří každý soubor podmnožin subbázi nějaké topologie. V uniformních prostorech odpovídající situace neplatí. Ne každý soubor reflexivních a symetrických relací je subbází uniformity (samozřejmě je subbází nějakého filtru). Pro jednoduchost formulace vezmeme rovnou reflexivní a symetrické relace.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Subbáze pseudometrizovatelné uniformity je i její bází.
Každá soustava ekvivalencí na dané množině je subbáze uniformity.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

V praxi se většinou vyskytují subbáze $\mathcal{V}$, které mají vlastnost uvedenou v předchozí charakterizaci pro $n = 1$, tj. $\mathcal{V} \circ \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

TVRZENÍ (Subbáze uniformity)

Soustava $\mathcal{V}$ reflexivních a symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje konečný počet $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ tak, že $\bigcap V_i \circ \bigcap V_i \subset V$.

Charakterizujte obdobně subbáze uniformních pokrytí (i pro filtry vzhledem k hvězdovitým zjemněním).

Na rozdíl od topologie, kde průnik topologií (soustav otevřených množin) je opět topologie, průnik uniformit nemusí být uniformita, není to obecně ani báze nebo subbáze uniformity, protože tranzitivita může zmizet.
Supremum množiny $\mathcal{U}_a$ uniformit na množině X je množina všech relací, které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$.

Předchozí postup je velmi častý v případech, kdy je nutné z dané soustavy relací vybrat největší tranzitivní soustavu.

$\Rightarrow$

Součin uniformních prostorů je, podobně jako součin topologických prostorů, sice snadno a elegantně definovaný, ale nesnadno a složitě představitelný pro konkrétní práci.

Součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$ má za bázi relace

$$\{(\{x_a\}, \{y_a\}); (x_a, y_a) \in U_a, , \forall a \in K\},$$

kde K je konečná podmnožina A a $U_a \in \mathcal{U}_a$.
Pro případ mocniny $(X, \mathcal{U})^A$ chápané jako množina funkcí $f : A \to X$ se tato relace vyjádří jako

$$\{(f, g); (f(x), g(x)) \in U, , \forall a \in K\},$$

tj., berou se ty dvojice zobrazení, které na konečné množině K jsou U-blízké.

Pomocí uniformních pokrytí se báze součinu popíše takto:

Vezme se konečná množina indexů, např. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a pro každý tento index se vezme uniformní pokrytí $\{G_i\}_I$, $\{H_j\}_J$ a $\{P_m\}_M$ prostorů X_α, X_β a X_γ resp. Bázové pokrytí je pak tvořeno prvky $G_i \times H_j \times P_m \times \prod_{A \setminus \{\alpha,\beta,\gamma\}} X_a$ pro libovolná $i \in I, j \in J, m \in M$.

Je to tedy součin uniformních pokrytí konečně mnoha prostorů ze součinu vynásobený zbytkem součinu.

Součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$ má za bázi relace

$$\{(\{x_a\}, \{y_a\}); (x_a, y_a) \in U_a\,, , \forall a \in K\}\,,$$

kde K je konečná podmnožina A a $U_a \in \mathcal{U}_a$.
Pro případ mocniny $(X, \mathcal{U})^A$ chápané jako množina funkcí $f : A \to X$ se tato relace vyjádří jako

$$\{(f, g); (f(x), g(x)) \in U\,, , \forall a \in K\}\,,$$

tj., berou se ty dvojice zobrazení, které na konečné množině K jsou U-blízké.

Pomocí uniformních pokrytí se báze součinu popíše takto:

Vezme se konečná množina indexů, např. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a pro každý tento index se vezme uniformní pokrytí $\{G_i\}_I$, $\{H_j\}_J$ a $\{P_m\}_M$ prostorů X_α, X_β a X_γ resp. Bázové pokrytí je pak tvořeno prvky $G_i \times H_j \times P_m \times \Pi_{A \setminus \{\alpha,\beta,\gamma\}} X_a$ pro libovolná $i \in I, j \in J, m \in M$.

Je to tedy součin uniformních pokrytí konečně mnoha prostorů ze součinu vynásobený zbytkem součinu.

Součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$ má za bázi relace

$$\{(\{x_a\}, \{y_a\}); (x_a, y_a) \in U_a \,, , \forall a \in K\} \,,$$

kde K je konečná podmnožina A a $U_a \in \mathcal{U}_a$.
Pro případ mocniny $(X, \mathcal{U})^A$ chápané jako množina funkcí $f : A \to X$ se tato relace vyjádří jako

$$\{(f, g); (f(x), g(x)) \in U \,, , \forall a \in K\} \,,$$

tj., berou se ty dvojice zobrazení, které na konečné množině K jsou U-blízké.

Pomocí uniformních pokrytí se báze součinu popíše takto:

Vezme se konečná množina indexů, např. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a pro každý tento index se vezme uniformní pokrytí $\{G_i\}_I$, $\{H_j\}_J$ a $\{P_m\}_M$ prostorů X_α, X_β a X_γ resp. Bázové pokrytí je pak tvořeno prvky $G_i \times H_j \times P_m \times \Pi_{A \setminus \{\alpha,\beta,\gamma\}} X_a$ pro libovolná $i \in I, j \in J, m \in M$.

Je to tedy součin uniformních pokrytí konečně mnoha prostorů ze součinu vynásobený zbytkem součinu.

Součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$ má za bázi relace

$$\{(\{x_a\}, \{y_a\}); (x_a, y_a) \in U_a \, , \, , \forall a \in K\} \, ,$$

kde K je konečná podmnožina A a $U_a \in \mathcal{U}_a$.
Pro případ mocniny $(X, \mathcal{U})^A$ chápané jako množina funkcí $f : A \to X$ se tato relace vyjádří jako

$$\{(f, g); (f(x), g(x)) \in U \, , \, , \forall a \in K\} \, ,$$

tj., berou se ty dvojice zobrazení, které na konečné množině K jsou U-blízké.

Pomocí uniformních pokrytí se báze součinu popíše takto:

Vezme se konečná množina indexů, např. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a pro každý tento index se vezme uniformní pokrytí $\{G_i\}_I$, $\{H_j\}_J$ a $\{P_m\}_M$ prostorů X_α, X_β a X_γ resp. Bázové pokrytí je pak tvořeno prvky $G_i \times H_j \times P_m \times \Pi_{A \setminus \{\alpha,\beta,\gamma\}} X_a$ pro libovolná $i \in I, j \in J, m \in M$.

Je to tedy součin uniformních pokrytí konečně mnoha prostorů ze součinu vynásobený zbytkem součinu.

Součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$ má za bázi relace

$$\{(\{x_a\}, \{y_a\}); (x_a, y_a) \in U_a, , \forall a \in K\},$$

kde K je konečná podmnožina A a $U_a \in \mathcal{U}_a$.
Pro případ mocniny $(X, \mathcal{U})^A$ chápané jako množina funkcí $f : A \to X$ se tato relace vyjádří jako

$$\{(f, g); (f(x), g(x)) \in U, , \forall a \in K\},$$

tj., berou se ty dvojice zobrazení, které na konečné množině K jsou U-blízké.

Pomocí uniformních pokrytí se báze součinu popíše takto:

Vezme se konečná množina indexů, např. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a pro každý tento index se vezme uniformní pokrytí $\{G_i\}_I$, $\{H_j\}_J$ a $\{P_m\}_M$ prostorů X_α, X_β a X_γ resp. Bázové pokrytí je pak tvořeno prvky $G_i \times H_j \times P_m \times \Pi_{A\setminus\{\alpha,\beta,\gamma\}} X_a$ pro libovolná $i \in I, j \in J, m \in M$.

Je to tedy součin uniformních pokrytí konečně mnoha prostorů ze součinu vynásobený zbytkem součinu.

Každá ekvivalence na množině X je triviálně bází nějaké uniformity. Každý soubor ekvivalencí na X je tedy subbází uniformity. Není zde nutné ověřovat tranzitivitu souboru. Tyto prostory jsou specifické a mají vlastní název.

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

V příkladech jsou uvedeny základní příklady uniformně nuldimenzionálních prostorů.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

DEFINICE (Uniformně nuldimenzionální prostory)

Uniformní prostor se nazývá uniformně nuldimenzionální, jestliže má subbázi (nebo bázi) složenou z ekvivalencí (ekvivalentně, má subbázi uniformních pokrytí složenou z disjunktních pokrytí, tedy z rozkladů).

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz

Je výhodné znát některé jednoduché ale často použitelné věty o stejnoměrné spojitosti. Uvedeme si několik z nich.

Stejnoměrná spojitost pseudometrik

Nechť X je uniformní prostor a d je pseudometrika na X.

1. Uniformita vytvořená pseudometrikou d je hrubší než uniformita prostoru X právě když je zobrazení $d: X \times X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojité. Pak se d nazývá stejnoměrně spojitá pseudometrika na X.
2. Je-li d stejnoměrně spojitá na X a $A \subset X$, je funkce $d(\cdot, A): X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Následující vlastnost bude použita při rozšiřování stejnoměrně spojitých zobrazení.

Důkaz.

Je výhodné znát některé jednoduché ale často použitelné věty o stejnoměrné spojitosti. Uvedeme si několik z nich.

Stejnoměrná spojitost pseudometrik

Nechť X je uniformní prostor a d je pseudometrika na X.

1. Uniformita vytvořená pseudometrikou d je hrubší než uniformita prostoru X právě když je zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojité. Pak se d nazývá stejnoměrně spojitá pseudometrika na X.
2. Je-li d stejnoměrně spojitá na X a $A \subset X$, je funkce $d(x, A) : X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Následující vlastnost bude použita při rozšiřování stejnoměrně spojitých zobrazení.

TVRZENÍ

Je-li spojité zobrazení $X \to Y$ mezi uniformními prostory stejnoměrně spojité na husté podmnožině v X, je stejnoměrně spojité na X.

Je výhodné znát některé jednoduché ale často použitelné věty o stejnoměrné spojitosti. Uvedeme si několik z nich.

Stejnoměrná spojitost pseudometrik

Nechť X je uniformní prostor a d je pseudometrika na X.

1. Uniformita vytvořená pseudometrikou d je hrubší než uniformita prostoru X právě když je zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojité. Pak se d nazývá stejnoměrně spojitá pseudometrika na X.
2. Je-li d stejnoměrně spojitá na X a $A \subset X$, je funkce $d(x, A) : X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Následující vlastnost bude použita při rozšiřování stejnoměrně spojitých zobrazení.

TVRZENÍ

Je-li spojité zobrazení $X \to Y$ mezi uniformními prostory stejnoměrně spojité na husté podmnožině v X, je stejnoměrně spojité na X.

Je výhodné znát některé jednoduché ale často použitelné věty o stejnoměrné spojitosti. Uvedeme si několik z nich.

Stejnoměrná spojitost pseudometrik

Nechť X je uniformní prostor a d je pseudometrika na X.

1. Uniformita vytvořená pseudometrikou d je hrubší než uniformita prostoru X právě když je zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojité. Pak se d nazývá stejnoměrně spojitá pseudometrika na X.
2. Je-li d stejnoměrně spojitá na X a $A \subset X$, je funkce $d(x, A) : X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Následující vlastnost bude použita při rozšiřování stejnoměrně spojitých zobrazení.

TVRZENÍ

Je-li spojité zobrazení $X \to Y$ mezi uniformními prostory stejnoměrně spojité na husté podmnožině v X, je stejnoměrně spojité na X.

Je výhodné znát některé jednoduché ale často použitelné věty o stejnoměrné spojitosti. Uvedeme si několik z nich.

Stejnoměrná spojitost pseudometrik

Nechť X je uniformní prostor a d je pseudometrika na X.

1. Uniformita vytvořená pseudometrikou d je hrubší než uniformita prostoru X právě když je zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojité. Pak se d nazývá stejnoměrně spojitá pseudometrika na X.
2. Je-li d stejnoměrně spojitá na X a $A \subset X$, je funkce $d(x, A) : X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá.

Následující vlastnost bude použita při rozšiřování stejnoměrně spojitých zobrazení.

TVRZENÍ

Je-li spojité zobrazení $X \to Y$ mezi uniformními prostory stejnoměrně spojité na husté podmnožině v X, je stejnoměrně spojité na X.

Poznali jsme některé topologické vlastnosti, které lze vyjádřit pomocí uniformit, např. pseudometrizovatelnost: *Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je vytvořen uniformitou se spočetnou uniformní bází.*
Uvedeme nyní další charakterizace, některé jednoduché, jiné složitější. Takovéto možnosti jsou samozřejmě možné jen pro úplně regulární prostory.
Nejdříve několik skoro triviálních pozorování.

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X,\mathcal{U})$.

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X,\mathcal{U})$.

1. *Soustava $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$, kde $\mathcal{G}$ probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$, je báze okolí bodu $x \in X$.*
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X *je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem* $(X,\mathcal{U})$.

1. *Soustava* $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$, *kde* $\mathcal{G}$ *probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$, *je báze okolí bodu* $x \in X$.
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

1. *Nekonečný diskrétní prostor* X *je vytvořen* $2^{2^{|X|}}$ *různými uniformitami.*
2. *Metrizovatelný diskrétní prostor je vytvořen i nemetrizovatelnou uniformitou.*
3. [illegible]

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X, \mathcal{U})$.

1. *Soustava $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$, kde $\mathcal{G}$ probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru $(X, \mathcal{U})$, je báze okolí bodu $x \in X$.*
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X, \mathcal{U})$.

1. *Soustava $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$, kde $\mathcal{G}$ probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru $(X, \mathcal{U})$, je báze okolí bodu $x \in X$.*
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X, \mathcal{U})$.

1. *Soustava* $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$*, kde* $\mathcal{G}$ *probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru* $(X, \mathcal{U})$*, je báze okolí bodu* $x \in X$.
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

1. *Nekonečný diskrétní prostor* X *je vytvořen* $2^{(2^{|X|})}$ *mnoha uniformitami.*
2. *Metrizovatelný diskrétní prostor je vytvářen i nemetrizovatelnými uniformitami.*
3. *hrubá uniformita na diskrétním prostoru je vytvořena tzv. Fréchetovým filtrem (doplňky konečných množin).*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X *je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem* $(X,\mathcal{U})$.

1. *Soustava* $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$, *kde* $\mathcal{G}$ *probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$, *je báze okolí bodu* $x \in X$.
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

1. *Nekonečný diskrétní prostor* X *je vytvořen* $2^{(2^{|X|})}$ *mnoha uniformitami.*
2. *Metrizovatelný diskrétní prostor je vytvářen i nemetrizovatelnými uniformitami.*
3. *hrubá uniformita na diskrétním prostoru je vytvořena tzv. Fréchetovým filtrem (doplňky konečných množin).*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Otevřená pokrytí a okolí diagonály)

Nechť X *je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem* $(X,\mathcal{U})$.

1. *Soustava* $star_{\mathcal{G}}(x)$, *kde* $\mathcal{G}$ *probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$, *je báze okolí bodu* $x \in X$.
2. *Každé uniformní pokrytí je zjemňováno otevřeným uniformním pokrytím, i uzavřeným uniformním pokrytím.*
3. *Každé uniformní okolí diagonály obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.*

Je-li $\mathcal{F}$ volný filtr na množině X, vytváří uniformita vytvořená tímto filtrem diskrétní topologii. Toto pozorování dává např. následující důsledky.

TVRZENÍ (Diskrétní uniformity)

1. *Nekonečný diskrétní prostor* X *je vytvořen* $2^{(2^{|X|})}$ *mnoha uniformitami.*
2. *Metrizovatelný diskrétní prostor je vytvářen i nemetrizovatelnými uniformitami.*
3. hrubá uniformita *na diskrétním prostoru je vytvořena tzv. Fréchetovým filtrem (doplňky konečných množin).*

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Jednoduché topologické vlastnosti)

1. *Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ je Hausdorffův právě když $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$.*
2. *Úplně regulární prostor je Hausdorffův právě když je vytvořen uniformitou $\mathcal{U}$ s vlastností $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$.*
3. *Pro každý uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ je $\bigcap \mathcal{U}$ ekvivalence na X. Kvocient $(X,\mathcal{U})$ podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

Nyní složitější charakterizace. První tvrzení bude podstatné pro pozdější aplikace, ke druhému tvrzení se vrátíme v další kapitole. Třetí tvrzení bude probíráno znovu později (o něco více k němu v poznámkách.

TVRZENÍ (Charakterizace normality)

TVRZENÍ (Jednoduché topologické vlastnosti)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je Hausdorffův právě když* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
2. *Úplně regulární prostor je Hausdorffův právě když je vytvořen uniformitou* $\mathcal{U}$ *s vlastností* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
3. *Pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je* $\bigcap\mathcal{U}$ *ekvivalence na* X. *Kvocient* $(X,\mathcal{U})$ *podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru* $(X,\mathcal{U})$.

Nyní složitější charakterizace. První tvrzení bude podstatné pro pozdější aplikace, ke druhému tvrzení se vrátíme v další kapitole. Třetí tvrzení bude probíráno znovu později (o něco více k němu v poznámkách.

TVRZENÍ (Charakterizace normality)

TVRZENÍ (Jednoduché topologické vlastnosti)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je Hausdorffův právě když* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
2. *Úplně regulární prostor je Hausdorffův právě když je vytvořen uniformitou* $\mathcal{U}$ *s vlastností* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
3. *Pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je* $\bigcap\mathcal{U}$ *ekvivalence na* X. *Kvocient* $(X,\mathcal{U})$ *podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru* $(X,\mathcal{U})$.

Nyní složitější charakterizace. První tvrzení bude podstatné pro pozdější aplikace, ke druhému tvrzení se vrátíme v další kapitole. Třetí tvrzení bude probíráno znovu později (o něco více k němu v poznámkách.

TVRZENÍ (Charakterizace normality)

TVRZENÍ (Jednoduché topologické vlastnosti)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je Hausdorffův právě když* $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$.
2. *Úplně regulární prostor je Hausdorffův právě když je vytvořen uniformitou* $\mathcal{U}$ *s vlastností* $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$.
3. *Pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je* $\bigcap \mathcal{U}$ *ekvivalence na* X. *Kvocient* $(X,\mathcal{U})$ *podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru* $(X,\mathcal{U})$.

Nyní složitější charakterizace. První tvrzení bude podstatné pro pozdější aplikace, ke druhému tvrzení se vrátíme v další kapitole. Třetí tvrzení bude probíráno znovu později (o něco více k němu v poznámkách.

TVRZENÍ (Charakterizace normality)

1. *Úplně regulární prostor* X *je normální právě když soustava všech konečných otevřených pokrytí na* X *je báze uniformity na* X.
2. *Úplně regulární prostor je lokálně kompaktní právě když je vytvořen tzv. hrubou uniformitou*
3. *Topologický prostor je parakompaktní právě když soustava všech otevřených pokrytí na* X *je báze uniformity na* X.

TVRZENÍ (Jednoduché topologické vlastnosti)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je Hausdorffův právě když* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
2. *Úplně regulární prostor je Hausdorffův právě když je vytvořen uniformitou* $\mathcal{U}$ *s vlastností* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
3. *Pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je* $\bigcap\mathcal{U}$ *ekvivalence na* X. *Kvocient* $(X,\mathcal{U})$ *podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru* $(X,\mathcal{U})$.

Nyní složitější charakterizace. První tvrzení bude podstatné pro pozdější aplikace, ke druhému tvrzení se vrátíme v další kapitole. Třetí tvrzení bude probíráno znovu později (o něco více k němu v poznámkách.

TVRZENÍ (Charakterizace normality)

1. *Úplně regulární prostor* X *je normální právě když soustava všech konečných otevřených pokrytí na* X *je báze uniformity na* X.
2. *Úplně regulární prostor je lokálně kompaktní právě když je vytvořen tzv. hrubou uniformitou*
3. *Topologický prostor je parakompaktní právě když soustava všech otevřených pokrytí na* X *je báze uniformity na* X.

TVRZENÍ (Jednoduché topologické vlastnosti)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je Hausdorffův právě když* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
2. *Úplně regulární prostor je Hausdorffův právě když je vytvořen uniformitou* $\mathcal{U}$ *s vlastností* $\bigcap\mathcal{U} = \Delta_X$.
3. *Pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je* $\bigcap\mathcal{U}$ *ekvivalence na* X. *Kvocient* $(X,\mathcal{U})$ *podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru* $(X,\mathcal{U})$.

Nyní složitější charakterizace. První tvrzení bude podstatné pro pozdější aplikace, ke druhému tvrzení se vrátíme v další kapitole. Třetí tvrzení bude probíráno znovu později (o něco více k němu v poznámkách.

TVRZENÍ (Charakterizace normality)

1. *Úplně regulární prostor* X *je normální právě když soustava všech konečných otevřených pokrytí na* X *je báze uniformity na* X.
2. *Úplně regulární prostor je lokálně kompaktní právě když je vytvořen tzv. hrubou uniformitou*
3. *Topologický prostor je parakompaktní právě když soustava všech otevřených pokrytí na* X *je báze uniformity na* X.