OBECNÁ TOPOLOGIE

5. ZOBECNĚNÉ KOMPAKTNÍ PROSTORY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Kompaktnost je velmi důležitá a používaná vlastnost, ale ne vždy může jejím podmínkám zkoumaný prostor vyhovět. Může se však stát, že se od kompaktnosti liší jen málo a některé důležité vlastnosti kompaktnosti sdílí. Cílem této kapitoly bude naznačit, jaké vhodné možnosti mohou nastat. Zavedené modifikace kompaktnosti zde nebudou zkoumány do podrobností.

Kompaktnost je možné charakterizovat různými způsoby a v každém tomto způsobu je možné nějak oslabit charakterizující podmínky. Pro různé charakterizace se mohou dostat různé pojmy.

Kompaktnost znamená, že se z každého otevřeného pokrytí dá vybrat konečné podpokrytí. Oslabit tuto vlastnost můžeme jednak tím, že nebudeme vybírat z každého otevřeného pokrytí, nebo tím, že připustíme např. i spočetná podpokrytí. Uvedeme dvě jednoduché možnosti tohoto oslabení a jednu složitější

Zobecněné kompaktní prostory nemají tak pěkné vlastnosti jako kompaktní prostory a tedy existuje hodně tvrzení, které dávají podmínky, při jejichž splnění mají zobecněné kompaktní prostory podobné vlastnosti jako kompaktní.
Tato mnohotvárnost nemůže být předmětem podrobného studia tohoto textu a bude proto

Kompaktnost je velmi důležitá a používaná vlastnost, ale ne vždy může jejím podmínkám zkoumaný prostor vyhovět. Může se však stát, že se od kompaktnosti liší jen málo a některé důležité vlastnosti kompaktnosti sdílí. Cílem této kapitoly bude naznačit, jaké vhodné možnosti mohou nastat. Zavedené modifikace kompaktnosti zde nebudou zkoumány do podrobností.

Kompaktnost je možné charakterizovat různými způsoby a v každém tomto způsobu je možné nějak oslabit charakterizující podmínky. Pro různé charakterizace se mohou dostat různé pojmy.

Kompaktnost znamená, že se z každého otevřeného pokrytí dá vybrat konečné podpokrytí. Oslabit tuto vlastnost můžeme jednak tím, že nebudeme vybírat z každého otevřeného pokrytí, nebo tím, že připustíme např. i spočetná podpokrytí. Uvedeme dvě jednoduché možnosti tohoto oslabení a jednu složitější

Zobecněné kompaktní prostory nemají tak pěkné vlastnosti jako kompaktní prostory a tedy existuje hodně tvrzení, které dávají podmínky, při jejichž splnění mají zobecněné kompaktní prostory podobné vlastnosti jako kompaktní.
Tato mnohotvárnost nemůže být předmětem podrobného studia tohoto textu a bude proto

Kompaktnost je velmi důležitá a používaná vlastnost, ale ne vždy může jejím podmínkám zkoumaný prostor vyhovět. Může se však stát, že se od kompaktnosti liší jen málo a některé důležité vlastnosti kompaktnosti sdílí. Cílem této kapitoly bude naznačit, jaké vhodné možnosti mohou nastat. Zavedené modifikace kompaktnosti zde nebudou zkoumány do podrobností.

Kompaktnost je možné charakterizovat různými způsoby a v každém tomto způsobu je možné nějak oslabit charakterizující podmínky. Pro různé charakterizace se mohou dostat různé pojmy.

Kompaktnost znamená, že se z každého otevřeného pokrytí dá vybrat konečné podpokrytí. Oslabit tuto vlastnost můžeme jednak tím, že nebudeme vybírat z každého otevřeného pokrytí, nebo tím, že připustíme např. i spočetná podpokrytí. Uvedeme dvě jednoduché možnosti tohoto oslabení a jednu složitější

Zobecněné kompaktní prostory nemají tak pěkné vlastnosti jako kompaktní prostory a tedy existuje hodně tvrzení, které dávají podmínky, při jejichž splnění mají zobecněné kompaktní prostory podobné vlastnosti jako kompaktní.
Tato mnohotvárnost nemůže být předmětem podrobného studia tohoto textu a bude proto

Kompaktnost je velmi důležitá a používaná vlastnost, ale ne vždy může jejím podmínkám zkoumaný prostor vyhovět. Může se však stát, že se od kompaktnosti liší jen málo a některé důležité vlastnosti kompaktnosti sdílí. Cílem této kapitoly bude naznačit, jaké vhodné možnosti mohou nastat. Zavedené modifikace kompaktnosti zde nebudou zkoumány do podrobností.

Kompaktnost je možné charakterizovat různými způsoby a v každém tomto způsobu je možné nějak oslabit charakterizující podmínky. Pro různé charakterizace se mohou dostat různé pojmy.

Kompaktnost znamená, že se z každého otevřeného pokrytí dá vybrat konečné podpokrytí. Oslabit tuto vlastnost můžeme jednak tím, že nebudeme vybírat z každého otevřeného pokrytí, nebo tím, že připustíme např. i spočetná podpokrytí. Uvedeme dvě jednoduché možnosti tohoto oslabení a jednu složitější

Zobecněné kompaktní prostory nemají tak pěkné vlastnosti jako kompaktní prostory a tedy existuje hodně tvrzení, které dávají podmínky, při jejichž splnění mají zobecněné kompaktní prostory podobné vlastnosti jako kompaktní.
Tato mnohotvárnost nemůže být předmětem podrobného studia tohoto textu a bude proto

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Každý kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Diskrétní prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem je spočetně kompaktní právě když je kompaktní. Prostor ω_1 je spočetně kompaktní a není kompaktní.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Použitím doplňků otevřených množin se snadno získají charakterizace spočetné kompaktifikace pomocí uzavřených množin – viz cvičení.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Spočetná kompaktnost)

Topologický prostor se nazývá spočetně kompaktní, jestliže z každého jeho spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz

Největší rozdíl u spočetně kompaktních prostorů oproti kompaktním prostorům je v součinovosti. Existuje však dost tvrzení popisující, kdy součin zachovává spočetnou kompaktnost. Nejjednodušším takovým případem je situace, kdy jeden ze dvou prostorů je kompaktní.

Nyní v definici kompaktnosti necháme výběr z libovolného otevřeného pokrytí, ale připustíme větší podpokrytí.

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou sítí je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (právě když je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz.

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

Každý spočetný prostor je Lindelöfův. Každý kompaktní prostor je Lindelöfův. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou nejvýše spočetné. Diskrétní prostor je Lindelöfův právě když je spočetný. $\mathbb{R}$ je Lindelöfův.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

▸ Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz

DEFINICE (Lindelöfův prostor)

Řekneme, že topologický prostor je Lindelöfův, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje nejvýše spočetné pokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

▸ Důkaz

Jak je vidět z vlastností, Lindelöfovy prostory mají sice některé vlastnosti společné s kompaktními, ale jdou trochu jiným směrem. Spojitá reálná funkce na Lindelöfově prostoru nemusí nabývat svých extrémů, nekonečné množiny nemusí mít hromadné body.

Prostory mající vlastnost, že každá reálná spojitá funkce na nich nabývá svých extrémů, jsou důležité pro aplikace. Spočetně kompaktní prostory tuto vlastnost mají, ale existují prostory s touto vlastností, které nejsou spočetně kompaktní.

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Prostory mající vlastnost, že každá reálná spojitá funkce na nich nabývá svých extrémů, jsou důležité pro aplikace. Spočetně kompaktní prostory tuto vlastnost mají, ale existují prostory s touto vlastností, které nejsou spočetně kompaktní.

Uvedenou vlastnost má topologický prostor právě když ji má jeho úplně regulární modifikace. Je tedy vhodné najít jinou charakterizaci, která v úplně regulárních prostorech dá tuto vlastnost, ale může být odlišná v prostorech majících tutéž úplně regulární modifikaci.

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

- Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.
- Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.

Budeme vybírat konečná podpokrytí, tentokrát z jiného systému otevřených pokrytí. Nejdříve budeme definovat velmi důležitý pojem pro soustavy množin.

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

Disjunktní soustava $(n, n+1)$; $n \in \mathbb{Z}$ je lokálně konečná v $\mathbb{R}$, ale není diskrétní. Disjunktní soustava $\{S_p; p$ je pročíslo $\}$, kde $S_p = \{1/p^n; n \in N\}$, není lokálně konečná v $\mathbb{R}$. Soustava $\{x; x \in X\}$ je diskrétní, je-li X diskrétní.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

Různé charakterizace pseudokompaktnosti jsou uvedeny ve cvičení.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

$\mathbb{R}$ není pseudokompaktní, diskrétní prostor je pseudokompaktní právě když je konečný, každý konečný prostor je pseudokompaktní, indiskrétní prostor je pseudokompaktní.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz

⇒

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (Lokálně konečné soustavy)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá lokálně konečná (resp. diskrétní), jestliže každý bod z X má okolí, které protíná jen konečně mnoho (resp. nejvýše jednu) množin z $\mathcal{S}$.

DEFINICE (Pseudokompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá pseudokompaktní, jestliže každé jeho lokálně konečné pokrytí má konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Jako je Lindelöfova vlastnost doplněk spočetné kompaktnosti ve smyslu, že obě vlastnosti dohromady dávají kompaktnost, doplňující vlastnost pro pseudokompaktnost by byla, že z každého otevřeného pokrytí lze vybrat lokálně konečné podpokrytí.

Jako je Lindelöfova vlastnost doplněk spočetné kompaktnosti ve smyslu, že obě vlastnosti dohromady dávají kompaktnost, doplňující vlastnost pro pseudokompaktnost by byla, že z každého otevřeného pokrytí lze vybrat lokálně konečné podpokrytí.

To však není příliš vhodná vlastnost a tak se vychází z ekvivalentní definice pseudokompaktnosti, totiž že každé lokálně konečné pokrytí má konečné zjemnění. Doplňující vlastnost, tzv. parakompaktnost, říká, že každé otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění. Tato důležitá vlastnost bude probírána v 10.kapitole. Zřejmě je topologický prostor kompaktní právě když je pseudokompaktní a parakompaktní.

Metrizovatelné prostory jsou kompaktní právě když jsou spočetně kompaktní, což znamená, že každá posloupnost má hromadný bod. Protože v metrizovatelných prostorech ke každému hromadnému bodu posloupnosti konverguje nějaká podposloupnost, je metrizovatelný prostor kompaktní právě když má každá jeho posloupnost konvergentní podposloupnost. To je silná vlastnost, kterou lze vzít za základ dalšího zobecnění kompaktnosti.

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

Diskrétní prostor je sekvenčně kompaktní právě když je konečný. Indiskrétní prostor je sekvenčně kompaktní, stejně tak hrubý T_1-prostor, prostory ω_1, ω_1+1. Prostor $\beta\mathbb{N}$ je kompaktní a není sekvenčně kompaktní.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

Jak je vidět z posledně uvedeného příkladu, kompaktní prostory nemusejí být sekvenčně kompaktní. Z tohoto pohledu se tedy nejedná o zobecnění kompaktnosti. Nicméně zvláště ve funkcionální analýze je sekvenční kompaktnost velmi používaná, Z jistého hlediska je tato vlastnost někdy lepší než kompaktnost, protože používá jen konvergenci posloupností.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

1. *Sekvenčně kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Opak platí pro prostory mající spočetné báze okolí.*
2. *Spojitý obraz sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
4. *Součin nejvýše spočetně mnoha sekvenčně kompaktních prostorů je sekvenčně kompaktní (to nemusí platit pro nespočetný součin).*
5. *Metrizovatelný prostor je sekvenčně kompaktní právě když je kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

1. *Sekvenčně kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Opak platí pro prostory mající spočetné báze okolí.*
2. *Spojitý obraz sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
4. *Součin nejvýše spočetně mnoha sekvenčně kompaktních prostorů je sekvenčně kompaktní (to nemusí platit pro nespočetný součin).*
5. *Metrizovatelný prostor je sekvenčně kompaktní právě když je kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

1. *Sekvenčně kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Opak platí pro prostory mající spočetné báze okolí.*
2. *Spojitý obraz sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
4. *Součin nejvýše spočetně mnoha sekvenčně kompaktních prostorů je sekvenčně kompaktní (to nemusí platit pro nespočetný součin).*
5. *Metrizovatelný prostor je sekvenčně kompaktní právě když je kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

1. *Sekvenčně kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Opak platí pro prostory mající spočetné báze okolí.*
2. *Spojitý obraz sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
4. *Součin nejvýše spočetně mnoha sekvenčně kompaktních prostorů je sekvenčně kompaktní (to nemusí platit pro nespočetný součin).*
5. *Metrizovatelný prostor je sekvenčně kompaktní právě když je kompaktní.*

Důkaz

DEFINICE (Sekvenčně kompaktní prostor)

Topologický prostor se nazývá sekvenčně kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost má konvergentní podposloupnost.

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

1. *Sekvenčně kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Opak platí pro prostory mající spočetné báze okolí.*
2. *Spojitý obraz sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
4. *Součin nejvýše spočetně mnoha sekvenčně kompaktních prostorů je sekvenčně kompaktní (to nemusí platit pro nespočetný součin).*
5. *Metrizovatelný prostor je sekvenčně kompaktní právě když je kompaktní.*

Důkaz

Pokud prostor není kompaktní, ale má hodně kompaktních podmnožin, mohou se některé vlastnosti kompaktnosti také využít. Co však znamená ono slovo „hodně”?

Pokud prostor není kompaktní, ale má hodně kompaktních podmnožin, mohou se některé vlastnosti kompaktnosti také využít. Co však znamená ono slovo „hodně"?

Nejpřirozenější je, že kompaktní podmnožiny v nějakém smyslu vytvářejí danou topologii – nejvhodnější je, že všechna vnoření kompaktních podmnožin silně vytvářejí danou topologii (to je samozřejmě totéž, jako že daný prostor je silně vytvořen zobrazeními z kompaktních prostorů (neboli je prvkem koreflektivního obalu třídy všech kompaktních prostorů).

Pokud prostor není kompaktní, ale má hodně kompaktních podmnožin, mohou se některé vlastnosti kompaktnosti také využít. Co však znamená ono slovo „hodně”?

Nejpřirozenější je, že kompaktní podmnožiny v nějakém smyslu vytvářejí danou topologii – nejvhodnější je, že všechna vnoření kompaktních podmnožin silně vytvářejí danou topologii (to je samozřejmě totéž, jako že daný prostor je silně vytvořen zobrazeními z kompaktních prostorů (neboli je prvkem koreflektivního obalu třídy všech kompaktních prostorů).

Tyto prostory se nazývají k-prostory a nebudeme je v tomto textu zkoumat. Někdy se berou pro vytváření jen uzavřené kompaktní podprostory.

Pokud prostor není kompaktní, ale má hodně kompaktních podmnožin, mohou se některé vlastnosti kompaktnosti také využít. Co však znamená ono slovo „hodně”?

Nejpřirozenější je, že kompaktní podmnožiny v nějakém smyslu vytvářejí danou topologii – nejvhodnější je, že všechna vnoření kompaktních podmnožin silně vytvářejí danou topologii (to je samozřejmě totéž, jako že daný prostor je silně vytvořen zobrazeními z kompaktních prostorů (neboli je prvkem koreflektivního obalu třídy všech kompaktních prostorů).

Tyto prostory se nazývají k-prostory a nebudeme je v tomto textu zkoumat. Někdy se berou pro vytváření jen uzavřené kompaktní podprostory.

Podíváme se na speciální a velmi důležitý případ k-prostorů, a to tzv. lokálně kompaktních prostorů.

V poznámkách jsou obecnější úvahy o lokalizaci vlastností topologických prostorů. My se zde zmíníme jen o lokální kompaktnosti.

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

Diskrétní prostor je lokálně kompaktní, stejně tak euklidovské prostory a prostor ω_1. Vějíř, ježek a $\mathbb{Q}$ nejsou lokálně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

1. *Třída lokálně kompaktních prostorů je uzavřená na uzavřené a otevřené podprostory, součty a konečné součiny, nikoli na nekonečné součiny. Kvocienty nezachovávají lokální kompaktnost.*
2. *Lokálně kompaktní T_2 prostory jsou úplně regulární.*
3. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když jeho jednobodová kompaktifikace je Hausdorffova.*
4. *Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní právě když má každý bod kompaktní okolí.*
5. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když je otevřený v každé (nebo nějaké) Hausdorffově kompaktifikaci.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

1. *Třída lokálně kompaktních prostorů je uzavřená na uzavřené a otevřené podprostory, součty a konečné součiny, nikoli na nekonečné součiny. Kvocienty nezachovávají lokální kompaktnost.*
2. *Lokálně kompaktní T_2 prostory jsou úplně regulární.*
3. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když jeho jednobodová kompaktifikace je Hausdorffova.*
4. *Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní právě když má každý bod kompaktní okolí.*
5. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když je otevřený v každé (nebo nějaké) Hausdorffově kompaktifikaci.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

1. *Třída lokálně kompaktních prostorů je uzavřená na uzavřené a otevřené podprostory, součty a konečné součiny, nikoli na nekonečné součiny. Kvocienty nezachovávají lokální kompaktnost.*
2. *Lokálně kompaktní T_2 prostory jsou úplně regulární.*
3. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když jeho jednobodová kompaktifikace je Hausdorffova.*
4. *Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní právě když má každý bod kompaktní okolí.*
5. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když je otevřený v každé (nebo nějaké) Hausdorffově kompaktifikaci.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

1. *Třída lokálně kompaktních prostorů je uzavřená na uzavřené a otevřené podprostory, součty a konečné součiny, nikoli na nekonečné součiny. Kvocienty nezachovávají lokální kompaktnost.*
2. *Lokálně kompaktní T_2 prostory jsou úplně regulární.*
3. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když jeho jednobodová kompaktifikace je Hausdorffova.*
4. *Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní právě když má každý bod kompaktní okolí.*
5. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když je otevřený v každé (nebo nějaké) Hausdorffově kompaktifikaci.*

Důkaz

DEFINICE (Lokálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá lokálně kompaktní, jestliže každý jeho bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin.

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

1. *Třída lokálně kompaktních prostorů je uzavřená na uzavřené a otevřené podprostory, součty a konečné součiny, nikoli na nekonečné součiny. Kvocienty nezachovávají lokální kompaktnost.*
2. *Lokálně kompaktní T_2 prostory jsou úplně regulární.*
3. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když jeho jednobodová kompaktifikace je Hausdorffova.*
4. *Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní právě když má každý bod kompaktní okolí.*
5. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když je otevřený v každé (nebo nějaké) Hausdorffově kompaktifikaci.*

Důkaz