5. ZOBECNĚNÁ KOMPAKTNOST

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Vlastnosti spočetné kompaktnosti)

1. *Prostor je spočetně kompaktní právě když má každá spočetná množina úplný hromadný bod. (Takže T_1-prostor je spočetně kompaktní právě když má každá nekonečná množina hromadný bod.)*
2. *Spojitý obraz spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní. (Tedy každá spojitá reálná funkce na spočetně kompaktním prostoru nabývá svých extrémů.)*
3. *Uzavřený podprostor spočetně kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.*
4. *Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je spočetně kompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Existují spočetně kompaktní uspořádatelné prostory, které nejsou kompaktní.*

Důkaz.

Druhé a třetí tvrzení jsou jednoduché, příklad pro čtvrté tvrzení je uveden v příkladech, šesté tvrzení je doloženo prostorem ω_1.

Dokažme první tvrzení. Je-li X spočetně kompaktní a $S \subset X$ spočetná, která nemá úplný hromadný bod, má každý bod $x \in X$ otevřené okolí U_x obsahující jen konečně mnoho bodů z S. Pro konečnou podmnožinu $K \subset S$ definujme $G_K = \bigcup\{U_x; U_x \cup S = K\}$. Pak G_K tvoří spočetné otevřené pokrytí X a má tedy konečné podpokrytí. Nyní se již snadno odvodí spor.

Nechť nyní má každá spočetná podmnožina X hromadný bod a $\{G_n\}$ je spočetné otevřené pokrytí množiny X. Jestliže pro každé n existuje $x_n \in X \setminus \bigcup\{G_i; i = 1, ..., n-1\}$, pak množina všech bodů x_n je nekonečná a má tedy úplný hromadný bod x, např. $x \in G_k$. Pak ale G_k obsahuje nekonečně mnoho bodů x_n a tedy i bod s indexem $n > k$, což je spor s výběrem bodů x_n.

Páté tvrzení vyplývá z tvrzení, že spočetně kompaktní metrizovatelný prostor je separabilní (jinak by měl nespočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu) a tedy má spočetnou otevřenou bázi. Proto lze z každého otevřeného pokrytí vybrat spočetné podpokrytí a tedy i konečné. □

TVRZENÍ (Vlastnosti Lindelöfových prostorů)

1. *Topologický prostor je kompaktní právě když je spočetně kompaktní a Lindelöfův.*
2. *Spojitý obraz Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
3. *Uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*
4. *Součin dvou Lindelöfových prostorů nemusí být Lindelöfův prostor.*
5. *Prostor se spočetnou otevřenou bází je Lindelöfův.*
6. *Metrizovatelný prostor je Lindelöfův právě když má spočetnou bázi (neboli je separabilní).*
7. *Lindelöfův regulární prostor je normální.*

Důkaz.

První tři tvrzení jsou jednoduchá, stejně tak tvrzení páté a šesté. Příklad dokazující čtvrté tvrzení je uveden v Příkladech. Zbývá dokázat poslední tvrzení. Nechť A, B jsou disjunktní uzavřené podmnožiny Lindelöfova regulárního prostoru X. Pro $a \in A$ existuje jeho otevřené okolí U_a, jehož uzávěr je disjunktní s B (regularita). Z tohoto pokrytí množiny A vybereme spočetné U_{a_n}. Steným postupem dostaneme spočetné otevřené pokrytí V_{b_n} množiny B s vlastností $V_{b_n} \cap A = \emptyset$. Množiny $\bigcup_n (U_{a_n} \setminus \bigcup_{k \le n} V_{b_n}), \bigcup_n (V_{b_n} \setminus \bigcup_{k \le n} U_{a_n})$ jsou otevřené, disjunktní a oddělují A, B. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudokompaktních prostorů)

1. *Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní.*
2. *Spojitý obraz pseudokompaktního prostoru je pseudokompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor pseudokompaktního prostoru nemusí být pseudokompaktní.*
4. *Součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.*
5. *Metrizovatelný prostor je pseudokompaktní právě když je kompaktní.*
6. *Pseudokompaktní normální prostor je spočetně kompaktní.*

Důkaz.

Druhé tvrzení je jednoduché, páté tvrzení plyne z posledního a třetí a čtvrté tvrzení je doloženo příklady. Důkaz prvního tvrzení vyplývá z vlastnosti, že každý lokálně konečné soubor spočetně kompaktního prostoru X je konečný: je-li $\{P_n\}$ spočetný lokálně konečný soubor neprázdných množin v X, pak $\{X \setminus \bigcup_{n \geq k} \overline{P_n}\}_k$ je spočetné otevřené pokrytí X neobsahující konečné podpokrytí.

$\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti sekvenčně kompaktních prostorů)

1. *Sekvenčně kompaktní prostor je spočetně kompaktní. Opak platí pro prostory mající spočetné báze okolí.*
2. *Spojitý obraz sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
3. *Uzavřený podprostor sekvenčně kompaktního prostoru je sekvenčně kompaktní.*
4. *Součin nejvýše spočetně mnoha sekvenčně kompaktních prostorů je sekvenčně kompaktní (to nemusí platit pro nespočetný součin).*
5. *Metrizovatelný prostor je sekvenčně kompaktní právě když je kompaktní.*

Důkaz.

Příklady pro třetí a čtvrté tvrzení jsou uvedena v příkladech. Ostatní tvrzení jsou jednoduchá. □

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů)

1. *Třída lokálně kompaktních prostorů je uzavřená na uzavřené a otevřené podprostory, součty a konečné součiny, nikoli na nekonečné součiny. Kvocienty nezachovávají lokální kompaktnost.*
2. *Lokálně kompaktní T_2 prostory jsou úplně regulární.*
3. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když jeho jednobodová kompaktifikace je Hausdorffova.*
4. *Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní právě když má každý bod kompaktní okolí.*
5. *$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je lokálně kompaktní právě když je otevřený v každé (nebo nějaké) Hausdorffově kompaktifikaci.*

Důkaz.

Uvedená dědičnost a součtovost lokálně kompaktních prostorů je triviální, konečná součinovost plyne z Tichonovovy věty o součinech. Zbylá dvě tvrzení vyplývají z příkladů. Druhé tvrzení je důsledkem skutečnosti, že jednobodová kompaktifikace Hausdorffova lokálně kompaktního prostoru je Hausdorffův kompaktní prostor. Odtud plyne i jedna část třetího tvrzení; zbývající část plyne z otevřené dědičnosti lokální kompaktnosti. Zbývající tvrzení jsou jednoduchá. □