5. ZOBECNĚNÁ KOMPAKTNOST

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála" součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála" součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála" součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála" součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála" součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála” součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady spočetně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou spočetně kompaktní.
2. Prostor ω_1 není kompaktní a je spočetně kompaktní.
3. Pro ordinální číslo α je prostor ordinálů menších než α spočetně kompaktní právě když konfinalita α není spočetná.
4. If $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{(2^\omega)}$, je prostor $\beta\mathbb{N} \setminus A$ spočetně kompaktní. [Uzavřené podmnožiny $\beta\mathbb{N}$ jsou buď konečné nebo mohutnosti $2^{(2^\omega)}$.]
5. Pomocí návodu předchozího příkladu lze sestrojit dvě disjunktní podmnožiny $F_1, F_2 \subset \beta\mathbb{N}$ (mohutnosti 2^ω) takové, že $\mathbb{N} \cup F_i$ jsou spočetně kompaktní prostory.
6. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů z předchozího příkladu není spočetně kompaktní. [„Diagonála" součinu je uzavřená diskrétní podmnožina.]
7. Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X,<)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x,\rightarrow)$, $x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x, \rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X,<)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x,\rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x, \rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x, \rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x, \rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x, \rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady Lindelöfových prostorů

1. Prostor ordinálních čísel menších než α je Lindelöfův právě když konfinalita α je spočetná.
2. Nechť $(X, <)$ je lineárně uspořádaný prostor s otevřenou bází složenou z intervalů $(x, \rightarrow), x \in X$. Pak tento prostor je Lindelöfův právě když X má nejvýše spočetnou konfinalitu (směrem nahoru).
3. Sorgenfreyova přímka je Lindelöfův prostor.
4. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální a tedy podle tvrzení 7 není tento součin Lindelöfův.
5. Prostor ω_1 není Lindelöfův.
6. Michaelova přímka je Lindelöfův prostor.
7. Vějíř a ježek jsou Lindelöfovy prostory.
8. Mrówkův prostor není Lindelöfův.

Příklady pseudokompaktních prostorů

1. Mrówkův prostor je pseudokompaktní a není spočetně kompaktní.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$ množin je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální.
3. Podprostor všech bodů odpovídajících prvkům maximální skoro disjunktní soustavy v Mrówkově prostoru je uzavřený a není pseudokompaktní.
4. Σ-součin uzavřených intervalů $[0, 1]$ je pseudokompaktní.
5. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou pseudokompaktní.
6. Příklad 6 na součin spočetně kompaktních prostorů lze použít i jako příklad, že součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.

Příklady pseudokompaktních prostorů

1. Mrówkův prostor je pseudokompaktní a není spočetně kompaktní.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$ množin je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální.
3. Podprostor všech bodů odpovídajících prvkům maximální skoro disjunktní soustavy v Mrówkově prostoru je uzavřený a není pseudokompaktní.
4. Σ-součin uzavřených intervalů $[0, 1]$ je pseudokompaktní.
5. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou pseudokompaktní.
6. Příklad 6 na součin spočetně kompaktních prostorů lze použít i jako příklad, že součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.

Příklady pseudokompaktních prostorů

1. Mrówkův prostor je pseudokompaktní a není spočetně kompaktní.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$ množin je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální.
3. Podprostor všech bodů odpovídajících prvkům maximální skoro disjunktní soustavy v Mrówkově prostoru je uzavřený a není pseudokompaktní.
4. Σ-součin uzavřených intervalů $[0, 1]$ je pseudokompaktní.
5. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou pseudokompaktní.
6. Příklad 6 na součin spočetně kompaktních prostorů lze použít i jako příklad, že součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.

Příklady pseudokompaktních prostorů

1. Mrówkův prostor je pseudokompaktní a není spočetně kompaktní.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$ množin je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální.
3. Podprostor všech bodů odpovídajících prvkům maximální skoro disjunktní soustavy v Mrówkově prostoru je uzavřený a není pseudokompaktní.
4. Σ-součin uzavřených intervalů $[0, 1]$ je pseudokompaktní.
5. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou pseudokompaktní.
6. Příklad 6 na součin spočetně kompaktních prostorů lze použít i jako příklad, že součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.

Příklady pseudokompaktních prostorů

1. Mrówkův prostor je pseudokompaktní a není spočetně kompaktní.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$ množin je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální.
3. Podprostor všech bodů odpovídajících prvkům maximální skoro disjunktní soustavy v Mrówkově prostoru je uzavřený a není pseudokompaktní.
4. Σ-součin uzavřených intervalů $[0, 1]$ je pseudokompaktní.
5. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou pseudokompaktní.
6. Příklad 6 na součin spočetně kompaktních prostorů lze použít i jako příklad, že součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.

Příklady pseudokompaktních prostorů

1. Mrówkův prostor je pseudokompaktní a není spočetně kompaktní.
2. Prostor vytvořený pomocí skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$ množin je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální.
3. Podprostor všech bodů odpovídajících prvkům maximální skoro disjunktní soustavy v Mrówkově prostoru je uzavřený a není pseudokompaktní.
4. Σ-součin uzavřených intervalů $[0, 1]$ je pseudokompaktní.
5. Sorgenfreyova ani Michaelova přímka nejsou pseudokompaktní.
6. Příklad 6 na součin spočetně kompaktních prostorů lze použít i jako příklad, že součin dvou pseudokompaktních prostorů nemusí být pseudokompaktní.

Příklady sekvenčně kompaktních prostorů

1. Kompaktní prostor $\beta\mathbb{N}$ není sekvenčně kompaktní.
2. Kompaktní prostor $\omega_1 + 1$ s nespočetnou bází okolí největšího bodu je sekvenčně kompaktní.
3. Součin $2^{(2^\omega)}$ není sekvenčně kompaktní.

Příklady sekvenčně kompaktních prostorů

1. Kompaktní prostor $\beta\mathbb{N}$ není sekvenčně kompaktní.
2. Kompaktní prostor $\omega_1 + 1$ s nespočetnou bází okolí největšího bodu je sekvenčně kompaktní.
3. Součin $2^{(2^\omega)}$ není sekvenčně kompaktní.

Příklady sekvenčně kompaktních prostorů

1. Kompaktní prostor $\beta\mathbb{N}$ není sekvenčně kompaktní.
2. Kompaktní prostor $\omega_1 + 1$ s nespočetnou bází okolí největšího bodu je sekvenčně kompaktní.
3. Součin $2^{(2^\omega)}$ není sekvenčně kompaktní.

Příklady lokálně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou lokálně kompaktní.
2. Ježek a vějíř nejsou lokálně kompaktní prostory.
3. Prostor racionálních čísel nebo iracionálních čísel není lokálně kompaktní.
4. $\mathbb{N}^\omega$ není lokálně kompaktní.
5. Prostor racionálních čísel je kvocient lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru. [Součet konvergentních posloupností.]
6. Mrówkův prostor je lokálně kompaktní prostor.

Příklady lokálně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou lokálně kompaktní.
2. Ježek a vějíř nejsou lokálně kompaktní prostory.
3. Prostor racionálních čísel nebo iracionálních čísel není lokálně kompaktní.
4. $\mathbb{N}^\omega$ není lokálně kompaktní.
5. Prostor racionálních čísel je kvocient lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru. [Součet konvergentních posloupností.]
6. Mrówkův prostor je lokálně kompaktní prostor.

Příklady lokálně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou lokálně kompaktní.
2. Ježek a vějíř nejsou lokálně kompaktní prostory.
3. Prostor racionálních čísel nebo iracionálních čísel není lokálně kompaktní.
4. $\mathbb{N}^\omega$ není lokálně kompaktní.
5. Prostor racionálních čísel je kvocient lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru. [Součet konvergentních posloupností.]
6. Mrówkův prostor je lokálně kompaktní prostor.

Příklady lokálně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou lokálně kompaktní.
2. Ježek a vějíř nejsou lokálně kompaktní prostory.
3. Prostor racionálních čísel nebo iracionálních čísel není lokálně kompaktní.
4. $\mathbb{N}^\omega$ není lokálně kompaktní.
5. Prostor racionálních čísel je kvocient lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru. [Součet konvergentních posloupností.]
6. Mrówkův prostor je lokálně kompaktní prostor.

Příklady lokálně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou lokálně kompaktní.
2. Ježek a vějíř nejsou lokálně kompaktní prostory.
3. Prostor racionálních čísel nebo iracionálních čísel není lokálně kompaktní.
4. $\mathbb{N}^\omega$ není lokálně kompaktní.
5. Prostor racionálních čísel je kvocient lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru. [Součet konvergentních posloupností.]
6. Mrówkův prostor je lokálně kompaktní prostor.

Příklady lokálně kompaktních prostorů

1. Sorgenfreyova a Michaelova přímka nejsou lokálně kompaktní.
2. Ježek a vějíř nejsou lokálně kompaktní prostory.
3. Prostor racionálních čísel nebo iracionálních čísel není lokálně kompaktní.
4. $\mathbb{N}^\omega$ není lokálně kompaktní.
5. Prostor racionálních čísel je kvocient lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru. [Součet konvergentních posloupností.]
6. Mrówkův prostor je lokálně kompaktní prostor.