OBECNÁ TOPOLOGIE

4. KOMPAKTNÍ PROSTORY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

V definici normálních prostorů se používají disjunktní uzavřené množiny. Uzavřené množiny mají neprázdný průnik právě když jejich doplňky tvoří tzv. otevřené pokrytí celého prostoru, tj. jejich sjednocení je celý prostor. Později se dostaneme k vyjádření normality pomocí takovýchto otevřených soustav. Nyní se podíváme na jinou třídu prostorů, která patří k těm nejdůležitějším.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových

V definici normálních prostorů se používají disjunktní uzavřené množiny. Uzavřené množiny mají neprázdný průnik právě když jejich doplňky tvoří tzv. otevřené pokrytí celého prostoru, tj. jejich sjednocení je celý prostor. Později se dostaneme k vyjádření normality pomocí takovýchto otevřených soustav. Nyní se podíváme na jinou třídu prostorů, která patří k těm nejdůležitějším.

Nejdříve však přesně zadefinujeme pomocné pojmy.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Je zřejmé, jak se definuje např. obojetné pokrytí nebo pokrytí množinami jiných vlastností.

Soustava $\{(n, n+2);\, n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1);\, n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1];\, n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1);\, n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2);\, n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

Pro pokrytí nebo soustavy množin existuje hodně dalších pojmů a vztahů. Některé uvedeme později, nyní zadefinujeme vztah mezi soustavami.

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

DEFINICE (Pokrytí)

Soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá pokrytí, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.
Je-li X topologický prostor a všechny prvky z pokrytí $\mathcal{S}$ jsou otevřené (resp. uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí (resp. uzavřené pokrytí).

Soustava $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$, soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ není otevřené pokrytí $\mathbb{R}$ (ale $\{[n, n+1]; n \in \mathbb{Z}\}$ je uzavřené pokrytí $\mathbb{R}$).

DEFINICE (Zjemnění pokrytí)

Soustava množin $\mathcal{S}$ se nazývá jemnější než soustava množin $\mathcal{T}$, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}$ a každá množina z $\mathcal{S}$ je obsažena v nějaké množině z $\mathcal{T}$. Potom $\mathcal{T}$ je hrubší než $\mathcal{S}$.

Místo $\mathcal{S}$ je jemnější než $\mathcal{T}$ se často říká, že $\mathcal{S}$ zjemňuje $\mathcal{T}$.

Soustava $\{(n, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ zjemňuje pokrytí $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$. Soustava jednobodových podmnožin množiny X zjemňuje každé pokrytí X.

Kompaktní prostory lze definovat mnoha způsoby. Následující definice patří mezi ty nejobvyklejší, protože je z ní vidět vlastnost, která v jistém smyslu nahrazuje konečnost množin.

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz.

Kompaktní prostory lze definovat mnoha způsoby. Následující definice patří mezi ty nejobvyklejší, protože je z ní vidět vlastnost, která v jistém smyslu nahrazuje konečnost množin.

Často se v definici kompaktního prostoru požaduje, aby prostor byl Hausdorffův. To bylo opodstatněné dříve při hlavním použití topologie v geometrii a v analýze. Nyní se topologie hodně používá i v teoretické informatice a tam používané prostory nebývají Hausdorffovy.

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

▶ Důkaz

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0,1]$ je kompaktní.

Ne vždy je uvedená definice kompaktnosti vhodná. K některým postupům se hodí jiné charakterizace kompaktnosti. První z nich dále uvedené jsou jen přepisem definice pomocí doplňků, i ty však bývají velmi vhodné k použití. Další charakterizace jsou již jiného druhu.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0,1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0,1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0, 1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

▸ Důkaz

DEFINICE (Kompaktní prostor)

Řekneme, že topologický prostor je kompaktní, jestliže každé jeho otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Každý konečný prostor je kompaktní. Každý indiskrétní prostor je kompaktní. Každý hrubý T_1-prostor je kompaktní. Prostor s jedním hromadným bodem vytvořeným filtrem $\mathcal{F}$ je kompaktní právě když doplňky množin z $\mathcal{F}$ jsou konečné. Diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. $\mathbb{R}$ není kompaktní, $[0,1]$ je kompaktní.

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz

Ve cvičeních jsou uvedeny některé další charakterizace kompaktnosti.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz

Tvrzení, že součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor, se nazývá Tichonovova věta. Uvedené vlastnosti nepožadují žádné oddělovací axiómy. Řadu dalších hezkých vlastností dostaneme pro Hausdorffovy kompaktní prostory (pro kompaktní T_0 nebo T_1-prostory žádné další význačnější vlastnosti už nezískáme).

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz

Tvrzení, že součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor, se nazývá Tichonovova věta. Uvedené vlastnosti nepožadují žádné oddělovací axiómy. Řadu dalších hezkých vlastností dostaneme pro Hausdorffovy kompaktní prostory (pro kompaktní T_0 nebo T_1-prostory žádné další význačnější vlastnosti už nezískáme).

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz

Tvrzení, že součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor, se nazývá Tichonovova věta. Uvedené vlastnosti nepožadují žádné oddělovací axiómy. Řadu dalších hezkých vlastností dostaneme pro Hausdorffovy kompaktní prostory (pro kompaktní T_0 nebo T_1-prostory žádné další význačnější vlastnosti už nezískáme).

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz

Tvrzení, že součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor, se nazývá Tichonovova věta. Uvedené vlastnosti nepožadují žádné oddělovací axiómy. Řadu dalších hezkých vlastností dostaneme pro Hausdorffovy kompaktní prostory (pro kompaktní T_0 nebo T_1-prostory žádné další význačnější vlastnosti už nezískáme).

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz

Tvrzení, že součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor, se nazývá Tichonovova věta. Uvedené vlastnosti nepožadují žádné oddělovací axiómy. Řadu dalších hezkých vlastností dostaneme pro Hausdorffovy kompaktní prostory (pro kompaktní T_0 nebo T_1-prostory žádné další význačnější vlastnosti už nezískáme).

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz

Tvrzení, že součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor, se nazývá Tichonovova věta. Uvedené vlastnosti nepožadují žádné oddělovací axiómy. Řadu dalších hezkých vlastností dostaneme pro Hausdorffovy kompaktní prostory (pro kompaktní T_0 nebo T_1-prostory žádné další význačnější vlastnosti už nezískáme).

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

▸ Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz

Posledně uvedená reflekce je velmi důležitá (což lze usoudit i z toho, že má jméno po svých objevitelích), a proto ji věnujeme větší pozornost. Patří mezi širší třídu tzv. kompaktifikací a má mezi nimi význačné postavení.

Kvůli její důležitosti zopakujme, co znamená: *Pro každý T_2-prostor X existuje kompaktní T_2-prostor βX a spojité zobrazení $e : X \to \beta X$ na hustou část βX tak, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do kompaktního T_2-prostoru Y existuje spojité zobrazení $\widetilde{f} : \beta X \to Y$ s vlastností $f = \widetilde{f} \circ e$.*

Kompaktní prostory mají hodně potřebných vlastností. Není-li prostor X kompaktní, může existovat kompaktní prostor Y, který je prostoru X nějak *blízko* a je možné pro nějaké vyšetřování X nahradit kompaktním prostorem Y. V různých situacích může slovo „blízko" mít různé významy. Velmi často však stačí, že Y obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

Má každý topologický prostor X kompaktifikaci? Zřejmě ano – stačí k X přidat nějaký bod, jehož jediné okolí bude celý prostor. To asi nebude příliš dobré nahrazení prostoru X kompaktním prostorem. Lze však zvolit vhodnější okolí přidaného bodu.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

Je nutné si uvědomit, že předchozí prostor $X \cup \{\infty\}$ je opravdu kompaktní.
Co by se stalo, kdybychom vynechali předpoklad, že X není kompaktní?

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

Dále je vhodné vědět, že tato kompaktifikace nezachovává některé důležité vlastnosti, např. nemusí být T_2 ani pro metrizovatelné prostory X (pro $\mathbb{Q}$). Je T_1, pokud X je T_1. Množina spojitých funkcí na jednobodové kompaktifikaci se může hodně lišit od množiny omezených spojitých funkcí na X. Jednobodová kompaktifikace je až příliš jednoduchá. Pro závažnější použití bude nutné přidat více bodů než jen jeden.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

Poznali jsme, že kompaktní Hausdorffovy prostory mají značně lepší vlastnosti než např. kompaktní T_1-prostory. Je proto žádoucí vědět, které prostory mají Hausdorffovu kompaktifikaci. Odpověď vyplývá snadno z předchozích tvrzení:

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

DEFINICE (Kompaktifikace)

Kompaktní prostor Y se nazývá kompaktifikace prostoru X, jestliže obsahuje X jako hustou část.

DEFINICE (Jednobodová kompaktifikace)

Nechť X je topologický nekompaktní prostor a ∞ je bod neležící v X. Prostor $X \cup \{\infty\}$ nechť obsahuje X jako otevřenou podmnožinu a báze okolí bodu ∞ jsou doplňky uzavřených kompaktních podmnožin X. Pak prostor $X \cup \{\infty\}$ se nazývá jednobodová kompaktifikace prostoru X.

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz

Čechova-Stoneova kompaktifikace βX je charakterizována možností spojité rozšiřovat z X na βX spojitá zobrazení do kompaktních Hausdorffových prostorů. Protože úplně regulární prostory jsou slabě vytvořeny spojitými funkcemi do kompaktního prostoru $[0,1]$, pro charakterizaci βX stačí uvažovat jen tato zobrazení:

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz

Čechova-Stoneova kompaktifikace není, až na výjimky, jednoduchá. Obvykle je nutné k X přidat velmi mnoho bodů, často více než jich obsahuje X. Několik speciálních jednodušších prostorů βX je uvedeno v příkladech.
Konstrukce βX z obecné věty o epireflekcích (uzávěr vnoření do součinu) mnoho neřekne o množině a topologii této kompaktifikace. Existuje popis pomocí maximálních filtrů nulových množin, který může pomoci nahlédnout do struktury βX.

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz

Ještě na jednu vlastnost Čechovy-Stoneovy kompaktifikace se podíváme. Nejdříve vztah mezi kompaktifikacemi:

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

▸ Důkaz

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

Uvědomte si, co znamená ekvivalence dvou kompaktifikací Y, Z prostoru X, jestliže jsou Hausdorffovými prostory (viz cvičení).
Následující tvrzení vyplývá přímo z předchozí charakterizace βX.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

▸ Důkaz

DEFINICE (Srovnání kompaktifikací)

Nechť Y, Z jsou dvě kompaktifikace prostoru X. Řekneme, že Y je jemnější než Z, jestliže existuje spojité zobrazení Y do Z, které je identické na X.
Obě kompaktifikace jsou ekvivalentní, jestliže Y je jemnější než Z a Z je jemnější než Y.

TVRZENÍ (βX is the finest compactification)

βX je nejjemnější kompaktifikace $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru X mezi všemi jeho Hausdorffovými kompaktifikacemi.

Kromě topologie bodové konvergence znáte na prostorech funkcí ještě topologii stejnoměrné konvergence (ta bude důkladněji probrána v kapitole o uniformitách).
Nyní se podíváme na jednu důležitou topologii na $C(X, Y)$ vytvořenou pomocí kompaktních množin v X.

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S, G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\} .$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K, G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X, Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X, Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

Uvědomte si, že topologie bodové konvergence na Y^X se dá vyjádřit podobným způsobem: má za subbází $\{U(K,G); K$ je jednobodová podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Místo jednobodových podmnožin lze vzít konečné podmnožiny.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

1. *Kompaktně otevřená topologie na Y^X je jemnější než topologie bodové konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
2. *Kompaktně otevřená topologie na $\mathbb{R}^X$ je hrubší než topologie stejnoměrné konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
3. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 0, 1, 2$), má i kompaktně otevřená topologie na Y^X stejnou vlastnost.*
4. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 3, 3\frac{1}{2}$), má i $C_{co}(X,Y)$ stejnou vlastnost.*

Důkaz

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

1. *Kompaktně otevřená topologie na Y^X je jemnější než topologie bodové konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
2. *Kompaktně otevřená topologie na $\mathbb{R}^X$ je hrubší než topologie stejnoměrné konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
3. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 0,1,2$), má i kompaktně otevřená topologie na Y^X stejnou vlastnost.*
4. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 3, 3\frac{1}{2}$), má i $C_{co}(X,Y)$ stejnou vlastnost.*

Důkaz

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

1. *Kompaktně otevřená topologie na Y^X je jemnější než topologie bodové konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
2. *Kompaktně otevřená topologie na $\mathbb{R}^X$ je hrubší než topologie stejnoměrné konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
3. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 0,1,2$), má i kompaktně otevřená topologie na Y^X stejnou vlastnost.*
4. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 3, 3\frac{1}{2}$), má i $C_{co}(X,Y)$ stejnou vlastnost.*

Důkaz

Pro množiny $X.Y$ a jejich podmnožiny $S \subset X$, $G \subset Y$ označíme

$$U(S,G) = \{f : X \to Y; f(S) \subset G\}.$$

Viz jednoduchá pozorování o těchto množinách funkcí.

DEFINICE (Kompaktně otevřená topologie)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $\mathcal{G}$ je topologie na množině Y^X všech zobrazení z X do Y mající subbázi $\{U(K,G); K$ je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina $Y\}$. Tato topologie se nazývá kompaktně otevřená topologie. Podprostor $C(X,Y)$ prostoru Y^X s touto topologií se značí $C_{co}(X,Y)$.

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

1. *Kompaktně otevřená topologie na Y^X je jemnější než topologie bodové konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
2. *Kompaktně otevřená topologie na $\mathbb{R}^X$ je hrubší než topologie stejnoměrné konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
3. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 0,1,2$), má i kompaktně otevřená topologie na Y^X stejnou vlastnost.*
4. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 3, 3\frac{1}{2}$), má i $C_{co}(X,Y)$ stejnou vlastnost.*

Důkaz