4. KOMPAKTNOST

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Uvedeme nyní dvě další charakterizace kompaktnosti. Ta první by se dala očekávat: v definici kompaktnosti stačí brát otevřené množiny jen z dané otevřené báze. Důkaz tohoto tvrzení však není jednoduchý.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Důkaz

Uvedeme nyní dvě další charakterizace kompaktnosti. Ta první by se dala očekávat: v definici kompaktnosti stačí brát otevřené množiny jen z dané otevřené báze. Důkaz tohoto tvrzení však není jednoduchý.

Druhá charakterizace zhruba nahrazuje charakterizaci kompaktnosti z metrických prostorů (každá nekonečná množina má hromadný bod). Je však nutné udělat netriviální modifikaci, bez modifikace vede uvedená vlastnost ke značně slabšímu pojmu, tzv. spočetné kompaktnosti.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X prvky subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. [illegible]

Důkaz

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu. Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz.

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz.

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz.

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz.

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz.

Pro další tvrzení potřebujeme nový pojem speciálního hromadného bodu.
Bod x v prostoru X se nazývá úplný hromadný bod nekonečné množiny $A \subset X$ jestliže pro každé okolí U bodu x je $|U \cap A| = |A|$.

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz.

Pomocí charakterizace kompaktnosti pokrytími ze subbáze se snadno dokáže Tichonovova věta o kompaktnosti součinu.

Následující příklady jsou obecnějšího rázu. Speciální jednotlivé příklady jsou uvedeny v příkladech.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských prostorů jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin $\prod X_a$.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin ΠX_a.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin ΠX_a.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin ΠX_a.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin ΠX_a.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin ΠX_a.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Metrizovatelné kompaktní prostory

1. Právě uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou kompaktní.
2. Z vlastností kompaktních prostorů vyplývá, že právě uzavřené omezené podmnožiny euklidovských jsou kompaktní.
3. Předchozí postup lze zobecnit na libovolnou mocninu $\mathbb{R}^A$: její podmnožina je kompaktní právě když je uzavřená a obsažená v součinu omezených intervalů. V zobecňování lze postupovat i dále pro libovolný součin ΠX_a.
4. Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je uzavřená a omezená. Opak neplatí.
5. Každý kompaktní metrický prostor je separabilní.
6. Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný právě když má spočetnou otevřenou bázi.

Uspořádané kompaktní prostory

1. Je-li X kompaktní GO-prostor, je topologickým uspořádaným prostorem (LOTS).
2. Topologický uspořádaný prostor je kompaktní právě když je nosný uspořádaný prostor úplný, tj., každá jeho podmnožina má supremum i infimum.
3. Z předchozího výsledku plyne tvrzení z předchozí části, že podmnožina $\mathbb{R}$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
4. Kompaktní uspořádaný prostor má vlastnost, že existuje otevřená subbáze taková, že z každého pokrytí jejími prvky lze vybrat podpokrytí o dvou prvcích.

Uspořádané kompaktní prostory

1. Je-li X kompaktní GO-prostor, je topologickým uspořádaným prostorem (LOTS).
2. Topologický uspořádaný prostor je kompaktní právě když je nosný uspořádaný prostor úplný, tj., každá jeho podmnožina má supremum i infimum.
3. Z předchozího výsledku plyne tvrzení z předchozí části, že podmnožina $\mathbb{R}$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
4. Kompaktní uspořádaný prostor má vlastnost, že existuje otevřená subbáze taková, že z každého pokrytí jejími prvky lze vybrat podpokrytí o dvou prvcích.

Uspořádané kompaktní prostory

1. Je-li X kompaktní GO-prostor, je topologickým uspořádaným prostorem (LOTS).
2. Topologický uspořádaný prostor je kompaktní právě když je nosný uspořádaný prostor úplný, tj., každá jeho podmnožina má supremum i infimum.
3. Z předchozího výsledku plyne tvrzení z předchozí části, že podmnožina $\mathbb{R}$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
4. Kompaktní uspořádaný prostor má vlastnost, že existuje otevřená subbáze taková, že z každého pokrytí jejími prvky lze vybrat podpokrytí o dvou prvcích.

Uspořádané kompaktní prostory

1. Je-li X kompaktní GO-prostor, je topologickým uspořádaným prostorem (LOTS).
2. Topologický uspořádaný prostor je kompaktní právě když je nosný uspořádaný prostor úplný, tj., každá jeho podmnožina má supremum i infimum.
3. Z předchozího výsledku plyne tvrzení z předchozí části, že podmnožina $\mathbb{R}$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
4. Kompaktní uspořádaný prostor má vlastnost, že existuje otevřená subbáze taková, že z každého pokrytí jejími prvky lze vybrat podpokrytí o dvou prvcích.

Uspořádané kompaktní prostory

1. Je-li X kompaktní GO-prostor, je topologickým uspořádaným prostorem (LOTS).
2. Topologický uspořádaný prostor je kompaktní právě když je nosný uspořádaný prostor úplný, tj., každá jeho podmnožina má supremum i infimum.
3. Z předchozího výsledku plyne tvrzení z předchozí části, že podmnožina $\mathbb{R}$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
4. Kompaktní uspořádaný prostor má vlastnost, že existuje otevřená subbáze taková, že z každého pokrytí jejími prvky lze vybrat podpokrytí o dvou prvcích.

Uspořádané kompaktní prostory

1. Je-li X kompaktní GO-prostor, je topologickým uspořádaným prostorem (LOTS).
2. Topologický uspořádaný prostor je kompaktní právě když je nosný uspořádaný prostor úplný, tj., každá jeho podmnožina má supremum i infimum.
3. Z předchozího výsledku plyne tvrzení z předchozí části, že podmnožina $\mathbb{R}$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.
4. Kompaktní uspořádaný prostor má vlastnost, že existuje otevřená subbáze taková, že z každého pokrytí jejími prvky lze vybrat podpokrytí o dvou prvcích.

Protože metrizovatelné a uspořádatelné prostory patří mezi důležité třídy prostorů, vzniká otázka, zda mají kompaktifikace, které opět náleží do stejných tříd. Podobnou otázku lze klást i pro jiné třídy prostorů, např. pro nuldimenzionální prostory.

Kompaktifikace metrizovatelných prostorů

- Metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci právě když je separabilní.
  [Návod: Separabilní metrizovatelný prostor lze vnořit do $[0,1]^{\omega}$.]
- Čechova-Stoneova kompaktifikace nekompaktního metrizovatelného prostoru není nikdy metrizovatelná.
  [Návod: ...]
- Jednobodová kompaktifikace separabilního metrizovatelného nekompaktního prostoru X je metrizovatelná právě když existuje spočetně mnoho kompaktních podmnožin C_n X, jejichž vnitřky pokrývají X a takových, že každá kompaktní podmnožina X je obsažena v některé C_n.
  [Návod: ...]

Kompaktifikace metrizovatelných prostorů

1. Metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci právě když je separabilní.
[*Návod*: Separabilní metrizovatelný prostor lze vnořit do $[0,1]^\omega$.]
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nekompaktního metrizovatelného prostoru není nikdy metrizovatelná.
[*Návod*:...]
3. Jednobodová kompaktifikace separabilního metrizovatelného nekompaktního prostoru X je metrizovatelná právě když existuje spočetně mnoho kompaktních podmnožin C_n v X, jejichž vnitřky pokrývají X a takových, že každá kompaktní podmnožina X je částí některé C_n.
[*Návod*:...]

Kompaktifikace metrizovatelných prostorů

1. Metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci právě když je separabilní.
   [*Návod*: Separabilní metrizovatelný prostor lze vnořit do $[0,1]^\omega$.]
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nekompaktního metrizovatelného prostoru není nikdy metrizovatelná.
   [*Návod*:...]
3. Jednobodová kompaktifikace separabilního metrizovatelného nekompaktního prostoru X je metrizovatelná právě když existuje spočetně mnoho kompaktních podmnožin C_n v X, jejichž vnitřky pokrývají X a takových, že každá kompaktní podmnožina X je částí některé C_n.
   [*Návod*:...]

Kompaktifikace metrizovatelných prostorů

1. Metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci právě když je separabilní. [*Návod*: Separabilní metrizovatelný prostor lze vnořit do $[0,1]^\omega$.]
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nekompaktního metrizovatelného prostoru není nikdy metrizovatelná.
   [*Návod*:...]
3. Jednobodová kompaktifikace separabilního metrizovatelného nekompaktního prostoru X je metrizovatelná právě když existuje spočetně mnoho kompaktních podmnožin C_n v X, jejichž vnitřky pokrývají X a takových, že každá kompaktní podmnožina X je částí některé C_n.
   [*Návod*:...]

Kompaktifikace metrizovatelných prostorů

1. Metrizovatelný prostor má metrizovatelnou kompaktifikaci právě když je separabilní. [*Návod*: Separabilní metrizovatelný prostor lze vnořit do $[0,1]^\omega$.]
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nekompaktního metrizovatelného prostoru není nikdy metrizovatelná.
   [*Návod*:...]
3. Jednobodová kompaktifikace separabilního metrizovatelného nekompaktního prostoru X je metrizovatelná právě když existuje spočetně mnoho kompaktních podmnožin C_n v X, jejichž vnitřky pokrývají X a takových, že každá kompaktní podmnožina X je částí některé C_n.
   [*Návod*:...]

Metrizovatelný prostor může mít více metrizovatelných kompaktifikací. Např. $\mathbb{R}$ má jednobodovou, dvoubodovou i nekonečně bodovou metrizovatelnou kompaktifikaci.

Kompaktifikace uspořádatelných prostorů

1. Každý uspořádatelný prostor má uspořádatelnou kompaktifikaci.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace uspořádatelného prostoru může a nemusí být uspořádatelná.
3. Jednobodová kompaktifikace uspořádatelného nekompaktního prostoru je uspořádatelná právě když je nosný uspořádaný prostor omezeně úplný a má právě jeden ze dvou krajních bodů.

Kompaktifikace uspořádatelných prostorů

1. Každý uspořádatelný prostor má uspořádatelnou kompaktifikaci.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace uspořádatelného prostoru může a nemusí být uspořádatelná.
3. Jednobodová kompaktifikace uspořádatelného nekompaktního prostoru je uspořádatelná právě když je nosný uspořádaný prostor omezeně úplný a má právě jeden ze dvou krajních bodů.

Kompaktifikace uspořádatelných prostorů

1. Každý uspořádatelný prostor má uspořádatelnou kompaktifikaci.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace uspořádatelného prostoru může a nemusí být uspořádatelná.
3. Jednobodová kompaktifikace uspořádatelného nekompaktního prostoru je uspořádatelná právě když je nosný uspořádaný prostor omezeně úplný a má právě jeden ze dvou krajních bodů.

Kompaktifikace uspořádatelných prostorů

1. Každý uspořádatelný prostor má uspořádatelnou kompaktifikaci.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace uspořádatelného prostoru může a nemusí být uspořádatelná.
3. Jednobodová kompaktifikace uspořádatelného nekompaktního prostoru je uspořádatelná právě když je nosný uspořádaný prostor omezeně úplný a má právě jeden ze dvou krajních bodů.

Také uspořádatelné množiny mohou mít více uspořádatelných kompaktifikací (protože existuje více zúplnění uspořádaných prostorů).

$\Rightarrow$

Kompaktifikace uspořádatelných prostorů

1. Každý uspořádatelný prostor má uspořádatelnou kompaktifikaci.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace uspořádatelného prostoru může a nemusí být uspořádatelná.
3. Jednobodová kompaktifikace uspořádatelného nekompaktního prostoru je uspořádatelná právě když je nosný uspořádaný prostor omezeně úplný a má právě jeden ze dvou krajních bodů.

Kompaktifikace uspořádatelných prostorů

1. Každý uspořádatelný prostor má uspořádatelnou kompaktifikaci.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace uspořádatelného prostoru může a nemusí být uspořádatelná.
3. Jednobodová kompaktifikace uspořádatelného nekompaktního prostoru je uspořádatelná právě když je nosný uspořádaný prostor omezeně úplný a má právě jeden ze dvou krajních bodů.

Kompaktifikace nuldomenzionálních množin

1. Každý Hausdorffův nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompektifikace a mezi nimi existuje nejjemnější.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nuldimenzionálního T_2-prostoru X je nuldimenzionální právě když každá nulová podmnožina X má bázi okolí složenou z obojetných množin.
3. Nechť je jednobodová kompaktifikace nuldimenzionálního prostoru X T_2-prostor. Pak je nuldimenzionální.

Nejjemnější nuldimenzionální kompaktifikace bX nuldimenzionálního T_2-prostoru X se nazývá Banaschewského kompaktifikace a má rozšiřovací vlastnosti (je to epireflekce X v nuldimenzionálních kompaktních T_2-prostorech): *každé spojité zobrazení X do nuldimenzionálního kompaktního T_2-prostoru lze spojitě rozšířit na bX.*

Kompaktifikace nuldomenzionálních množin

1. Každý Hausdorffův nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompektifikace a mezi nimi existuje nejjemnější.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nuldimenzionálního T_2-prostoru X je nuldimenzionální právě když každá nulová podmnožina X má bázi okolí složenou z obojetných množin.
3. Nechť je jednobodová kompaktifikace nuldimenzionálního prostoru X T_2-prostor. Pak je nuldimenzionální.

Nejjemnější nuldimenzionální kompaktifikace bX nuldimenzionálního T_2-prostoru X se nazývá Banaschewského kompaktifikace a má rozšiřovací vlastnosti (je to epireflekce X v nuldimenzionálních kompaktních T_2-prostorech): *každé spojité zobrazení X do nuldimenzionálního kompaktního T_2-prostoru lze spojitě rozšířit na bX.*

Kompaktifikace nuldomenzionálních množin

1. Každý Hausdorffův nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompektifikace a mezi nimi existuje nejjemnější.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nuldimenzionálního T_2-prostoru X je nuldimenzionální právě když každá nulová podmnožina X má bázi okolí složenou z obojetných množin.
3. Nechť je jednobodová kompaktifikace nuldimenzionálního prostoru X T_2-prostor. Pak je nuldimenzionální.

Nejjemnější nuldimenzionální kompaktifikace bX nuldimenzionálního T_2-prostoru X se nazývá Banaschewského kompaktifikace a má rozšiřovací vlastnosti (je to epireflekce X v nuldimenzionálních kompaktních T_2-prostorech): *každé spojité zobrazení X do nuldimenzionálního kompaktního T_2-prostoru lze spojitě rozšířit na bX.*

Kompaktifikace nuldomenzionálních množin

1. Každý Hausdorffův nuldimenzionální prostor má nuldimenzionální kompektifikace a mezi nimi existuje nejjemnější.
2. Čechova-Stoneova kompaktifikace nuldimenzionálního T_2-prostoru X je nuldimenzionální právě když každá nulová podmnožina X má bázi okolí složenou z obojetných množin.
3. Nechť je jednobodová kompaktifikace nuldimenzionálního prostoru X T_2-prostor. Pak je nuldimenzionální.

Nejjemnější nuldimenzionální kompaktifikace bX nuldimenzionálního T_2-prostoru X se nazývá Banaschewského kompaktifikace a má rozšiřovací vlastnosti (je to epireflekce X v nuldimenzionálních kompaktních T_2-prostorech): *každé spojité zobrazení X do nuldimenzionálního kompaktního T_2-prostoru lze spojitě rozšířit na bX.*

Na této stránce bude X $T_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

- Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
- Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X, [0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
- Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
- Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
- Pro $p \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); p \in \overline{Z}\}$ báze filtru a je maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takové báze se nazývají $\mathcal{Z}$-ultrafiltry v X).

Na této stránce bude X $T_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

1. Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X, [0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
3. Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
4. Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
5. Pro $y \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in \overline{Z}\}$ báze filtru a to maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takovéto báze se nazývají *$\mathcal{Z}$-ultrafiltry* v X).

Na této stránce bude X $\mathrm{T}_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

1. Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X,[0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
3. Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
4. Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
5. Pro $y \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in \overline{Z}\}$ báze filtru a to maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takovéto báze se nazývají *$\mathcal{Z}$-ultrafiltry* v X).

Na této stránce bude X $\mathrm{T}_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

1. Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X, [0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
3. Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
4. Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
5. Pro $y \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in \overline{Z}\}$ báze filtru a to maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takovéto báze se nazývají *$\mathcal{Z}$-ultrafiltry* v X).

Na této stránce bude X $T_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

1. Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X, [0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
3. Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
4. Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
5. Pro $y \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in \overline{Z}\}$ báze filtru a to maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takovéto báze se nazývají *$\mathcal{Z}$-ultrafiltry* v X).

Na této stránce bude X $T_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

1. Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X,[0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
3. Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
4. Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
5. Pro $y \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in \overline{Z}\}$ báze filtru a to maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takovéto báze se nazývají $\mathcal{Z}$-*ultrafiltry* v X).

Na této stránce bude X $T_3\frac{1}{2}$-prostor a $\mathcal{Z}(X)$ bude množina všech nulových množin v X.

Vlastnosti nulových množin

1. Soustava $\mathcal{Z}(X)$ je uzavřená na spočetné průniky a konečná sjednocení.
2. Jsou-li Z_1, Z_2 dvě disjunktní nulové množiny v X, pak existuje $f \in C(X, [0,1])$, která má hodnotu 0 na Z_1 a hodnotu 1 na Z_2.
3. Dvě disjunktní nulové množiny v X mají disjunktní uzávěry v βX.
4. Každá nulová množina v X je průnikem s X nulové množiny v βX.
5. Pro $y \in \beta X$ je $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in \overline{Z}\}$ báze filtru a to maximální vzhledem k $\mathcal{Z}(X)$ (takovéto báze se nazývají *$\mathcal{Z}$-ultrafiltry* v X).

Třetí vlastností je βX charakterizováno mezi všemi Hausdorffovými kompaktifikacemi prostoru X.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.

Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.
Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.

Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.

Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.

Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.

Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.
Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Popis βX

Nechť Y je množina všech $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Množina X bude chápána jako podmnožina Y: bod $x \in X$ se ztotožní s $\{Z \in \mathcal{Z}(X); y \in Z\}$. Otevřená báze v Y je dána množinami $\{y \in Y; G \supset Z \in y\}$, G otevřená v X.

Potom Y je Hausdorffova kompaktifikace prostoru X ekvivalentní s βX.

Například $\beta\mathbb{N}$ je množina všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$. Protože $\beta\mathbb{N}$ je separabilní, je $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{(2^\omega)}$. Protože Cantorův prostor $2^{(2^\omega)}$ je separabilní a lze spojitě zobrazit $\mathbb{N}$ na jeho hustou část, dostává se rovnost $|\beta\mathbb{N}| = 2^{(2^\omega)}$.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S,G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $U(T,G) \subset U(S,H)$.
2. $U(S,G) \cap U(T,G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S,G) \cap U(S,H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

1. Prostor Y se dá vnořit do $C_k(X,Y)$ jako uzavřený podprostor, pokud je Y Hausdorffův.
2. Je-li Y metrizovatelný a v X existuje spočetná množina kompaktních množin C_n taková, že každá kompaktní podmnožina v X je částí nějaké C_n, je Y^X s kompaktně otevřenou topologií metrizovatelný.
3. Je-li $f : X_1 \times X_2 \to Y$ spojitá funkce, pak $\Phi(f) : X_1 \to C_k(X_2, Y)$ je spojitá funkce.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S, G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T, G) \subset U(S, H)$.
2. $U(S, G) \cap U(T, G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S, G) \cap U(S, H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S, G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T, G) \subset U(S, H)$.
2. $U(S, G) \cap U(T, G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S, G) \cap U(S, H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S,G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T,G) \subset U(S,H)$.
2. $U(S,G) \cap U(T,G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S,G) \cap U(S,H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S,G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T,G) \subset U(S,H)$.
2. $U(S,G) \cap U(T,G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S,G) \cap U(S,H) \subset U(S, G \cap H)$.

Předchozí vlastnosti 2 a 3 lze snadno dokázat i pro průniky libovolně mnoha množin na levých stranách. Odtud speciálně vyplývá, že $U(S,G) = \bigcap_{x \in S} U(x,G)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S,G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T,G) \subset U(S,H)$.
2. $U(S,G) \cap U(T,G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S,G) \cap U(S,H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

1. Prostor Y se dá vnořit do $C_{co}(X,Y)$ (na uzavřený podprostor pokud je Y Hausdorffův).
2. Je-li Y metrizovatelný a v X existuje spočetná množina kompaktních množin C_n tak, že každá kompaktní podmnožina v X je částí některé C_n, je Y^X s kompaktně otevřenou topologií metrizovatelný.
3. Je-li $f : X_1 \times X_2 \to Y$ spojitá funkce, je i $\Phi(f) : X_1 \to C_{co}(X_2, Y)$ spojitá funkce.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S,G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T,G) \subset U(S,H)$.
2. $U(S,G) \cap U(T,G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S,G) \cap U(S,H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

1. Prostor Y se dá vnořit do $C_{co}(X,Y)$ (na uzavřený podprostor pokud je Y Hausdorffův).
2. Je-li Y metrizovatelný a v X existuje spočetná množina kompaktních množin C_n tak, že každá kompaktní podmnožina v X je částí některé C_n, je Y^X s kompaktně otevřenou topologií metrizovatelný.
3. Je-li $f : X_1 \times X_2 \to Y$ spojitá funkce, je i $\Phi(f) : X_1 \to C_{co}(X_2, Y)$ spojitá funkce.

Pro $S \subset X$ a $G \subset Y$ značí $U(S,G) = \{f \in Y^X; f(S) \subset G\}$.

1. Jestliže $S \subset T \subset X$ a $G \subset H \subset Y$, pak $Y(T,G) \subset U(S,H)$.
2. $U(S,G) \cap U(T,G) = U(S \cup T, G)$.
3. $U(S,G) \cap U(S,H) \subset U(S, G \cap H)$.

Vlastnosti kompaktně otevřené topologie

Nechť Y^X je opatřen kompaktně otevřenou topologií.

1. Prostor Y se dá vnořit do $C_{co}(X,Y)$ (na uzavřený podprostor pokud je Y Hausdorffův).
2. Je-li Y metrizovatelný a v X existuje spočetná množina kompaktních množin C_n tak, že každá kompaktní podmnožina v X je částí některé C_n, je Y^X s kompaktně otevřenou topologií metrizovatelný.
3. Je-li $f : X_1 \times X_2 \to Y$ spojitá funkce, je i $\Phi(f) : X_1 \to C_{co}(X_2, Y)$ spojitá funkce.