3. ODDĚLOVÁNÍ

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Je vhodné se podrobněji podívat na epimorfizmy v různých třídách topologických prostorů. Ne vždy to jsou surjekce.

Epimorfizmy v T_i-prostorech

Epimorfizmy v T_i-prostorech

1. Surjekce mezi topologickými prostory X, Y je vždy epimorfizmus v jakékoli třídě obsahující X, Y.
2. Epimorfizmy v třídě prostorů obsahujících aspoň dvoubodový indiskrétní prostor (např. v regulárních prostorech, úplně regulárních prostorech) jsou právě spojité surjekce.
3. Epimorfizmy v třídě všech T_1-prostorů jsou právě spojité surjekce.
4. Epimorfizmy v třídě všech T_i-prostorů, $i > 1$, jsou právě spojitá zobrazení na hustou část oboru hodnot.
5. Epimorfizmy v třídě všech T_0-prostorů jsou spojitá zobrazení $f : X \to Y$ taková, že pro každé $y \in Y$ je $y \in \overline{f(X) \cap \overline{y}}$.

Epimorfizmy v T_i-prostorech

1. Surjekce mezi topologickými prostory X, Y je vždy epimorfizmus v jakékoli třídě obsahující X, Y.
2. Epimorfizmy v třídě prostorů obsahujících aspoň dvoubodový indiskrétní prostor (např. v regulárních prostorech, úplně regulárních prostorech) jsou právě spojité surjekce.
3. Epimorfizmy v třídě všech T_1-prostorů jsou právě spojité surjekce.
4. Epimorfizmy v třídě všech T_i-prostorů, $i > 1$, jsou právě spojitá zobrazení na hustou část oboru hodnot.
5. Epimorfizmy v třídě všech T_0-prostorů jsou spojitá zobrazení $f : X \to Y$ taková, že pro každé $y \in Y$ je $y \in \overline{f(X) \cap \overline{y}}$.

Epimorfizmy v T_i-prostorech

1. Surjekce mezi topologickými prostory X, Y je vždy epimorfizmus v jakékoli třídě obsahující X, Y.
2. Epimorfizmy v třídě prostorů obsahujících aspoň dvoubodový indiskrétní prostor (např. v regulárních prostorech, úplně regulárních prostorech) jsou právě spojité surjekce.
3. Epimorfizmy v třídě všech T_1-prostorů jsou právě spojité surjekce.
4. Epimorfizmy v třídě všech T_i-prostorů, $i > 1$, jsou právě spojitá zobrazení na hustou část oboru hodnot.
5. Epimorfizmy v třídě všech T_0-prostorů jsou spojitá zobrazení $f : X \to Y$ taková, že pro každé $y \in Y$ je $y \in \overline{f(X) \cap \overline{y}}$.

Epimorfizmy v T_i-prostorech

1. Surjekce mezi topologickými prostory X, Y je vždy epimorfizmus v jakékoli třídě obsahující X, Y.
2. Epimorfizmy v třídě prostorů obsahujících aspoň dvoubodový indiskrétní prostor (např. v regulárních prostorech, úplně regulárních prostorech) jsou právě spojité surjekce.
3. Epimorfizmy v třídě všech T_1-prostorů jsou právě spojité surjekce.
4. Epimorfizmy v třídě všech T_i-prostorů, $i > 1$, jsou právě spojitá zobrazení na hustou část oboru hodnot.
5. Epimorfizmy v třídě všech T_0-prostorů jsou spojitá zobrazení $f : X \to Y$ taková, že pro každé $y \in Y$ je $y \in \overline{f(X) \cap \overline{y}}$.

Epimorfizmy v T_i-prostorech

1. Surjekce mezi topologickými prostory X, Y je vždy epimorfizmus v jakékoli třídě obsahující X, Y.
2. Epimorfizmy v třídě prostorů obsahujících aspoň dvoubodový indiskrétní prostor (např. v regulárních prostorech, úplně regulárních prostorech) jsou právě spojité surjekce.
3. Epimorfizmy v třídě všech T_1-prostorů jsou právě spojité surjekce.
4. Epimorfizmy v třídě všech T_i-prostorů, $i > 1$, jsou právě spojitá zobrazení na hustou část oboru hodnot.
5. Epimorfizmy v třídě všech T_0-prostorů jsou spojitá zobrazení $f : X \to Y$ taková, že pro každé $y \in Y$ je $y \in \overline{f(X) \cap \overline{y}}$.

Důkazy následujících tvrzení jsou přímé a jednoduché. Není třeba přidávat návody.

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

1. Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní obal libovolného intervalu v $\mathbb{R}$.
2. Třída T_1-prostorů je epireflektivní obal všech hrubých T_1-prostorů.
3. Třída T_0-prostorů je epireflektivní obal Sierpińského prostoru.
4. Třída 0-dimenzionálních T_0-prostorů je epireflektivní obal diskrétního aspoň dvoubodového prostoru.

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

1. Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní obal libovolného intervalu v $\mathbb{R}$.
2. Třída T_1-prostorů je epireflektivní obal všech hrubých T_1-prostorů.
3. Třída T_0-prostorů je epireflektivní obal Sierpińského prostoru.
4. Třída 0-dimenzionálních T_0-prostorů je epireflektivní obal diskrétního aspoň dvoubodového prostoru.

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

1. Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní obal libovolného intervalu v $\mathbb{R}$.
2. Třída T_1-prostorů je epireflektivní obal všech hrubých T_1-prostorů.
3. Třída T_0-prostorů je epireflektivní obal Sierpińského prostoru.
4. Třída 0-dimenzionálních T_0-prostorů je epireflektivní obal diskrétního aspoň dvoubodového prostoru.

Epireflektivní třídy v *Top*

Následující vlastnosti se vždy vztahují k třídě *Top* všech topologických prostorů.

1. Třída všech jednobodových prostorů je nejmenší epireflektivní třída, třída všech topologických prostorů je největší.
2. Každá bireflektivní třída je epireflektivní.
3. Průnik epireflektivních tříd je epireflektivní třída a tedy pro každou třídu topologických prostorů existuje nejmenší větší epireflektivní třída (tzv. epireflektivní obal).
4. Epireflektivní obal třídy $\mathcal{C}$ topologických prostorů je složen ze všech prostorů, které se dají vnořit do součinu prostorů z $\mathcal{C}$.
5. Je-li epireflektivní třída $\mathcal{C}$ uzavřená na jemnější topologie, pak každá epireflekce je kvocientové zobrazení.

Příklady epireflektivních obalů

1. Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní obal libovolného intervalu v $\mathbb{R}$.
2. Třída T_1-prostorů je epireflektivní obal všech hrubých T_1-prostorů.
3. Třída T_0-prostorů je epireflektivní obal Sierpińského prostoru.
4. Třída 0-dimenzionálních T_0-prostorů je epireflektivní obal diskrétního aspoň dvoubodového prostoru.

T_0-modifikace prostoru X je jednoduchá. Musí se ztotožnit ty body $x, y \in X$, které jako dvoubodový podprostor tvoří indiskrétní prostor.

TVRZENÍ (T_0-modifikace)

Epireflekce $e_0 : X \to t_0X$ prostoru X na jeho T_0-modifikaci je slabě i silně vytvářející a je to otevřené i uzavřené spojité zobrazení. Zobrazení e_0 je dáno ekvivalencí

$$x \sim y\,,\ \text{jestliže } x \in \overline{y}, y \in \overline{x}\,.$$

TVRZENÍ

TVRZENÍ (T_0-modifikace)

Epireflekce $e_0 : X \to t_0X$ *prostoru* X *na jeho* T_0*-modifikaci je slabě i silně vytvářející a je to otevřené i uzavřené spojité zobrazení. Zobrazení* e_0 *je dáno ekvivalencí*

$$x \sim y\,,\ \textit{jestliže}\ x \in \overline{y}, y \in \overline{x}\,.$$

TVRZENÍ

TVRZENÍ (T_0-modifikace)

Epireflekce $e_0 : X \to t_0 X$ prostoru X na jeho T_0-modifikaci je slabě i silně vytvářející a je to otevřené i uzavřené spojité zobrazení. Zobrazení e_0 je dáno ekvivalencí

$$x \sim y\,, \text{ jestliže } x \in \overline{y}, y \in \overline{x}\,.$$

T_0-modifikace se tedy získá jako kvocient, při kterém se každý indiskrétní podprostor stáhne do bodu. T_0-modifikace se dá získat i pomocí zobrazení do Sierpińského prostoru.

TVRZENÍ

TVRZENÍ (T_0-modifikace)

Epireflekce $e_0 : X \to t_0 X$ prostoru X na jeho T_0-modifikaci je slabě i silně vytvářející a je to otevřené i uzavřené spojité zobrazení. Zobrazení e_0 je dáno ekvivalencí

$$x \sim y\,,\ \textit{jestliže}\ x \in \overline{y}, y \in \overline{x}\,.$$

TVRZENÍ

1. *T_0-modifikace prostoru X rovna diagonálnímu zobrazení X na svůj obraz v součinu $S^{C(X,S)}$, kde S je do Sierpińského prostor.*
2. *T_0-modifikace komutuje se součiny, podprostory, součty i kvocienty. To znamená, např. pro součiny, že T_0-modifikace součinu je součin T_0-modifikací.*

T_1, T_2 a T_3-modifikace mají složitější konstrukci, viz poznámky.

TVRZENÍ (T_0-modifikace)

Epireflekce $e_0 : X \to t_0 X$ prostoru X na jeho T_0-modifikaci je slabě i silně vytvářející a je to otevřené i uzavřené spojité zobrazení. Zobrazení e_0 je dáno ekvivalencí

$$x \sim y\,, \text{ jestliže } x \in \overline{y}, y \in \overline{x}\,.$$

TVRZENÍ

1. *T_0-modifikace prostoru X rovna diagonálnímu zobrazení X na svůj obraz v součinu $S^{C(X,S)}$, kde S je do Sierpińského prostor.*
2. *T_0-modifikace komutuje se součiny, podprostory, součty i kvocienty. To znamená, např. pro součiny, že T_0-modifikace součinu je součin T_0-modifikací.*

T_1, T_2 a T_3-modifikace mají složitější konstrukci, viz poznámky.

TVRZENÍ (T_0-modifikace)

Epireflekce $e_0 : X \to t_0X$ prostoru X na jeho T_0-modifikaci je slabě i silně vytvářející a je to otevřené i uzavřené spojité zobrazení. Zobrazení e_0 je dáno ekvivalencí

$$x \sim y\,,\ \textit{jestliže}\ x \in \overline{y}, y \in \overline{x}\,.$$

TVRZENÍ

1. *T_0-modifikace prostoru X rovna diagonálnímu zobrazení X na svůj obraz v součinu $S^{C(X,S)}$, kde S je do Sierpińského prostor.*
2. *T_0-modifikace komutuje se součiny, podprostory, součty i kvocienty. To znamená, např. pro součiny, že T_0-modifikace součinu je součin T_0-modifikací.*

T_1, T_2 a T_3-modifikace mají složitější konstrukci, viz poznámky.

T_0-modifikace úplně regulárního prostoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace je T_0-modifikací úplně regulární modifikace.

TVRZENÍ (Úplně regulární modifikace)

T_0-modifikace úplně regulárního prostoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace je T_0-modifikací úplně regulární modifikace.

TVRZENÍ (Úplně regulární modifikace)

1. *Nechť J je interval v $\mathbb{R}$. Úplně regulární modifikace prostoru X je hrubší prostor crX slabě vytvořený množinou $C(X, J)$.*
2. *Uzavřená báze prostoru crX jsou množiny tvaru $f^{-1}(0)$, kde $f \in C(X)$ nebo $f \in C(X, [0,1])$.*

Vzory 0 nebo libovolného bodu (nebo uzavřené množiny) v $\mathbb{R}$ se nazývají nulové množiny (tento název se může plést s termínem z teorie míry a tak se často říká zero množiny). Doplňky nulových množin se nazývají konulové množiny (nebo cozero množiny) a tvoří otevřenou bázi prostoru crX.

TVRZENÍ (Charakterizace úplně regulárních prostorů)

Topologický prostor X je úplně regulární právě když jeho konulové množiny tvoří jeho otevřenou bázi.

TVRZENÍ ($T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace)

$T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace prostoru X je diagonální zobrazení množiny $C(X)$ nebo $C(X, [0,1])$ na obraz prostoru X v $\mathbb{R}^{C(X)}$, resp. v $[0,1]^{C(X,[0,1])}$.

T_0-modifikace úplně regulárního prostoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace je T_0-modifikací úplně regulární modifikace.

TVRZENÍ (Úplně regulární modifikace)

1. *Nechť J je interval v $\mathbb{R}$. Úplně regulární modifikace prostoru X je hrubší prostor crX slabě vytvořený množinou $C(X, J)$.*
2. *Uzavřená báze prostoru crX jsou množiny tvaru $f^{-1}(0)$, kde $f \in C(X)$ nebo $f \in C(X, [0, 1])$.*

Vzory 0 nebo libovolného bodu (nebo uzavřené množiny) v $\mathbb{R}$ se nazývají nulové množiny (tento název se může plést s termínem z teorie míry a tak se často říká zero množiny). Doplňky nulových množin se nazývají konulové množiny (nebo cozero množiny) a tvoří otevřenou bázi prostoru crX.

TVRZENÍ (Charakterizace úplně regulárních prostorů)

Topologický prostor X je úplně regulární právě když jeho konulové množiny tvoří jeho otevřenou bázi.

TVRZENÍ ($T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace)

$T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace prostoru X je diagonální zobrazení množiny $C(X)$ nebo $C(X, [0, 1])$ na obraz prostoru X v $\mathbb{R}^{C(X)}$, resp. v $[0, 1]^{C(X,[0,1])}$.

T_0-modifikace úplně regulárního prostoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace je T_0-modifikací úplně regulární modifikace.

TVRZENÍ (Úplně regulární modifikace)

1. *Nechť J je interval v $\mathbb{R}$. Úplně regulární modifikace prostoru X je hrubší prostor crX slabě vytvořený množinou $C(X,J)$.*
2. *Uzavřená báze prostoru crX jsou množiny tvaru $f^{-1}(0)$, kde $f \in C(X)$ nebo $f \in C(X,[0,1])$.*

Vzory 0 nebo libovolného bodu (nebo uzavřené množiny) v $\mathbb{R}$ se nazývají nulové množiny (tento název se může plést s termínem z teorie míry a tak se často říká zero množiny). Doplňky nulových množin se nazývají konulové množiny (nebo cozero množiny) a tvoří otevřenou bázi prostoru crX.

TVRZENÍ (Charakterizace úplně regulárních prostorů)

Topologický prostor X je úplně regulární právě když jeho konulové množiny tvoří jeho otevřenou bázi.

TVRZENÍ ($T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace)

$T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace prostoru X je diagonální zobrazení množiny $C(X)$ nebo $C(X,[0,1])$ na obraz prostoru X v $\mathbb{R}^{C(X)}$, resp. v $[0,1]^{C(X,[0,1])}$.

T_0-modifikace úplně regulárního prostoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace je T_0-modifikací úplně regulární modifikace.

TVRZENÍ (Úplně regulární modifikace)

1. *Nechť J je interval v $\mathbb{R}$. Úplně regulární modifikace prostoru X je hrubší prostor crX slabě vytvořený množinou $C(X, J)$.*
2. *Uzavřená báze prostoru crX jsou množiny tvaru $f^{-1}(0)$, kde $f \in C(X)$ nebo $f \in C(X, [0, 1])$.*

Vzory 0 nebo libovolného bodu (nebo uzavřené množiny) v $\mathbb{R}$ se nazývají nulové množiny (tento název se může plést s termínem z teorie míry a tak se často říká zero množiny). Doplňky nulových množin se nazývají konulové množiny (nebo cozero množiny) a tvoří otevřenou bázi prostoru crX.

TVRZENÍ (Charakterizace úplně regulárních prostorů)

Topologický prostor X je úplně regulární právě když jeho konulové množiny tvoří jeho otevřenou bázi.

TVRZENÍ ($T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace)

$T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace prostoru X je diagonální zobrazení množiny $C(X)$ nebo $C(X, [0, 1])$ na obraz prostoru X v $\mathbb{R}^{C(X)}$, resp. v $[0, 1]^{C(X,[0,1])}$.

T_0-modifikace úplně regulárního prostoru je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace je T_0-modifikací úplně regulární modifikace.

TVRZENÍ (Úplně regulární modifikace)

1. *Nechť J je interval v $\mathbb{R}$. Úplně regulární modifikace prostoru X je hrubší prostor crX slabě vytvořený množinou $C(X, J)$.*
2. *Uzavřená báze prostoru crX jsou množiny tvaru $f^{-1}(0)$, kde $f \in C(X)$ nebo $f \in C(X, [0, 1])$.*

Vzory 0 nebo libovolného bodu (nebo uzavřené množiny) v $\mathbb{R}$ se nazývají nulové množiny (tento název se může plést s termínem z teorie míry a tak se často říká zero množiny). Doplňky nulových množin se nazývají konulové množiny (nebo cozero množiny) a tvoří otevřenou bázi prostoru crX.

TVRZENÍ (Charakterizace úplně regulárních prostorů)

Topologický prostor X je úplně regulární právě když jeho konulové množiny tvoří jeho otevřenou bázi.

TVRZENÍ ($T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace)

$T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace prostoru X je diagonální zobrazení množiny $C(X)$ nebo $C(X, [0, 1])$ na obraz prostoru X v $\mathbb{R}^{C(X)}$, resp. v $[0, 1]^{C(X,[0,1])}$.

V literatuře existují popisy nekonečně mnoha různých variací oddělování bodů a množin. My se zmíníme jen o dvou dalších možnostech oddělování a to oddělování pomocí množin i pomocí funkcí.

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

1. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je úplně Hausdorffův a každý úplně Hausdorffův prostor je Urysonův.
2. Existuje úplně Hausdorffův prostor, který není úplně regulární a existuje Urysonův prostor, který není úplně Hausdorffův.
3. Třída úplně Hausdorffových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají úplně Hausdorffovy prostory.
4. Prostor je úplně Hausdorffův právě když jeho úplně regulární modifikace je Hausdorffova.

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

1. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je úplně Hausdorffův, každý úplně Hausdorffův prostor je Urysonův.
2. Existuje úplně Hausdorffův prostor, který není úplně regulární a existuje Urysonův prostor, který není úplně Hausdorffův.
3. Třída úplně Hausdorffových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají úplně Hausdorffovy prostory.
4. Prostor je úplně Hausdorffův právě když jeho úplně regulární modifikace je Hausdorffova.

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

1. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je úplně Hausdorffův a každý úplně Hausdorffův prostor je Urysonův.
2. Existuje úplně Hausdorffův prostor, který není úplně regulární a existuje Urysonův prostor, který není úplně Hausdorffův.
3. Třída úplně Hausdorffových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají úplně Hausdorffovy prostory.
4. Prostor je úplně Hausdorffův právě když jeho úplně regulární modifikace je Hausdorffova.

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

1. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je úplně Hausdorffův a každý úplně Hausdorffův prostor je Urysonův.
2. Existuje úplně Hausdorffův prostor, který není úplně regulární a existuje Urysonův prostor, který není úplně Hausdorffův.
3. Třída úplně Hausdorffových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají úplně Hausdorffovy prostory.
4. Prostor je úplně Hausdorffův právě když jeho úplně regulární modifikace je Hausdorffova.

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

1. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je úplně Hausdorffův a každý úplně Hausdorffův prostor je Urysonův.
2. Existuje úplně Hausdorffův prostor, který není úplně regulární a existuje Urysonův prostor, který není úplně Hausdorffův.
3. Třída úplně Hausdorffových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají úplně Hausdorffovy prostory.
4. Prostor je úplně Hausdorffův právě když jeho úplně regulární modifikace je Hausdorffova.

DEFINICE

Topologický prostor se nazývá Urysonův prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní uzavřená okolí.

Vlastnosti Urysonových prostorů

1. Každý T_3-prostor je Urysonův, každý Urysonův prostor je Hausdorffův.
2. Existuje Urysonův prostor, který není regulární a existuje Hausdorffův prostor, který není Urysonův.
3. Třída Urysonových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají Urysonovy prostory.

DEFINICE

Topologický prostor X se nazývá úplně Hausdorffův, jestliže $C(X)$ oddělují body prostoru X.

Vlastnosti úplně Hausdorffových prostorů

1. Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je úplně Hausdorffův a každý úplně Hausdorffův prostor je Urysonův.
2. Existuje úplně Hausdorffův prostor, který není úplně regulární a existuje Urysonův prostor, který není úplně Hausdorffův.
3. Třída úplně Hausdorffových prostorů je součinová, dědičná a je uzavřená na součty. Kvocienty nezachovávají úplně Hausdorffovy prostory.
4. Prostor je úplně Hausdorffův právě když jeho úplně regulární modifikace je Hausdorffova.

Připomeneme, že podmnožina A prostoru X se nazývá G_δ-množina (resp. F_σ-množina), jestliže je průnikem spočetně mnoha otevřených množin (resp. sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin). Prostor se nazývá perfektní, jestliže je každá jeho uzavřená množina G_δ-množinou (např. každý metrizovatelný prostor je perfektní).

Další vlastnosti normálních prostorů

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]

Další vlastnosti normálních prostorů

1. Každý prostor s nejvýše jedním hromadným bodem je normální.
2. Každý topologický prostor je kvocientem T_4-prostoru.
   [*Návod*: Každý topologický prostor je silně vytvořen zobrazeními z T_1-prostorů s jedním hromadným bodem a tedy je kvocientem součtů takových prostorů.]
3. Je-li prostor otevřeně dědičně normální (tj. každá jeho otevřená podmnožina je normální), je dědičně normální.
4. Každá F_σ-podmnožina normálního prostoru je normální.
   [*Návod*: ...]
5. Perfektní normální prostor je dědičně normální.
6. Je-li f spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině A normálního prostoru X, dá se psát jako složení spojitých zobrazení ge', kde e je epireflekce X na jeho T_1-modifikaci a $e' : A \to \overline{e(A)}$ je zúžení e.
   [*Návod*: ...]
7. Každý GO-prostor je normální.
   [*Návod*: ...]