OBECNÁ TOPOLOGIE

2. PODPROSTORY, SOUČINY, KVOCIENTY A SOUČTY PROSTORŮ

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Z množin i z algebry znáte pojmy jako podmnožina, podgrupa, kartézský součin množin nebo okruhů, kvocient grup nebo faktorgrupa, direktní součet grup. To jsou konstrukce, při kterých z daných struktur vytvoříme nové. Podobným postupem se získají i nové topologické prostory.

V algebraických strukturách určuje homomorfismus strukturu na obrazu pomocí struktury na definičním oboru (např. je-li $f : G \to H$ homomorfismus grup a f je zobrazení na celé H, je grupová struktura na H jednoznačně určena grupovou strukturou na G a homomorfismem f). Toto však zdaleka neplatí u topologických struktur. Topologii na obraze lze měnit s velkou volností a zobrazení zůstává stále spojité.

Z množin i z algebry znáte pojmy jako podmnožina, podgrupa, kartézský součin množin nebo okruhů, kvocient grup nebo faktorgrupa, direktní součet grup. To jsou konstrukce, při kterých z daných struktur vytvoříme nové. Podobným postupem se získají i nové topologické prostory.

V algebraických strukturách určuje homomorfismus strukturu na obrazu pomocí struktury na definičním oboru (např. je-li $f : G \to H$ homomorfismus grup a f je zobrazení na celé H, je grupová struktura na H jednoznačně určena grupovou strukturou na G a homomorfismem f). Toto však zdaleka neplatí u topologických struktur. Topologii na obraze lze měnit s velkou volností a zobrazení zůstává stále spojité.

Podgrupa, podokruh a podobné struktury vznikají zúžením příslušných algebraických operací na vhodnou podmnožinu. Co je však zúžení topologie na podmnožinu? Vezmou se jen ty otevřené množiny, které leží v oné podmnožině? Jakou topologii bychom dostali tímto způsobem z topologie přímky zúžením na racionální čísla? To není vhodný postup.

Součin topologických prostorů by měla být nějaká topologie na součinu nosných množin oněch prostorů. Ale jaká? Pro součiny dvou, či obecněji konečně mnoha, prostorů se zdá být odpověď jasná: okolí bodů mají za bázi součiny okolí projekcí oněch bodů (tak to alespoň vychází v euklidovských prostorech). Ale pro součiny nekonečně mnoha prostorů už odpověď jasná není. Jsou okolí bodu součinu také všechny součiny okolí projekcí tohoto bodu? Ukázalo se, že to není vhodné. Trvalo pár desetiletí, než se vhodná definice našla.

Postup uvedený dále bude založen na topologiích vytvořených pomocí spojitosti zobrazení. Uvidíme, že tento postup dá přirozené definice výše uvedených konstrukcí a současně budou vidět důvody pro takové definice.
Nejdříve prostudujeme vlastnosti všech topologií na dané množině a pak teprve přikročíme ke konstrukcím. Množinově zůstávají uvedené konstrukce (podprostor, kartézský součin, kvocient, součet) stejné, bude však nutné ze všech možných topologií na nich vybrat ty nejvhodnější, v nějakém smyslu extremální.

Podgrupa, podokruh a podobné struktury vznikají zúžením příslušných algebraických operací na vhodnou podmnožinu. Co je však zúžení topologie na podmnožinu? Vezmou se jen ty otevřené množiny, které leží v oné podmnožině? Jakou topologii bychom dostali tímto způsobem z topologie přímky zúžením na racionální čísla? To není vhodný postup.

Součin topologických prostorů by měla být nějaká topologie na součinu nosných množin oněch prostorů. Ale jaká? Pro součiny dvou, či obecněji konečně mnoha, prostorů se zdá být odpověď jasná: okolí bodů mají za bázi součiny okolí projekcí oněch bodů (tak to alespoň vychází v euklidovských prostorech). Ale pro součiny nekonečně mnoha prostorů už odpověď jasná není. Jsou okolí bodu součinu také všechny součiny okolí projekcí tohoto bodu? Ukázalo se, že to není vhodné. Trvalo pár desetiletí, než se vhodná definice našla.

Postup uvedený dále bude založen na topologiích vytvořených pomocí spojitosti zobrazení. Uvidíme, že tento postup dá přirozené definice výše uvedených konstrukcí a současně budou vidět důvody pro takové definice.
Nejdříve prostudujeme vlastnosti všech topologií na dané množině a pak teprve přikročíme ke konstrukcím. Množinově zůstávají uvedené konstrukce (podprostor, kartézský součin, kvocient, součet) stejné, bude však nutné ze všech možných topologií na nich vybrat ty nejvhodnější, v nějakém smyslu extremální.

Podgrupa, podokruh a podobné struktury vznikají zúžením příslušných algebraických operací na vhodnou podmnožinu. Co je však zúžení topologie na podmnožinu? Vezmou se jen ty otevřené množiny, které leží v oné podmnožině? Jakou topologii bychom dostali tímto způsobem z topologie přímky zúžením na racionální čísla? To není vhodný postup.

Součin topologických prostorů by měla být nějaká topologie na součinu nosných množin oněch prostorů. Ale jaká? Pro součiny dvou, či obecněji konečně mnoha, prostorů se zdá být odpověď jasná: okolí bodů mají za bázi součiny okolí projekcí oněch bodů (tak to alespoň vychází v euklidovských prostorech). Ale pro součiny nekonečně mnoha prostorů už odpověď jasná není. Jsou okolí bodu součinu také všechny součiny okolí projekcí tohoto bodu? Ukázalo se, že to není vhodné. Trvalo pár desetiletí, než se vhodná definice našla.

Postup uvedený dále bude založen na topologiích vytvořených pomocí spojitosti zobrazení. Uvidíme, že tento postup dá přirozené definice výše uvedených konstrukcí a současně budou vidět důvody pro takové definice.
Nejdříve prostudujeme vlastnosti všech topologií na dané množině a pak teprve přikročíme ke konstrukcím. Množinově zůstávají uvedené konstrukce (podprostor, kartézský součin, kvocient, součet) stejné, bude však nutné ze všech možných topologií na nich vybrat ty nejvhodnější, v nějakém smyslu extremální.

Zavedeme uspořádání na množině všech topologií na X. Protože topologie je soustava podmnožin X, jsou topologie na X uspořádané inkluzí. Z jistého hlediska je však lepší vzít opačnou inkluzi.

DEFINICE (Definice uspořádání topologií)

Množina všech topologií na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, říkáme, že $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$ a že $\mathcal{H}$ je hrubší než $\mathcal{G}$.

Místo uvedených termínů se používají i termíny *slabší – silnější*, lze samozřejmě používat i termíny *větší – menší*.
Uvědomte si, že podle definice uspořádání topologií jsou dvě topologie srovnatelné jen, jsou-li to topologie na stejné množině. Tedy pokud jsou $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ dvě topologie a $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$, pak existuje množina X tak, že $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ jsou topologie na X. Zřejmě je $X = \bigcup \mathcal{G}$.

V Poznámkách a v Příkladech jsou uvedeny různé zajímavosti o topologiích na konečných množinách.

DEFINICE (Definice uspořádání topologií)

Množina všech topologií na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, říkáme, že $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$ a že $\mathcal{H}$ je hrubší než $\mathcal{G}$.

Místo uvedených termínů se používají i termíny *slabší – silnější*, lze samozřejmě používat i termíny *větší – menší*.
Uvědomte si, že podle definice uspořádání topologií jsou dvě topologie srovnatelné jen, jsou-li to topologie na stejné množině. Tedy pokud jsou $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ dvě topologie a $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$, pak existuje množina X tak, že $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ jsou topologie na X. Zřejmě je $X = \bigcup \mathcal{G}$.

V Poznámkách a v Příkladech jsou uvedeny různé zajímavosti o topologiích na konečných množinách.

DEFINICE (Definice uspořádání topologií)

Množina všech topologií na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, říkáme, že $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$ a že $\mathcal{H}$ je hrubší než $\mathcal{G}$.

Místo uvedených termínů se používají i termíny *slabší – silnější*, lze samozřejmě používat i termíny *větší – menší*.
Uvědomte si, že podle definice uspořádání topologií jsou dvě topologie srovnatelné jen, jsou-li to topologie na stejné množině. Tedy pokud jsou $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ dvě topologie a $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$, pak existuje množina X tak, že $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ jsou topologie na X. Zřejmě je $X = \bigcup \mathcal{G}$.

V Poznámkách a v Příkladech jsou uvedeny různé zajímavosti o topologiích na konečných množinách.

DEFINICE (Definice uspořádání topologií)

Množina všech topologií na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, říkáme, že $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$ a že $\mathcal{H}$ je hrubší než $\mathcal{G}$.

Místo uvedených termínů se používají i termíny *slabší – silnější*, lze samozřejmě používat i termíny *větší – menší*.
Uvědomte si, že podle definice uspořádání topologií jsou dvě topologie srovnatelné jen, jsou-li to topologie na stejné množině. Tedy pokud jsou $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ dvě topologie a $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$, pak existuje množina X tak, že $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ jsou topologie na X. Zřejmě je $X = \bigcup \mathcal{G}$.

V Poznámkách a v Příkladech jsou uvedeny různé zajímavosti o topologiích na konečných množinách.

DEFINICE (Definice uspořádání topologií)

Množina všech topologií na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{G} \supset \mathcal{H}$, říkáme, že $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$ a že $\mathcal{H}$ je hrubší než $\mathcal{G}$.

Místo uvedených termínů se používají i termíny *slabší – silnější*, lze samozřejmě používat i termíny *větší – menší*.
Uvědomte si, že podle definice uspořádání topologií jsou dvě topologie srovnatelné jen, jsou-li to topologie na stejné množině. Tedy pokud jsou $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ dvě topologie a $\mathcal{G}$ je jemnější než $\mathcal{H}$, pak existuje množina X tak, že $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ jsou topologie na X. Zřejmě je $X = \bigcup \mathcal{G}$.

V Poznámkách a v Příkladech jsou uvedeny různé zajímavosti o topologiích na konečných množinách.

Nadále budou topologie chápány dohromady s uvedeným uspořádáním.

TVRZENÍ (Úplný svaz topologií)

Množina všech topologií na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Spojitost a suprema, infima)

Je-li f spojité zobrazení $(X, \mathcal{G}_a) \to (Y, \mathcal{H}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{H}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{H}_a)$.

Důkaz

Předchozí tvrzení bude používáno hlavně v případech, kdy všechny topologie buď na X nebo na Y jsou stejné. Např. pokud je f spojité na topologickém prostoru X do různých topologií na množině Y, je spojité i do jejich infima (samozřejmě i do jejich suprema, ale to je zřejmé).

TVRZENÍ (Úplný svaz topologií)

Množina všech topologií na dané množině tvoří úplný svaz.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Spojitost a suprema, infima)

Je-li f spojité zobrazení $(X, \mathcal{G}_a) \to (Y, \mathcal{H}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{H}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{H}_a)$.

▸ Důkaz

Předchozí tvrzení bude používáno hlavně v případech, kdy všechny topologie buď na X nebo na Y jsou stejné. Např. pokud je f spojité na topologickém prostoru X do různých topologií na množině Y, je spojité i do jejich infima (samozřejmě i do jejich suprema, ale to je zřejmé).

TVRZENÍ (Úplný svaz topologií)

Množina všech topologií na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

Jak se chová spojitost zobrazení při supremech a infimech topologií? Následující tvrzení je základní větou pro všechny dále uvedené konstrukce.

TVRZENÍ (Spojitost a suprema, infima)

Je-li f spojité zobrazení $(X, \mathcal{G}_a) \to (Y, \mathcal{H}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{H}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{H}_a)$.

Důkaz

Předchozí tvrzení bude používáno hlavně v případech, kdy všechny topologie buď na X nebo na Y jsou stejné. Např. pokud je f spojité na topologickém prostoru X do různých topologií na množině Y, je spojité i do jejich infima (samozřejmě i do jejich suprema, ale to je zřejmé).

TVRZENÍ (Úplný svaz topologií)

Množina všech topologií na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Spojitost a suprema, infima)

Je-li f *spojité zobrazení* $(X, \mathcal{G}_a) \to (Y, \mathcal{H}_a)$ *pro každé* $a \in A$*, pak je* f *spojité i jako zobrazení* $(X, \sup_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{H}_a)$ *a* $(X, \inf_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{H}_a)$.

Důkaz

Předchozí tvrzení bude používáno hlavně v případech, kdy všechny topologie buď na X nebo na Y jsou stejné. Např. pokud je f spojité na topologickém prostoru X do různých topologií na množině Y, je spojité i do jejich infima (samozřejmě i do jejich suprema, ale to je zřejmé).

TVRZENÍ (Úplný svaz topologií)

Množina všech topologií na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Spojitost a suprema, infima)

Je-li f spojité zobrazení $(X, \mathcal{G}_a) \to (Y, \mathcal{H}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{H}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{H}_a)$.

Důkaz

Předchozí tvrzení bude používáno hlavně v případech, kdy všechny topologie buď na X nebo na Y jsou stejné. Např. pokud je f spojité na topologickém prostoru X do různých topologií na množině Y, je spojité i do jejich infima (samozřejmě i do jejich suprema, ale to je zřejmé).

Nyní lze přikročit k prvnímu obecnému kroku, z kterého vyplynou definice podprostoru a součinu prostorů.

TVRZENÍ (Slabá topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ jsou spojitá.

Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá slabá topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak slabá topologie na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$, má subbázi

$$\{f_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}.$$

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Slabá topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ jsou spojitá.

▸ Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá slabá topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak slabá topologie na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, má subbázi

$$\{f_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}.$$

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Slabá topologie)

Nechť X *je množina,* $\{Y_a\}_A$ *je soubor topologických prostorů a pro každé* $a \in A$ *je dáno zobrazení* $f_a : X \to Y_a$*. Pak existuje nejhrubší topologie* $\mathcal{G}$ *na* X *taková, že všechna zobrazení* $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ *jsou spojitá.*

▸ Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá slabá topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ *topologie prostorů* Y_a*, pak slabá topologie na* X *vytvořená souborem* $f_a : X \to Y_a, a \in A$*, má subbázi*

$$\{f_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}.$$

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Slabá topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ jsou spojitá.

Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá slabá topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

Někdy se používá slova *generovaná* místo *vytvořená*. Místo *topologie* slabě vytvořená nějakým souborem se též říká *topologický prostor* slabě vytvořený daným souborem.
Důkaz následujícího tvrzení je velmi snadný.

TVRZENÍ (Popis slabé topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak slabá topologie na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$, má subbázi

$$\{f_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}.$$

TVRZENÍ (Slabá topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ jsou spojitá.

Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá slabá topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak slabá topologie na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$, má subbázi

$$\{f_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}.$$

$\Rightarrow$

Nyní bude uvedena charakterizace slabé topologie, která nepoužívá uspořádání topologií.

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, mezi topologickými prostory:

1. *Topologický prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.*
2. *Je-li Z topologický prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je spojité právě když každé složení $f_a\, g$, $a \in A$, je spojité.*

Důkaz

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a, a \in A$, mezi topologickými prostory:

1. *Topologický prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$.*
2. *Je-li Z topologický prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je spojité právě když každé složení $f_a\, g, a \in A$, je spojité.*

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, mezi topologickými prostory:

1. *Topologický prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.*
2. *Je-li Z topologický prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je spojité právě když každé složení $f_a\, g$, $a \in A$, je spojité.*

Důkaz

Ještě jedno obecné tvrzení o vytváření slabých topologií bude užitečné. Jedná se o zachovávání slabých vytváření při skládání. Jeho důkaz je přímou jednoduchou aplikací předchozí bezbodové charakterizace slabé topologie.

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\ a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\ a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, *mezi topologickými prostory:*

1. *Topologický prostor* X *je slabě vytvořen souborem* $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.
2. *Je-li* Z *topologický prostor a* $g : Z \to X$, *pak zobrazení* g *je spojité právě když každé složení* $f_a\, g$, $a \in A$, *je spojité.*

Důkaz

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, *jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:*

1. *Je-li soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\, a \in A,\, i \in I_a\}$ *slabě vytvářející, je i soubor* $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ *slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory* $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, *slabě vytvářející, je i soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\, a \in A,\, i \in I_a\}$ *slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a, a \in A$, *mezi topologickými prostory:*

1. *Topologický prostor* X *je slabě vytvořen souborem* $f_a : X \to Y_a, a \in A$.
2. *Je-li* Z *topologický prostor a* $g : Z \to X$, *pak zobrazení* g *je spojité právě když každé složení* $f_a\, g, a \in A$, *je spojité.*

Důkaz

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}, a \in A$, *jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:*

1. *Je-li soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ *slabě vytvářející, je i soubor* $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ *slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory* $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}, a \in A$, *slabě vytvářející, je i soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ *slabě vytvářející.*

Nyní se použije předchozí pojem slabých topologií na speciální případy. Nejdříve to bude podprostor topologického prostoru a potom součin topologických prostorů.

DEFINICE (Podprostor topologického prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{G})$ se nazývá podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{H})$ je podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

1. $\mathcal{H} = \{G \cap Y; G \in \mathcal{G}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{H})$ je spojité právě když je spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{G})$.*
3. *Nechť Z je topologický prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{H})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{G})$.*

DEFINICE (Podprostor topologického prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{G})$ se nazývá podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{H})$ je podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

1. $\mathcal{H} = \{G \cap Y; G \in \mathcal{G}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{H})$ je spojité právě když je spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{G})$.*
3. *Nechť Z je topologický prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{H})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{G})$.*

DEFINICE (Podprostor topologického prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{G})$ se nazývá podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Z předchozích obecných vět o slabém vytváření se dostanou snadno následující tvrzení. První vlastnost ukazuje smysl zúžení topologie diskutovaného na začátku kapitoly. Často se definuje podprostor právě pomocí tohoto zúžení a další dvě vlastnosti se z této definice snadno dokazují.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{H})$ je podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

1. $\mathcal{H} = \{G \cap Y; G \in \mathcal{G}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{H})$ je spojité právě když je spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{G})$.*
3. *Nechť Z je topologický prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{H})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{G})$.*

DEFINICE (Podprostor topologického prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{G})$ se nazývá podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{H})$ je podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

1. $\mathcal{H} = \{G \cap Y; G \in \mathcal{G}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{H})$ je spojité právě když je spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{G})$.*
3. *Nechť Z je topologický prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{H})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{G})$.*

DEFINICE (Podprostor topologického prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{G})$ se nazývá podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{H})$ je podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

1. $\mathcal{H} = \{G \cap Y; G \in \mathcal{G}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{H})$ je spojité právě když je spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{G})$.*
3. *Nechť Z je topologický prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{H})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{G})$.*

DEFINICE (Podprostor topologického prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a $Y \subset X$. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{G})$ se nazývá podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{H})$ je podprostor topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$.

1. $\mathcal{H} = \{G \cap Y; G \in \mathcal{G}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{H})$ je spojité právě když je spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{G})$.*
3. *Nechť Z je topologický prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{H})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{G})$.*

Nastávají situace, kdy množina Y není podmnožinou prostoru X, ale dá se do něj prostě zobrazit. Pak je Y „skoro” podmnožinou X a často se Y se svým obrazem v X ztotožňuje. Podobná situace je i v topologických prostorech.

DEFINICE (Vnoření)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ vnoření, pak prostor Y je homeomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Vnoření)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ vnoření, pak prostor Y je homeomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Vnoření)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ vnoření, pak prostor Y je homeomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Vnoření)

Nechť X, Y jsou topologické prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ vnoření, pak prostor Y je homeomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

Z topologického hlediska je tedy možné vnořený prostor do X ztotožnit s příslušným podprostorem v X. Někdy se místo termínu *vnoření* používá termín *vložení*.

Máme nyní nástroj, jak definovat hezkou topologii pomocí souboru zobrazení. Na kartézském součinu množin máme soubor zobrazení (projekce), které v jistém smyslu součin definují (viz poznámky, též pro označení, které budeme používat). Použije se i k definici součinu prostorů (slovo „kartézský" budeme vynechávat).

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\ \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\ , \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je součin topologických prostorů $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. *$\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ je subbáze topologie $\mathcal{G}$.*
2. *Zobrazení topologického prostoru Z do $(X, \mathcal{G})$ je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi pr_a.*
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{G}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}, i \in I_a$, je $(X, \mathcal{G})$ součinem prostorů $T_{a,i}, a \in A, i \in I_a$.*

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\,\mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je součin topologických prostorů $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. *$\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G);\ G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ je subbáze topologie $\mathcal{G}$.*
2. *Zobrazení topologického prostoru Z do $(X, \mathcal{G})$ je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi pr_a.*
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{G}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}, i \in I_a$, je $(X, \mathcal{G})$ součinem prostorů $T_{a,i}, a \in A, i \in I_a$.*

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a, a \in A$, je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ je slabě vytvářející.

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

Oproti podprostorům není pochopení topologie součinu jednoduché. Ve cvičeních je popis topologie součinu pomocí okolí a konvergence, a také popis uzávěru některých množin.
V následujícím tvrzení ve třetí části je nutné ztotožnit součin součinů množin se součinem jednotlivých množin (viz poznámky).

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je součin topologických prostorů $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G);\, G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ *je subbáze topologie* $\mathcal{G}$.
2. *Zobrazení topologického prostoru Z do $(X, \mathcal{G})$ je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{G}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}, i \in I_a$, je $(X, \mathcal{G})$ součinem prostorů $T_{a,i}, a \in A, i \in I_a$.*

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\, , \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ *je součin topologických prostorů* $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ *je subbáze topologie* $\mathcal{G}$.
2. *Zobrazení topologického prostoru* Z *do* $(X, \mathcal{G})$ *je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor* $(X_a, \mathcal{G}_a)$ *součinem prostorů* $T_{a,i}, i \in I_a$, *je* $(X, \mathcal{G})$ *součinem prostorů* $T_{a,i}, a \in A, i \in I_a$.

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a, a \in A$, *je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení* $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ *je slabě vytvářející.*

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ *je součin topologických prostorů* $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ *je subbáze topologie* $\mathcal{G}$.
2. *Zobrazení topologického prostoru* Z *do* $(X, \mathcal{G})$ *je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor* $(X_a, \mathcal{G}_a)$ *součinem prostorů* $T_{a,i}, i \in I_a$, *je* $(X, \mathcal{G})$ *součinem prostorů* $T_{a,i}, a \in A, i \in I_a$.

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a, a \in A$, *je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení* $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ *je slabě vytvářející.*

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ *je součin topologických prostorů* $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G);\, G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ *je subbáze topologie* $\mathcal{G}$.
2. *Zobrazení topologického prostoru* Z *do* $(X, \mathcal{G})$ *je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor* $(X_a, \mathcal{G}_a)$ *součinem prostorů* $T_{a,i}$, $i \in I_a$, *je* $(X, \mathcal{G})$ *součinem prostorů* $T_{a,i}$, $a \in A, i \in I_a$.

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, *je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení* $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ *je slabě vytvářející.*

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\,\mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je součin topologických prostorů $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G);\, G \in \mathcal{G}_a,\, a \in A\}$ *je subbáze topologie $\mathcal{G}$.*
2. *Zobrazení topologického prostoru Z do $(X, \mathcal{G})$ je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi pr_a.*
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{G}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X, \mathcal{G})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

Z definice součinu a z věty o skládání slabého vytváření nyní snadno vyplyne následující popis slabého vytváření pomocí součinu a slabé topologie vytvořené jediným zobrazením.

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ je slabě vytvářející.

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je součin topologických prostorů $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G);\, G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ *je subbáze topologie* $\mathcal{G}$.
2. *Zobrazení topologického prostoru Z do $(X, \mathcal{G})$ je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{G}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X, \mathcal{G})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ je slabě vytvářející.

DEFINICE (Součin topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ se nazývá součinem topologických prostorů $(X_a\,, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součinu)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je součin topologických prostorů $(X_a, \mathcal{G}_a)$.

1. $\{\mathrm{pr}_a^{-1}(G);\, G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ *je subbáze topologie* $\mathcal{G}$.
2. *Zobrazení topologického prostoru Z do $(X, \mathcal{G})$ je spojité právě když jsou spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{G}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X, \mathcal{G})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, je soubor spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ je slabě vytvářející.

V případě, že zobrazení Δf_a z předchozí věty je prosté, je toto zobrazení vnořením (pokud je uvedený soubor slabě vytvářející).

Později uvidíme, jak je důležité vnoření prostorů do součinu. Na základě předchozích tvrzení můžeme už nyní vnoření do součinu popsat. Použije-li se nyní popis topologií slabých vytváření, dostane se následující důležitá věta.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \ldots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \dots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

Topologický prostor X lze vnořit do mocniny prostoru Y, jestliže množina $C(X, Y)$ spojitých zobrazení X do Y rozlišuje body X a (silně) rozlišuje body a uzavřené množiny v X.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

▸ Důkaz ▸ Příklady

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X **odděluje body** množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X **odděluje body a uzavřené množiny** v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \dots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ **silně** odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

Topologický prostor X lze vnořit do mocniny prostoru Y, jestliže množina $C(X, Y)$ spojitých zobrazení X do

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

Vlastnosti použité v předchozí větě se používají celkem často a mají proto svůj název.

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, ..., f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, ..., G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \dots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.

Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

Topologický prostor X lze vnořit do mocniny prostoru Y, jestliže množina $C(X, Y)$ spojitých zobrazení X do Y rozlišuje body X a (silně) rozlišuje body a uzavřené množiny v X.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \ldots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.

Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

Topologický prostor X lze vnořit do mocniny prostoru Y, jestliže množina $C(X, Y)$ spojitých zobrazení X do Y rozlišuje body X a (silně) rozlišuje body a uzavřené množiny v X.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \ldots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

Topologický prostor X lze vnořit do mocniny prostoru Y, jestliže množina $C(X, Y)$ spojitých zobrazení X do Y rozlišuje body X a (silně) rozlišuje body a uzavřené množiny v X.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}$, $i \leq n$, a otevřené množiny G_i v Y_{a_i}, $i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i$, $i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \ldots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i$, $i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

Nejdůležitější aplikací předchozí věty je vnoření prostoru X do mocniny nějakého prostoru Y, tj. $X \hookrightarrow Y^A$. Pomocí předchozích pojmů lze postačující podmínku napsat jednoduše.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

DEFINICE (Oddělování bodů a množin)

Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na množině X odděluje body množiny X, jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje zobrazení $f \in \mathcal{C}$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Řekneme, že soustava zobrazení $\mathcal{C}$ na topologickém prostoru X odděluje body a uzavřené množiny v X, jestliže pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho zobrazení $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}$ a otevřené množiny $G_1, \dots, G_n$ v jejich oborech hodnot tak, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.
Pokud v předchozí definici vždy stačí volit $n = 1$, říkáme, že $\mathcal{C}$ silně odděluje body a uzavřené množiny.

DŮSLEDEK (Vnoření do mocniny)

Topologický prostor X lze vnořit do mocniny prostoru Y, jestliže množina $C(X, Y)$ spojitých zobrazení X do Y rozlišuje body X a (silně) rozlišuje body a uzavřené množiny v X.

Z jistého hlediska duální je silné vytváření topologií. Dualita zde znamená „otáčení šipek”, tj. směru zobrazení. Nebudeme pro tento případ opakovat různé podrobnosti a dokazovat všechna tvrzení. Např. důkaz následujícího tvrzení je „duální” k důkazu existence slabé topologie.

TVRZENÍ (Silná topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$ jsou spojitá.

Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá silná topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G}), a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak silná topologie na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{G \subset X; f_a^{-1}(G) \in \mathcal{G}_a, \forall a \in A\} .$$

TVRZENÍ (Silná topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$ jsou spojitá.

▸ Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá silná topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$, $a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak silná topologie na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{G \subset X; f_a^{-1}(G) \in \mathcal{G}_a, \forall a \in A\}.$$

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Silná topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$ jsou spojitá.

▸ Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá silná topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$, $a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak silná topologie na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{G \subset X; f_a^{-1}(G) \in \mathcal{G}_a, \forall a \in A\}.$$

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Silná topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$ jsou spojitá.

Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá silná topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X$, $a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$, $a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

Popis silné topologie nelze odvodit z části o slabých topologií. Je to specifický popis pro topologie a na rozdíl od ostatních tvrzení je ho nutné ukázat zvlášť.

TVRZENÍ (Popis silné topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak silná topologie na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X$, $a \in A$ je rovna

$$\{G \subset X; f_a^{-1}(G) \in \mathcal{G}_a, \forall a \in A\}.$$

Důkaz

TVRZENÍ (Silná topologie)

Nechť X *je množina,* $\{Y_a\}_A$ *je soustava topologických prostorů a pro každé* $a \in A$ *je dáno zobrazení* $f_a : Y_a \to X$*. Pak existuje nejjemnější topologie* $\mathcal{G}$ *na* X *taková, že všechna zobrazení* $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$ *jsou spojitá.*

Důkaz

DEFINICE

Topologie $\mathcal{G}$ z předchozí věty se nazývá silná topologie vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$, $a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ *topologie prostorů* Y_a*, pak silná topologie na* X *vytvořená souborem* $f_a : Y_a \to X, a \in A$ *je rovna*

$$\{G \subset X; f_a^{-1}(G) \in \mathcal{G}_a, \forall a \in A\}.$$

Důkaz

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace silné topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *spojitých zobrazení:*

1. *Topologický prostor* X *je silně vytvořen souborem* $f_a : Y_a \to X, a \in A$.
2. *Je-li* Z *topologický prostor a* $g : X \to Z$, *pak* g *je spojité právě když každé složení* $g\, f_a$, $a \in A$, *je spojité.*

TVRZENÍ (Skládání silných vytváření)

Nechť $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Z_{a,i} \to Y_a\}_{I_a}$, $a \in A$, *jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:*

1. *Je-li soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : Z_{a,i} \to X; a \in A, i \in I_a\}$ *silně vytvářející, je i soubor* $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *silně vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory* $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Z_{a,i} \to Y_a\}_{I_a}$, $a \in A$, *silně vytvářející, je i soubor* $\{f_a\, g_{a,i} : Z_{a,i} \to X; a \in A, i \in I_a\}$ *silně vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace silné topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *spojitých zobrazení:*

1. *Topologický prostor* X *je silně vytvořen souborem* $f_a : Y_a \to X, a \in A$.
2. *Je-li* Z *topologický prostor a* $g : X \to Z$*, pak* g *je spojité právě když každé složení* $g\, f_a, a \in A$*, je spojité.*

TVRZENÍ (Skládání silných vytváření)

Nechť $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Z_{a,i} \to Y_a\}_{I_a}, a \in A$*, jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:*

1. *Je-li soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : Z_{a,i} \to X; a \in A, i \in I_a\}$ *silně vytvářející, je i soubor* $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *silně vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory* $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Z_{a,i} \to Y_a\}_{I_a}, a \in A$*, silně vytvářející, je i soubor* $\{f_a\, g_{a,i} : Z_{a,i} \to X; a \in A, i \in I_a\}$ *silně vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace silné topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *spojitých zobrazení:*

1. *Topologický prostor* X *je silně vytvořen souborem* $f_a : Y_a \to X, a \in A$.
2. *Je-li* Z *topologický prostor a* $g : X \to Z$*, pak* g *je spojité právě když každé složení* $g\, f_a, a \in A$*, je spojité.*

TVRZENÍ (Skládání silných vytváření)

Nechť $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Z_{a,i} \to Y_a\}_{I_a}, a \in A$*, jsou soubory spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Pak platí:*

1. *Je-li soubor* $\{g_{a,i}\, f_a : Z_{a,i} \to X; a \in A, i \in I_a\}$ *silně vytvářející, je i soubor* $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *silně vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory* $\{f_a : Y_a \to X\}_A$ *a* $\{g_{a,i} : Z_{a,i} \to Y_a\}_{I_a}, a \in A$*, silně vytvářející, je i soubor* $\{f_a\, g_{a,i} : Z_{a,i} \to X; a \in A, i \in I_a\}$ *silně vytvářející.*

Budeme nyní dualizovat aplikace slabého vytváření na silné vytváření. Duální k prostému zobrazení je zobrazení na. Duálním pojmem k vnoření bude tzv. kvocient.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

U slabých topologií jsme rozlišovali podprostor a vnořený prostor. Vnořeném prostoru odpovídá pojem kvocientu, podprostoru by odpovídal speciální případ, kdy je kvocientové zobrazení f dáno nějakou ekvivalencí na X (f přiřazuje prvku x množinu všech prvků ekvivalentních s x). Tyto případy se však nerozlišují.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Příklady

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Kvocient)

Nechť $(X, \mathcal{G})$ je topologický prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Topologický prostor $(Y, \mathcal{H})$ silně vytvořený zobrazením $f : (X, \mathcal{G}) \to Y$ se nazývá kvocient topologického prostoru $(X, \mathcal{G})$ podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

TVRZENÍ (Vlastnosti kvocientu)

Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení f. Potom

1. *$G \subset Y$ je otevřená (nebo uzavřená) podmnožina Y právě když $f^{-1}(G)$ je otevřenou (resp. uzavřenou) podmnožinou X.*
2. *Zobrazení z Y do topologického prostoru je spojité právě když jeho složení s f je spojité.*
3. *Je-li $g : Y \to Z$ kvocientové zobrazení, je i složení $g\,f : X \to Z$ kvocientové.*

Předchozí popis topologie je jednoduchý, ale není vždy snadné ho používat. Existují dva speciální případy, kdy lze s kvocientem pracovat snadněji. Spojitost zobrazení je definováno zachováváním otevřených nebo uzavřených množin vzory. Je vhodnou vlastností zachovávání otevřených nebo uzavřených množin obrazy? Uvidíme, že ano.

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

▸ Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

▸ Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

DEFINICE (Otevřené a uzavřené zobrazení)

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi topologickými prostory se nazývá otevřené (nebo uzavřené), jestliže obraz každé otevřené (resp. uzavřené) množiny v X je otevřený (resp. uzavřený) v podprostoru $f(X)$ prostoru Y.

Příklady

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz

Duální pojem (opět pomocí obrácení šipek zobrazení) k součinu množin je jejich součet. Není tak důležitý jako součin, ale někdy se hodí při konstrukci příkladů nebo k popisu topologií. Nebudeme v tomto případě uvádět podrobně všechny vlastnosti součtu, uvidíte, že se jedná o velmi jednoduchou konstrukci.

DEFINICE (Součet topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : (X_a, \mathcal{G}_a) \to X\}_A$ se nazývá součtem topologických prostorů $(X_a\, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součtu)

Nechť X je součtem prostorů X_a, $a \in A$. Podmnožina prostoru X je otevřená (nebo uzavřená) právě když její průnik s každou množinou X_a je otevřený (resp. uzavřený) v prostoru X_a.

Z uvedeného popisu mimo jiné vyplývá, že každý X_a je obojetným podprostorem v X.

DEFINICE (Součet topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a\,,\mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Topologický prostor $(X,\mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : (X_a,\mathcal{G}_a) \to X\}_A$ se nazývá součtem topologických prostorů $(X_a\,\mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součtu)

Nechť X je součtem prostorů X_a, $a \in A$. Podmnožina prostoru X je otevřená (nebo uzavřená) právě když její průnik s každou množinou X_a je otevřený (resp. uzavřený) v prostoru X_a.

Z uvedeného popisu mimo jiné vyplývá, že každý X_a je obojetným podprostorem v X.

DEFINICE (Součet topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : (X_a, \mathcal{G}_a) \to X\}_A$ se nazývá součtem topologických prostorů $(X_a\, \mathcal{G}_a)$.

Nyní by se daly napsat věty obdobné těm z části pro slabé topologie. Doporučujeme čtenáři tyto věty alespoň zformulovat. My tu uvedeme jen popis topologie součtu prostorů, jehož důkaz plyne ihned z popisu silné topologie použité na tento speciální případ.

TVRZENÍ (Popis topologie součtu)

Nechť X je součtem prostorů X_a, $a \in A$. Podmnožina prostoru X je otevřená (nebo uzavřená) právě když její průnik s každou množinou X_a je otevřený (resp. uzavřený) v prostoru X_a.

Z uvedeného popisu mimo jiné vyplývá, že každý X_a je obojetným podprostorem v X.

DEFINICE (Součet topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : (X_a, \mathcal{G}_a) \to X\}_A$ se nazývá součtem topologických prostorů $(X_a\, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součtu)

Nechť X je součtem prostorů X_a, $a \in A$. Podmnožina prostoru X je otevřená (nebo uzavřená) právě když její průnik s každou množinou X_a je otevřený (resp. uzavřený) v prostoru X_a.

Z uvedeného popisu mimo jiné vyplývá, že každý X_a je obojetným podprostorem v X.

DEFINICE (Součet topologických prostorů)

Nechť $\{(X_a, \mathcal{G}_a)\}_A$ je soubor topologických prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : (X_a, \mathcal{G}_a) \to X\}_A$ se nazývá součtem topologických prostorů $(X_a\, \mathcal{G}_a)$.

TVRZENÍ (Popis topologie součtu)

Nechť X je součtem prostorů X_a, $a \in A$. Podmnožina prostoru X je otevřená (nebo uzavřená) právě když její průnik s každou množinou X_a je otevřený (resp. uzavřený) v prostoru X_a.

Z uvedeného popisu mimo jiné vyplývá, že každý X_a je obojetným podprostorem v X.

Součiny množin byly sice definovány jako množiny jistých zobrazení, ale většinou jsou chápány jako množiny jistých souborů bodů. V případě mocnin množin je však vhodnější je chápat jako funkce. Je-li tedy pro každé $a \in A$ množina X_a rovna množině Y, nebudeme psát $\Pi_A Y$, ale Y^A. Tato mocnina je tedy množinou všech zobrazení $A \to Y$. V případě, že obě množiny A, Y mají nějakou strukturu, např. grupovou nebo topologickou, používají se často podmnožiny Y^A složené v těchto dvou případech z homomorfizmů nebo ze spojitých zobrazení. Nás bude samozřejmě zajímat druhý případ.

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory. $C(X,Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X,Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X,Y)$.
Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$.
Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

S uvedenými vlastnostmi jsou $C(X)$ a $C^*(X)$ algebra a svaz.

Důkaz

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X,Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X,Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X,Y)$.
Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

S uvedenými vlastnostmi jsou $C(X)$ a $C^*(X)$ algebra a svaz.

Důkaz

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$. Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

Index p v $C_p(X, Y)$ pochází z anglického slova „pointwise”, protože topologie mocniny se někdy nazývá *topologie bodové konvergence* – viz popis této topologie pomocí konvergence. Později budou zavedeny další topologie na množinách zobrazení.

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$. Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

Množiny Y^X a $C(X, Y)$ dědí z Y různé vlastnosti, např. algebraické operace a uspořádání. Pro $C(X, Y)$ je však nutné ukázat, že výsledkem operace na spojité funkce je opět spojitá funkce. Nyní uvedeme příslušné dědění jen pro reálné funkce.

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \le g$ jestliže $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$. Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

S uvedenými vlastnostmi jsou $C(X)$ a $C^*(X)$ algebra a svaz.

Důkaz

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$.
Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

Je-li f konstantní funkce s hodnotou r, píše se $r.g$ místo $f.g$ a máme tedy násobení funkcí reálnými čísly.
S těmito operacemi se mohou zdědit i některé algebraické vlastnosti, ale nemusí. Důkaz následujícího tvrzení je jednoduchý.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X,Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X,Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X,Y)$. Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C^*_p(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

S uvedenými vlastnostmi jsou $C(X)$ a $C^*(X)$ algebra a svaz.

Důkaz

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$. Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

Pro stejné tvrzení o $C(X)$ je nutné ukázat, že $C(X)$ je invariantní vůči použitým operacím.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

DEFINICE (Množiny spojitých zobrazení)

Nechť X, Y jsou topologické prostory, $C(X, Y)$ značí podmnožinu mocniny Y^X složenou ze všech spojitých zobrazení. Jestliže se $C(X, Y)$ chápe i jako podprostor součinu Y^X, značí se $C_p(X, Y)$. Je-li $Y = \mathbb{R}$, vynechává se Y v uvedeném označení. Hvězdičkou se v tomto případě označují příslušné omezené funkce (např. $C_p^*(X)$ je množina všech omezených spojitých reálných funkcí na X s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^X$).

DEFINICE (Algebraické operace a uspořádání na $\mathbb{R}^X$)

Na $\mathbb{R}^X$ definujeme sčítání, násobení a uspořádání bodově:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- $(f.g)(x) = f(x).g(x)$;
- $f \leq g$ jestliže $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in X$.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $\mathbb{R}^X$)

S uvedenými vlastnostmi je $\mathbb{R}^X$ algebra a svaz.

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

S uvedenými vlastnostmi jsou $C(X)$ a $C^*(X)$ algebra a svaz.

Důkaz