2. KONSTRUKCE

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Kolik je topologií na dané množině? O

Odpověď na tuto otázku není složitá pro nekonečné množiny a pro množiny s nejvýše dvěma body. Ve cvičeních jsou uvedeny počty topologií pro nejvýše dvoubodové množiny. Už není tak snadné zjistit, že na 3-bodové množině je přesně 29 topologií a na 4-bodové je jich 355. V této chvíli je znám počet topologií na konečných množinách majících nejvýš 18 bodů. Pro 18 bodů je to číslo $10^{35}.2,614\ldots$, pro 10 bodů 8977053873043.

Každá topologie na množině X určuje relaci $\{(x,y); y \in \overline{x}\}$. Tato relace je reflexivní a tranzitivní, ale nemusí mít druhou vlastnost definice uspořádání. Tato druhá vlastnost dává jistou oddělitelnost a není to podstatná vlastnost. Můžeme reflexivní a tranzitivní relaci nazvat pro tuto chvíli částečné uspořádání (terminologie není v této oblasti jednotná).

Protože na konečných množinách je uzávěr každé množiny sjednocením uzávěrů svých bodů, je topologie na těchto množinách určena uzávěry bodů. Topologie na konečné množině X jsou tedy ve vzájemně jednoznačném vztahu s částečnými uspořádáními na X.

Kolik je topologií na dané množině? O

Odpověď na tuto otázku není složitá pro nekonečné množiny a pro množiny s nejvýše dvěma body. Ve cvičeních jsou uvedeny počty topologií pro nejvýše dvoubodové množiny. Už není tak snadné zjistit, že na 3-bodové množině je přesně 29 topologií a na 4-bodové je jich 355. V této chvíli je znám počet topologií na konečných množinách majících nejvýš 18 bodů. Pro 18 bodů je to číslo $10^{35}.2,614\ldots$, pro 10 bodů 8977053873043.

Každá topologie na množině X určuje relaci $\{(x,y); y \in \overline{x}\}$. Tato relace je reflexivní a tranzitivní, ale nemusí mít druhou vlastnost definice uspořádání. Tato druhá vlastnost dává jistou oddělitelnost a není to podstatná vlastnost. Můžeme reflexivní a tranzitivní relaci nazvat pro tuto chvíli částečné uspořádání (terminologie není v této oblasti jednotná).

Protože na konečných množinách je uzávěr každé množiny sjednocením uzávěrů svých bodů, je topologie na těchto množinách určena uzávěry bodů. Topologie na konečné množině X jsou tedy ve vzájemně jednoznačném vztahu s částečnými uspořádáními na X.

Kolik je topologií na dané množině? O

Odpověď na tuto otázku není složitá pro nekonečné množiny a pro množiny s nejvýše dvěma body. Ve cvičeních jsou uvedeny počty topologií pro nejvýše dvoubodové množiny. Už není tak snadné zjistit, že na 3-bodové množině je přesně 29 topologií a na 4-bodové je jich 355. V této chvíli je znám počet topologií na konečných množinách majících nejvýš 18 bodů. Pro 18 bodů je to číslo $10^{35}.2,614\ldots$, pro 10 bodů 8977053873043.

Každá topologie na množině X určuje relaci $\{(x,y); y \in \overline{x}\}$. Tato relace je reflexivní a tranzitivní, ale nemusí mít druhou vlastnost definice uspořádání. Tato druhá vlastnost dává jistou oddělitelnost a není to podstatná vlastnost. Můžeme reflexivní a tranzitivní relaci nazvat pro tuto chvíli částečné uspořádání (terminologie není v této oblasti jednotná).

Protože na konečných množinách je uzávěr každé množiny sjednocením uzávěrů svých bodů, je topologie na těchto množinách určena uzávěry bodů. Topologie na konečné množině X jsou tedy ve vzájemně jednoznačném vztahu s částečnými uspořádáními na X.

Kolik je topologií na dané množině? O

Odpověď na tuto otázku není složitá pro nekonečné množiny a pro množiny s nejvýše dvěma body. Ve cvičeních jsou uvedeny počty topologií pro nejvýše dvoubodové množiny. Už není tak snadné zjistit, že na 3-bodové množině je přesně 29 topologií a na 4-bodové je jich 355. V této chvíli je znám počet topologií na konečných množinách majících nejvýš 18 bodů. Pro 18 bodů je to číslo $10^{35}.2,614\ldots$, pro 10 bodů 8977053873043.

Každá topologie na množině X určuje relaci $\{(x,y); y \in \overline{x}\}$. Tato relace je reflexivní a tranzitivní, ale nemusí mít druhou vlastnost definice uspořádání. Tato druhá vlastnost dává jistou oddělitelnost a není to podstatná vlastnost. Můžeme reflexivní a tranzitivní relaci nazvat pro tuto chvíli částečné uspořádání (terminologie není v této oblasti jednotná).

Protože na konečných množinách je uzávěr každé množiny sjednocením uzávěrů svých bodů, je topologie na těchto množinách určena uzávěry bodů. Topologie na konečné množině X jsou tedy ve vzájemně jednoznačném vztahu s částečnými uspořádáními na X.

Nejdříve pro úplnost zformulujeme definici svazu a některé jeho vlastnosti. Vybrali jsme dva pohledy na svazy: jako speciální pologrupy nebo uspořádané prostory.

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup, \wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup$, $\wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

Z této definice není zcela dobře vidět smysl obou operací. Lépe jsou vidět z ekvivalentní definice pomocí uspořádání:

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup$, $\wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy
$x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup$, $\wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Připomeňme, že v uspořádané množině X je $\sup A$ (pro $A \subset X$) nejmenší horní mez množiny A. Duálně je $\inf A$ největší dolní mez množiny A.
Tedy $z = \sup A$ právě když $z \geq a$ pro každé $a \in A$ a z je nejmenší s touto vlastností (tj., pokud $u \not\geq z$, pak existuje $a \in A$ tak, že $u \not\geq a$). Supremum a infimum jsou tedy určena jednoznačně. Např. v uspořádaném prostoru $(\exp X, \subset)$ je $\sup\{P_a\}_A = \bigcup_A P_a, \inf\{P_a\}_A = \bigcap_A P_a$.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup, \wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy
$x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup$, $\wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup, \wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup, \wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup, \wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.
V našem případě topologií bude mít svaz ještě tzv. distributivní vlastnost:
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy
$x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup, \wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

DEFINICE (Svaz jako pologrupy)

Svaz je množina (označme ji X) se dvěma binárními operacemi (tj. zobrazeními $X \times X \to X$), označovanými jako $\vee$, $\wedge$, které jsou komutativní a asociativní, a navzájem jsou spojeny vztahy
$x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$.
Operace $\vee$ se často nazývá spojení a operace $\wedge$ průsek.

DEFINICE (Svaz jako uspořádaný prostor)

Svaz je uspořádaná množina, kde každé dva body mají supremum a infimum.

Jak se přejde od jedné definice ke druhé?

Z druhé definice svazu plyne první dosazením $\vee = \sup$, $\wedge = \inf$.
Z první definice plyne druhá definováním $x \leq y$, jestliže $x \wedge y = x$.

DEFINICE (Úplný svaz)

Svaz se nazývá úplný, jestliže každá jeho podmnožina má supremum a infimum.

V předchozí definici stačí požadovat existenci jen suprema nebo jen infima (uvědomte si, že např. supremum prázdné množiny je nejmenší prvek a supremum celé množiny je největší prvek svazu).

Vytváření slabých topologií bylo definováno jen pro soubory zobrazení, tedy pro množinově mnoho zobrazení. Snadno nahlédnete, že definice slabého vytváření má smysl a je stejná i pro vlastní třídy zobrazení. Důvodem je skutečnost, že topologií na dané množině je množinově mnoho.

Pro slabé vytváření a slabé topologie se používají v literatuře i jiné termíny. Hodně používaný termín je *initial topology* nebo *projectively generated topology*. Dali jsme přednost slovu *slabá topologie*, protože je tento termín vžitý ve funkcionální analýze. Vznikl z toho, že vzniklá topologie pomocí spojitých zobrazení je obvykle slabší než ta původní. Slabé topologie hrají ve funkcionální analýze velkou roli.
V našem případě by však vhodnější termín byl *jemné vytváření, jemná topologie*.

Vytváření slabých topologií bylo definováno jen pro soubory zobrazení, tedy pro množinově mnoho zobrazení. Snadno nahlédnete, že definice slabého vytváření má smysl a je stejná i pro vlastní třídy zobrazení. Důvodem je skutečnost, že topologií na dané množině je množinově mnoho.

Pro slabé vytváření a slabé topologie se používají v literatuře i jiné termíny. Hodně používaný termín je *initial topology* nebo *projectively generated topology*. Dali jsme přednost slovu *slabá topologie*, protože je tento termín vžitý ve funkcionální analýze. Vznikl z toho, že vzniklá topologie pomocí spojitých zobrazení je obvykle slabší než ta původní. Slabé topologie hrají ve funkcionální analýze velkou roli.
V našem případě by však vhodnější termín byl *jemné vytváření, jemná topologie*.

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\Pi_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\Pi_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\Pi_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.
Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\Pi_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : Z \to X_a\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to X$ takové, že $p_a f = f_a$ pro každé $a \in A$.
Pak existuje prosté zobrazení p množiny X na součin $\Pi_A X_a$ tak, že $\mathrm{pr}_a p = p_a$ pro každé $a \in A$.

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\Pi_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\Pi_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\Pi_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.
Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\Pi_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : Z \to X_a\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to X$ takové, že $p_a f = f_a$ pro každé $a \in A$.
Pak existuje prosté zobrazení p množiny X na součin $\Pi_A X_a$ tak, že $\mathrm{pr}_a p = p_a$ pro každé $a \in A$.

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\prod_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\prod_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\prod_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.

Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\prod_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \prod_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \prod_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : Z \to X_a\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to X$ takové, že $p_a f = f_a$ pro každé $a \in A$.
Pak existuje prosté zobrazení p množiny X na součin $\prod_A X_a$ tak, že $\mathrm{pr}_a p = p_a$ pro každé $a \in A$.

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\prod_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\prod_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\prod_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.
Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\prod_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \prod_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \prod_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : Z \to X_a\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to X$ takové, že $p_a f = f_a$ pro každé $a \in A$.
Pak existuje prosté zobrazení p množiny X na součin $\prod_A X_a$ tak, že $\mathrm{pr}_a p = p_a$ pro každé $a \in A$.

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\Pi_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\Pi_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\Pi_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.
Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\Pi_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : Z \to X_a\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to X$ takové, že $p_a f = f_a$ pro každé $a \in A$.
Pak existuje prosté zobrazení p množiny X na součin $\Pi_A X_a$ tak, že $\mathrm{pr}_a p = p_a$ pro každé $a \in A$.

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\Pi_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\Pi_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\Pi_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.
Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\Pi_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \Pi_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

Uvedeným vztahem mezi f a $\{f_a : X \to X_a\}_A$ je součin $\Pi_A X_a$ v jistém smyslu určen. Dostává se tak bezbodová definice součinu množin a náš kartézský součin množin je vlastně reprezentace třídy všech množin z následující definice.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:

DEFINICE (Kartézský součin množin)

Kartézský součin $\prod_A X_a$ množin X_a, $a \in A$, je množina funkcí $A \to \bigcup_A X_a$, jejichž hodnoty v bodě a leží v X_a, pro libovolné $a \in A$.

Podobně jako u posloupností je vhodné takovou funkci f popsat jako soubor $\{x_a\}_A$ kde $x_a = f(a)$. Pak se dá součin $\prod_A X_a$ chápat jako množina souborů $\{x_a\}_A$, kde $x_a \in X_a$.

Součin $\prod_A X_a$ je prázdný právě když existuje $a \in A$ tak, že $X_a = \emptyset$. Toto tvrzení je ekvivalentní s axiomem výběru. Uvědomte si, že součin přes prázdnou indexovou množinu je jednoprvková množina.
Pro $b \in A$ označíme pr_b projekci $\prod_A X_a$ do X_b, tj. zobrazení, které souboru $\{x_a\}_A$ přiřadí bod x_b.
Každé zobrazení $f : X \to \prod_A X_a$ určuje soustavu zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ danou složením s projekcemi: $f_a = \mathrm{pr}_a f$. Naopak, každá soustava zobrazení $\{f_a : X \to X_a\}_A$ určuje jednoznačně zobrazení $f : X \to \prod_A X_a$ takové, že $\mathrm{pr}_a f = f_a$ pro každé $a \in A$. Takto určené zobrazení f se značí $\Delta_A f_a$ a někdy nazývá diagonální součin zobrazení. Zřejmě je $f(x) = \{f_a(x)\}_A$.

TVRZENÍ (Bezbodová definice součinu množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X \to X_a\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : Z \to X_a\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to X$ takové, že $p_a f = f_a$ pro každé $a \in A$.
Pak existuje prosté zobrazení p množiny X na součin $\prod_A X_a$ tak, že $\mathrm{pr}_a p = p_a$ pro každé $a \in A$.

Je dobré si uvědomit, že každá množina X_b (pro $b \in A$) se dá přirozeně vložit do neprázdného součinu $\Pi_A X_a$ na množinu $\{\{x_a\} \in \Pi_A X_a; x_a = z_a \text{ pro } a \neq b\}$, kde $\{z_a\}$ je libovolný bod součinu $\Pi_A X_a$ (kde potřebujeme, že všechny množiny X_a jsou neprázdné?).

Zdá se, že popis součinů množin závisí na pořadí (např., když $A = \mathbb{N}$). Předchozí bezbodová definice součinu ukazuje, že na pořadí nezáleží. Je-li např. p permutace množiny $\mathbb{N}$, pak existuje přirozené prosté zobrazení součinu $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots$ na množinu $X_{p(1)} \times X_{p(2)} \times X_{p(3)} \times \ldots$, podobně jako je tomu u součinů $X \times Y$ a $Y \times X$.

V jistém smyslu jsou tedy součiny komutativní. Stejně lehce lze ukázat, že jsou i asociativní (např. $(X \times Y) \times Z$ a $X \times (Y \times Z)$ jsou *isomorfní* množiny).

Je dobré si uvědomit, že každá množina X_b (pro $b \in A$) se dá přirozeně vložit do neprázdného součinu $\Pi_A X_a$ na množinu $\{\{x_a\} \in \Pi_A X_a; x_a = z_a$ pro $a \neq b\}$, kde $\{z_a\}$ je libovolný bod součinu $\Pi_A X_a$ (kde potřebujeme, že všechny množiny X_a jsou neprázdné?).

Zdá se, že popis součinů množin závisí na pořadí (např., když $A = \mathbb{N}$). Předchozí bezbodová definice součinu ukazuje, že na pořadí nezáleží. Je-li např. p permutace množiny $\mathbb{N}$, pak existuje přirozené prosté zobrazení součinu $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots$ na množinu $X_{p(1)} \times X_{p(2)} \times X_{p(3)} \times \ldots$, podobně jako je tomu u součinů $X \times Y$ a $Y \times X$.

V jistém smyslu jsou tedy součiny komutativní. Stejně lehce lze ukázat, že jsou i asociativní (např. $(X \times Y) \times Z$ a $X \times (Y \times Z)$ jsou *isomorfní* množiny).

Je dobré si uvědomit, že každá množina X_b (pro $b \in A$) se dá přirozeně vložit do neprázdného součinu $\Pi_A X_a$ na množinu $\{\{x_a\} \in \Pi_A X_a; x_a = z_a$ pro $a \neq b\}$, kde $\{z_a\}$ je libovolný bod součinu $\Pi_A X_a$ (kde potřebujeme, že všechny množiny X_a jsou neprázdné?).

Zdá se, že popis součinů množin závisí na pořadí (např., když $A = \mathbb{N}$). Předchozí bezbodová definice součinu ukazuje, že na pořadí nezáleží. Je-li např. p permutace množiny $\mathbb{N}$, pak existuje přirozené prosté zobrazení součinu $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots$ na množinu $X_{p(1)} \times X_{p(2)} \times X_{p(3)} \times \ldots$, podobně jako je tomu u součinů $X \times Y$ a $Y \times X$.

V jistém smyslu jsou tedy součiny komutativní. Stejně lehce lze ukázat, že jsou i asociativní (např. $(X \times Y) \times Z$ a $X \times (Y \times Z)$ jsou *isomorfní* množiny).

Pro silné vytváření a topologie se používají v literatuře i jiné termíny. Hodně používaný termín je *final topology* nebo *inductively generated topology*.

Silné topologie se (oproti slabé topologii) ve funkcionální analýze tolik nepoužívají. Protože jsme zvolili termín *slabá topologie*, museli jsme pro duální termín zvolit termín *silná topologie*.

Pro silné vytváření a topologie se používají v literatuře i jiné termíny. Hodně používaný termín je *final topology* nebo *inductively generated topology*.

Silné topologie se (oproti slabé topologii) ve funkcionální analýze tolik nepoužívají. Protože jsme zvolili termín *slabá topologie*, museli jsme pro duální termín zvolit termín *silná topologie*.

Nemusí být zcela jasné, co se dostane, když se v charakterizaci součinu množin v jistém smyslu otočí šipky zobrazení, tj. zamění se u všech zobrazení definiční obor a obor hodnot. Po této úpravě bude vlastnost vypadat následovně:

DEFINICE (Součet množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X_a \to X\}_A$ s následující vlastností:

Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : X_a \to Z\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : X \to Z$ takové, že $fp_a = f_a$ pro každé $a \in A$.

Množina X se pak nazývá součet množin X_a, $a \in A$.

Jakou vhodnou množinou lze reprezentovat vlastní třídu součtů daných množin? Nejlepší popis je jako disjunktní sjednocení množin X_a, např. jako množinu $\{(a, x_a); a \in A, x_a \in X_a\}$. Zobrazení p_a se nazývají injekce a značí inj_a. V uvedené reprezentaci jsou popsány rovností $\mathrm{inj}_a(x) = (a, x)$.

Při této reprezentaci nebudou množiny X_a podmnožinami součtu, ale lze je ztotožnit s jejich kopiemi $\{a\} \times X_a$. V dalším textu budeme v tomto smyslu hovořit o X_a jako o podmnožinách jejich součtu.

DEFINICE (Součet množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X_a \to X\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : X_a \to Z\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : X \to Z$ takové, že $fp_a = f_a$ pro každé $a \in A$.
Množina X se pak nazývá součet množin X_a, $a \in A$.

Jakou vhodnou množinou lze reprezentovat vlastní třídu součtů daných množin? Nejlepší popis je jako disjunktní sjednocení množin X_a, např. jako množinu $\{(a, x_a); a \in A, x_a \in X_a\}$. Zobrazení p_a se nazývají injekce a značí inj_a. V uvedené reprezentaci jsou popsány rovností $\mathrm{inj}_a(x) = (a, x)$.

Při této reprezentaci nebudou množiny X_a podmnožinami součtu, ale lze je ztotožnit s jejich kopiemi $\{a\} \times X_a$. V dalším textu budeme v tomto smyslu hovořit o X_a jako o podmnožinách jejich součtu.

DEFINICE (Součet množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X_a \to X\}_A$ s následující vlastností:
Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : X_a \to Z\}_A$ existuje jediné zobrazení $f : X \to Z$ takové, že $fp_a = f_a$ pro každé $a \in A$.
Množina X se pak nazývá součet množin X_a, $a \in A$.

Jakou vhodnou množinou lze reprezentovat vlastní třídu součtů daných množin? Nejlepší popis je jako disjunktní sjednocení množin X_a, např. jako množinu $\{(a, x_a); a \in A, x_a \in X_a\}$. Zobrazení p_a se nazývají injekce a značí inj_a. V uvedené reprezentaci jsou popsány rovností $\mathrm{inj}_a(x) = (a, x)$.

Při této reprezentaci nebudou množiny X_a podmnožinami součtu, ale lze je ztotožnit s jejich kopiemi $\{a\} \times X_a$. V dalším textu budeme v tomto smyslu hovořit o X_a jako o podmnožinách jejich součtu.

DEFINICE (Součet množin)

Nechť je dán soubor množin $\{X_a\}_A$, množina X a soubor zobrazení $\{p_a : X_a \to X\}_A$ s následující vlastností:

Pro každý soubor zobrazení $\{f_a : X_a \to Z\}_A$ *existuje jediné zobrazení* $f : X \to Z$ *takové, že* $fp_a = f_a$ *pro každé* $a \in A$.

Množina X se pak nazývá součet množin X_a, $a \in A$.

Jakou vhodnou množinou lze reprezentovat vlastní třídu součtů daných množin? Nejlepší popis je jako disjunktní sjednocení množin X_a, např. jako množinu $\{(a, x_a); a \in A, x_a \in X_a\}$. Zobrazení p_a se nazývají injekce a značí inj_a. V uvedené reprezentaci jsou popsány rovností $\mathrm{inj}_a(x) = (a, x)$.

Při této reprezentaci nebudou množiny X_a podmnožinami součtu, ale lze je ztotožnit s jejich kopiemi $\{a\} \times X_a$. V dalším textu budeme v tomto smyslu hovořit o X_a jako o podmnožinách jejich součtu.

Součty topologických prostorů nejsou tak důležité jako součiny těchto prostorů. Konstrukce součtů a jejich popis je značně jednodušší než u součinů. Navíc uvidíte, že součty zachovávají více vlastností než součiny. Např. součet metrizovatelných prostorů je metrizovatelný prostor, součin těchto prostorů metrizovatelný být nemusí (podobná situace je pro uspořádatelné topologické prostory).

Snadno se ukáže, že součet $\sum_A X_a$ topologických prostorů se dá vnořit do součinu diskrétního prostoru A se součinem prostorů X_a. Jestliže tedy nějaká topologická vlastnost je zachovávána součiny a podprostory a každý diskrétní prostor má tuto vlastnost, je tato vlastnost zachovávána i součty.

Součty topologických prostorů nejsou tak důležité jako součiny těchto prostorů. Konstrukce součtů a jejich popis je značně jednodušší než u součinů. Navíc uvidíte, že součty zachovávají více vlastností než součiny. Např. součet metrizovatelných prostorů je metrizovatelný prostor, součin těchto prostorů metrizovatelný být nemusí (podobná situace je pro uspořádatelné topologické prostory).

Snadno se ukáže, že součet $\sum_A X_a$ topologických prostorů se dá vnořit do součinu diskrétního prostoru A se součinem prostorů X_a. Jestliže tedy nějaká topologická vlastnost je zachovávána součiny a podprostory a každý diskrétní prostor má tuto vlastnost, je tato vlastnost zachovávána i součty.

Na rozdíl od součtů patří kvocienty mezi často používané konstrukce. Používají se hodně i jako příklady. Většina topologických vlastností, které budeme probírat, není kvocienty zachovávána. Z dosavadních vlastností je kvocienty zachovávána diskrétnost prostorů a separabilita (ta je však zachovávána i spojitými obrazy, které nemusí být kvocientní).

Stejně jako u slabých topologií lze dokázat, že silné vytváření je ekvivalentní s tvořením součtů a silným vytvářením jediným zobrazením. Protože však silné vytváření jediným zobrazením se dá popsat součtem kvocientu a diskrétního prostoru, je silné vytváření ekvivalentní tvořením součtů a kvocientů. Analogie tohoto tvrzení pro slabé vytváření neplatí. Je tedy vidět, že nelze každé tvrzení pro topologické prostory „dualizovat" – duální tvrzení nemusí platit.

Na rozdíl od součtů patří kvocienty mezi často používané konstrukce. Používají se hodně i jako příklady. Většina topologických vlastností, které budeme probírat, není kvocienty zachovávána. Z dosavadních vlastností je kvocienty zachovávána diskrétnost prostorů a separabilita (ta je však zachovávána i spojitými obrazy, které nemusí být kvocientní).

Stejně jako u slabých topologií lze dokázat, že silné vytváření je ekvivalentní s tvořením součtů a silným vytvářením jediným zobrazením. Protože však silné vytváření jediným zobrazením se dá popsat součtem kvocientu a diskrétního prostoru, je silné vytváření ekvivalentní tvořením součtů a kvocientů. Analogie tohoto tvrzení pro slabé vytváření neplatí. Je tedy vidět, že nelze každé tvrzení pro topologické prostory „dualizovat" – duální tvrzení nemusí platit.

Bireflekce a koreflekce jsou důležité proto, že modifikují daný prostor co nejméně tak, aby náležel do vhodné třídy prostorů a přitom se zachovávala spojitost vhodné třídy zobrazení.

Ve třetí charakteristické vlastnosti koreflektivní třídy lze vynechat slovo „jemnější" pro $\widetilde{X}$ za předpokladu, že $\mathcal{C}$ obsahuje neprázdný prostor.

Zdá se, že v názvech „bireflektivní" a „koreflektivní" není dualita. Pro bireflekci předpona „bi" znamená, že zobrazení $X \to \widetilde{X}$ jsou bijekce (je to zobrazení 1_X). Pak bychom pro koreflekci měli používat termín bikoreflekce. Je to možné, ale není to nutné, protože u koreflekce nemůže jiný případ nastat (jak je vidět z předchozího odstavce), kdežto u bireflekcí uvidíme později, že nelze slovo „hrubší" v definici vynechat.

Bireflekce a koreflekce jsou důležité proto, že modifikují daný prostor co nejméně tak, aby náležel do vhodné třídy prostorů a přitom se zachovávala spojitost vhodné třídy zobrazení.

Ve třetí charakteristické vlastnosti koreflektivní třídy lze vynechat slovo „jemnější" pro $\widetilde{X}$ za předpokladu, že $\mathcal{C}$ obsahuje neprázdný prostor.

Zdá se, že v názvech „bireflektivní" a „koreflektivní" není dualita. Pro bireflekci předpona „bi" znamená, že zobrazení $X \to \widetilde{X}$ jsou bijekce (je to zobrazení 1_X). Pak bychom pro koreflekci měli používat termín bikoreflekce. Je to možné, ale není to nutné, protože u koreflekce nemůže jiný případ nastat (jak je vidět z předchozího odstavce), kdežto u bireflekcí uvidíme později, že nelze slovo „hrubší" v definici vynechat.

Bireflekce a koreflekce jsou důležité proto, že modifikují daný prostor co nejméně tak, aby náležel do vhodné třídy prostorů a přitom se zachovávala spojitost vhodné třídy zobrazení.

Ve třetí charakteristické vlastnosti koreflektivní třídy lze vynechat slovo „jemnější" pro $\widetilde{X}$ za předpokladu, že $\mathcal{C}$ obsahuje neprázdný prostor.

Zdá se, že v názvech „bireflektivní" a „koreflektivní" není dualita. Pro bireflekci předpona „bi" znamená, že zobrazení $X \to \widetilde{X}$ jsou bijekce (je to zobrazení 1_X). Pak bychom pro koreflekci měli používat termín bikoreflekce. Je to možné, ale není to nutné, protože u koreflekce nemůže jiný případ nastat (jak je vidět z předchozího odstavce), kdežto u bireflekcí uvidíme později, že nelze slovo „hrubší" v definici vynechat.

Později budeme probírat i další topologie na prostorech spojitých funkcí, zvláště v kapitole o uniformních prostorech. Nyní je možné se zmínit o metrizovatelné topologii na množině omezených reálných funkcí na množině X vytvořené metrikou $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}$. To je známá topologie stejnoměrné konvergence a množina spojitých omezených funkcí se s touto topologií značí symbolem $C^*_u(X)$, kde index u pochází z anglického „uniform convergence". Tuto topologii zavedeme později i na množině neomezených funkcí.

$\mathbb{R}$ je i obor integrity a těleso. Je však zřejmé, že tyto dvě vlastnosti se mocninami obecně nezachovávají. Kdy bude $\mathbb{R}^X$ nebo $C(X)$ nebo $C^*(X)$ tělesem při zavedených algebraických operacích?

Později budeme probírat i další topologie na prostorech spojitých funkcí, zvláště v kapitole o uniformních prostorech. Nyní je možné se zmínit o metrizovatelné topologii na množině omezených reálných funkcí na množině X vytvořené metrikou $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}$. To je známá topologie stejnoměrné konvergence a množina spojitých omezených funkcí se s touto topologií značí symbolem $C_u^*(X)$, kde index u pochází z anglického „uniform convergence". Tuto topologii zavedeme později i na množině neomezených funkcí.

$\mathbb{R}$ je i obor integrity a těleso. Je však zřejmé, že tyto dvě vlastnosti se mocninami obecně nezachovávají. Kdy bude $\mathbb{R}^X$ nebo $C(X)$ nebo $C^*(X)$ tělesem při zavedených algebraických operacích?