2. KONSTRUKCE

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Množina topologií na X

1. $\mathcal{T}(X)$ je jednobodová množina právě když $|X| \leq 1$.
2. Ukažte, že na dvoubodové množině existují právě 4 topologie. Dvoubodový topologický prostor, který není ani diskrétní ani indiskrétní, se někdy nazývá Sierpińského prostor. Ukažte, že jsou právě dva Sierpińského prostory na $\{0, 1\}$ a že jsou homeomorfní.
3. Ukažte, že supremum obou prostorů Sierpińského je indiskrétní prostor a jejich infimum je diskrétní prostor. (Najděte dvě topologie i na množině $\mathbb{R}$, jejichž supremum je indiskrétní topologie a jejich infimum je diskrétní topologie.)
4. Existuje nekonstantní spojitá funkce Sierpińského prostoru do $\mathbb{R}$?
5. Ukažte, že pro každou otevřenou množinu G v topologickém prostoru X existuje spojité zobrazení X do Sierpińského prostoru S takové, že G je vzor otevřené množiny v S.

Ze dvou Sierpińského topologií na dvoubodové množině $\{0, 1\}$ vybereme tu, která má za otevřenou množinu bod 0. Tento prostor budeme značit symbolem S_2.

Množina topologií na X

1. $\mathcal{T}(X)$ je jednobodová množina právě když $|X| \leq 1$.
2. Ukažte, že na dvoubodové množině existují právě 4 topologie. Dvoubodový topologický prostor, který není ani diskrétní ani indiskrétní, se někdy nazývá Sierpińského prostor. Ukažte, že jsou právě dva Sierpińského prostory na $\{0, 1\}$ a že jsou homeomorfní.
3. Ukažte, že supremum obou prostorů Sierpińského je indiskrétní prostor a jejich infimum je diskrétní prostor. (Najděte dvě topologie i na množině $\mathbb{R}$, jejichž supremum je indiskrétní topologie a jejich infimum je diskrétní topologie.)
4. Existuje nekonstantní spojitá funkce Sierpińského prostoru do $\mathbb{R}$?
5. Ukažte, že pro každou otevřenou množinu G v topologickém prostoru X existuje spojité zobrazení X do Sierpińského prostoru S takové, že G je vzor otevřené množiny v S.

Ze dvou Sierpińského topologií na dvoubodové množině $\{0, 1\}$ vybereme tu, která má za otevřenou množinu bod 0. Tento prostor budeme značit symbolem S_2.

Množina topologií na X

1. $\mathcal{T}(X)$ je jednobodová množina právě když $|X| \leq 1$.
2. Ukažte, že na dvoubodové množině existují právě 4 topologie. Dvoubodový topologický prostor, který není ani diskrétní ani indiskrétní, se někdy nazývá Sierpińského prostor. Ukažte, že jsou právě dva Sierpińského prostory na $\{0, 1\}$ a že jsou homeomorfní.
3. Ukažte, že supremum obou prostorů Sierpińského je indiskrétní prostor a jejich infimum je diskrétní prostor. (Najděte dvě topologie i na množině $\mathbb{R}$, jejichž supremum je indiskrétní topologie a jejich infimum je diskrétní topologie.)
4. Existuje nekonstantní spojitá funkce Sierpińského prostoru do $\mathbb{R}$?
5. Ukažte, že pro každou otevřenou množinu G v topologickém prostoru X existuje spojité zobrazení X do Sierpińského prostoru S takové, že G je vzor otevřené množiny v S.

Ze dvou Sierpińského topologií na dvoubodové množině $\{0, 1\}$ vybereme tu, která má za otevřenou množinu bod 0. Tento prostor budeme značit symbolem S_2.

Množina topologií na X

1. $\mathcal{T}(X)$ je jednobodová množina právě když $|X| \leq 1$.
2. Ukažte, že na dvoubodové množině existují právě 4 topologie. Dvoubodový topologický prostor, který není ani diskrétní ani indiskrétní, se někdy nazývá Sierpińského prostor. Ukažte, že jsou právě dva Sierpińského prostory na $\{0, 1\}$ a že jsou homeomorfní.
3. Ukažte, že supremum obou prostorů Sierpińského je indiskrétní prostor a jejich infimum je diskrétní prostor. (Najděte dvě topologie i na množině $\mathbb{R}$, jejichž supremum je indiskrétní topologie a jejich infimum je diskrétní topologie.)
4. Existuje nekonstantní spojitá funkce Sierpińského prostoru do $\mathbb{R}$?
5. Ukažte, že pro každou otevřenou množinu G v topologickém prostoru X existuje spojité zobrazení X do Sierpińského prostoru S takové, že G je vzor otevřené množiny v S.

Ze dvou Sierpińského topologií na dvoubodové množině $\{0, 1\}$ vybereme tu, která má za otevřenou množinu bod 0. Tento prostor budeme značit symbolem S_2.

Množina topologií na X

1. $\mathcal{T}(X)$ je jednobodová množina právě když $|X| \leq 1$.
2. Ukažte, že na dvoubodové množině existují právě 4 topologie. Dvoubodový topologický prostor, který není ani diskrétní ani indiskrétní, se někdy nazývá Sierpińského prostor. Ukažte, že jsou právě dva Sierpińského prostory na $\{0, 1\}$ a že jsou homeomorfní.
3. Ukažte, že supremum obou prostorů Sierpińského je indiskrétní prostor a jejich infimum je diskrétní prostor. (Najděte dvě topologie i na množině $\mathbb{R}$, jejichž supremum je indiskrétní topologie a jejich infimum je diskrétní topologie.)
4. Existuje nekonstantní spojitá funkce Sierpińského prostoru do $\mathbb{R}$?
5. Ukažte, že pro každou otevřenou množinu G v topologickém prostoru X existuje spojité zobrazení X do Sierpińského prostoru S takové, že G je vzor otevřené množiny v S.

Ze dvou Sierpińského topologií na dvoubodové množině $\{0, 1\}$ vybereme tu, která má za otevřenou množinu bod 0. Tento prostor budeme značit symbolem S_2.

Množina topologií na X

1. $\mathcal{T}(X)$ je jednobodová množina právě když $|X| \leq 1$.
2. Ukažte, že na dvoubodové množině existují právě 4 topologie. Dvoubodový topologický prostor, který není ani diskrétní ani indiskrétní, se někdy nazývá Sierpińského prostor. Ukažte, že jsou právě dva Sierpińského prostory na $\{0, 1\}$ a že jsou homeomorfní.
3. Ukažte, že supremum obou prostorů Sierpińského je indiskrétní prostor a jejich infimum je diskrétní prostor. (Najděte dvě topologie i na množině $\mathbb{R}$, jejichž supremum je indiskrétní topologie a jejich infimum je diskrétní topologie.)
4. Existuje nekonstantní spojitá funkce Sierpińského prostoru do $\mathbb{R}$?
5. Ukažte, že pro každou otevřenou množinu G v topologickém prostoru X existuje spojité zobrazení X do Sierpińského prostoru S takové, že G je vzor otevřené množiny v S.

Ze dvou Sierpińského topologií na dvoubodové množině $\{0, 1\}$ vybereme tu, která má za otevřenou množinu bod 0. Tento prostor budeme značit symbolem S_2.

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Sorgenfrey line)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny intervaly tvaru $[a, b)$ se nazývá Sorgenfreyova přímka.

Sorgenfrey line

Označme Sorgenfreyovu přímku pro tuto část symbolem S. (Stejný název se používá, berou-li se všechny intervaly tvaru $(a, b]$, ale pokud nebude řečeno jinak, bude Sorgenfreyova přímka mít topologii určenou intervaly otevřenými nahoru.)

1. S je separabilní, ale nemá spočetnou otevřenou bázi, takže není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. Každý bod S má spočetnou bázi okolí.
3. S je 0-dimenzionální.
4. V S platí Baireova věta (průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin je neprázdný).
5. Popište spojité reálné funkce na S. Často se tyto funkce nazývají shora (nebo zprava) polospojité.
6. Součin $S \times S$ má nespočetný uzavřený diskrétní podprostor $\{(-x, x); x \in S\}$ (takový podprostor nemůže existovat v S).

DEFINICE (Michaelova přímka)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny otevřené intervaly a navíc jednobodové množiny iracionálních čísel se nazývá Michaelova přímka.

Michael line

Označíme pro tuto chvíli Michaelovu přímku symbolem M.

- M není separabilní, nemá tedy spočetnou otevřenou bázi.
- Každý bod M má spočetnou bázi okolí.
- M je 0-dimenzionální.
- M není metrizovatelný ani uspořádatelný.

DEFINICE (Michaelova přímka)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny otevřené intervaly a navíc jednobodové množiny iracionálních čísel se nazývá Michaelova přímka.

Michael line

Označíme pro tuto chvíli Michaelovu přímku symbolem M.

- M není separabilní, nemá tedy spočetnou otevřenou bázi.
- Každý bod M má spočetnou bázi okolí.
- M je 0-dimenzionální.
- M není metrizovatelný ani uspořádatelný.

DEFINICE (Michaelova přímka)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny otevřené intervaly a navíc jednobodové množiny iracionálních čísel se nazývá Michaelova přímka.

Michael line

Označíme pro tuto chvíli Michaelovu přímku symbolem M.

- M není separabilní, nemá tedy spočetnou otevřenou bázi.
- Každý bod M má spočetnou bázi okolí.
- M je 0-dimenzionální.
- M není metrizovatelný ani uspořádatelný.

DEFINICE (Michaelova přímka)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny otevřené intervaly a navíc jednobodové množiny iracionálních čísel se nazývá Michaelova přímka.

Michael line

Označíme pro tuto chvíli Michaelovu přímku symbolem M.

- M není separabilní, nemá tedy spočetnou otevřenou bázi.
- Každý bod M má spočetnou bázi okolí.
- M je 0-dimenzionální.
- M není metrizovatelný ani uspořádatelný.

DEFINICE (Michaelova přímka)

GO-prostor na množině reálných čísel mající za otevřenou bázi všechny otevřené intervaly a navíc jednobodové množiny iracionálních čísel se nazývá Michaelova přímka.

Michael line

Označíme pro tuto chvíli Michaelovu přímku symbolem M.

- M není separabilní, nemá tedy spočetnou otevřenou bázi.
- Každý bod M má spočetnou bázi okolí.
- M je 0-dimenzionální.
- M není metrizovatelný ani uspořádatelný.

Diskrétní podprostory

1. Najděte spočetný diskrétní uzavřený podprostor $\mathbb{R}$. Lze najít diskrétní nespočetný podprostor $\mathbb{R}$? Jaké jsou otevřené diskrétní podprostory $\mathbb{R}$?
2. Vějíř a ježek mají uzavřené spočetné diskrétní podprostory.
3. Každý prostor X vytvořený ultrafiltrem má uzavřený diskrétní prostor mohutnosti $|X|$. Najděte na každé množině filtr s prázdným průnikem tak, že v jím určeném prostoru je každý uzavřený diskrétní prostor konečný. Obsahuje takový prostor nekonečný diskrétní podprostor?
4. Každý diskrétní podprostor nekonečného hrubého T_1-prostoru je konečný.

Diskrétní podprostory

1. Najděte spočetný diskrétní uzavřený podprostor $\mathbb{R}$. Lze najít diskrétní nespočetný podprostor $\mathbb{R}$? Jaké jsou otevřené diskrétní podprostory $\mathbb{R}$?
2. Vějíř a ježek mají uzavřené spočetné diskrétní podprostory.
3. Každý prostor X vytvořený ultrafiltrem má uzavřený diskrétní prostor mohutnosti $|X|$. Najděte na každé množině filtr s prázdným průnikem tak, že v jím určeném prostoru je každý uzavřený diskrétní prostor konečný. Obsahuje takový prostor nekonečný diskrétní podprostor?
4. Každý diskrétní podprostor nekonečného hrubého T_1-prostoru je konečný.

Diskrétní podprostory

1. Najděte spočetný diskrétní uzavřený podprostor $\mathbb{R}$. Lze najít diskrétní nespočetný podprostor $\mathbb{R}$? Jaké jsou otevřené diskrétní podprostory $\mathbb{R}$?
2. Vějíř a ježek mají uzavřené spočetné diskrétní podprostory.
3. Každý prostor X vytvořený ultrafiltrem má uzavřený diskrétní prostor mohutnosti $|X|$. Najděte na každé množině filtr s prázdným průnikem tak, že v jím určeném prostoru je každý uzavřený diskrétní prostor konečný. Obsahuje takový prostor nekonečný diskrétní podprostor?
4. Každý diskrétní podprostor nekonečného hrubého T_1-prostoru je konečný.

Diskrétní podprostory

1. Najděte spočetný diskrétní uzavřený podprostor $\mathbb{R}$. Lze najít diskrétní nespočetný podprostor $\mathbb{R}$? Jaké jsou otevřené diskrétní podprostory $\mathbb{R}$?
2. Vějíř a ježek mají uzavřené spočetné diskrétní podprostory.
3. Každý prostor X vytvořený ultrafiltrem má uzavřený diskrétní prostor mohutnosti $|X|$. Najděte na každé množině filtr s prázdným průnikem tak, že v jím určeném prostoru je každý uzavřený diskrétní prostor konečný. Obsahuje takový prostor nekonečný diskrétní podprostor?
4. Každý diskrétní podprostor nekonečného hrubého T_1-prostoru je konečný.

Příklady součinů

1. Ukažte, že n-dimenzionální euklidovský prostor je homeomorfní s $\mathbb{R}^n$.
2. Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru posloupností přirozených čísel s Baireovou metrikou (tj. vzdálenost dvou různých posloupností je $1/n$, kde n je první index, ve kterém se hodnoty posloupností liší). Zobecněte na spočetnou mocninu libovolného diskrétního prostoru.
   Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru iracionálních čísel?
3. Nechť ξ, η jsou dva různé volné ultrafiltry na $\mathbb{N}$. Ukažte, že diagonála $\{(n,n); n \in \mathbb{N}\}$ je uzavřený diskrétní podprostor v součinu $N_\xi \times \mathbb{N}_\eta$.
4. Najděte všechny otevřené množiny v součinu dvou prostorů Sierpińského.
5. Použijeme-li značení z ordinálních čísel, je číslo n diskrétní prostor o n bodech $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Ukažte, že prostory 2^ω a 3^ω jsou homeomorfní (obecněji, 2^ω a n^ω, $n \in \mathbb{N}$, jsou homeomorfní).
   Mohou tyto prostory být homeomorfní i s $\mathbb{N}^\omega$?

Příklady součinů

1. Ukažte, že n-dimenzionální euklidovský prostor je homeomorfní s $\mathbb{R}^n$.
2. Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru posloupností přirozených čísel s Baireovou metrikou (tj. vzdálenost dvou různých posloupností je $1/n$, kde n je první index, ve kterém se hodnoty posloupností liší). Zobecněte na spočetnou mocninu libovolného diskrétního prostoru.
   Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru iracionálních čísel?
3. Nechť ξ, η jsou dva různé volné ultrafiltry na $\mathbb{N}$. Ukažte, že diagonála $\{(n, n); n \in \mathbb{N}\}$ je uzavřený diskrétní podprostor v součinu $N_\xi \times \mathbb{N}_\eta$.
4. Najděte všechny otevřené množiny v součinu dvou prostorů Sierpińského.
5. Použijeme-li značení z ordinálních čísel, je číslo n diskrétní prostor o n bodech $\{0, 1, ..., n-1\}$.
   Ukažte, že prostory 2^ω a 3^ω jsou homeomorfní (obecněji, 2^ω a n^ω, $n \in \mathbb{N}$, jsou homeomorfní).
   Mohou tyto prostory být homeomorfní i s $\mathbb{N}^\omega$?

Příklady součinů

1. Ukažte, že n-dimenzionální euklidovský prostor je homeomorfní s $\mathbb{R}^n$.
2. Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru posloupností přirozených čísel s Baireovou metrikou (tj. vzdálenost dvou různých posloupností je $1/n$, kde n je první index, ve kterém se hodnoty posloupností liší). Zobecněte na spočetnou mocninu libovolného diskrétního prostoru.
   Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru iracionálních čísel?
3. Nechť ξ, η jsou dva různé volné ultrafiltry na $\mathbb{N}$. Ukažte, že diagonála $\{(n,n); n \in \mathbb{N}\}$ je uzavřený diskrétní podprostor v součinu $N_\xi \times \mathbb{N}_\eta$.
4. Najděte všechny otevřené množiny v součinu dvou prostorů Sierpińského.
5. Použijeme-li značení z ordinálních čísel, je číslo n diskrétní prostor o n bodech $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.
   Ukažte, že prostory 2^ω a 3^ω jsou homeomorfní (obecněji, 2^ω a n^ω, $n \in \mathbb{N}$, jsou homeomorfní).
   Mohou tyto prostory být homeomorfní i s $\mathbb{N}^\omega$?

Příklady součinů

1. Ukažte, že n-dimenzionální euklidovský prostor je homeomorfní s $\mathbb{R}^n$.
2. Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru posloupností přirozených čísel s Baireovou metrikou (tj. vzdálenost dvou různých posloupností je $1/n$, kde n je první index, ve kterém se hodnoty posloupností liší). Zobecněte na spočetnou mocninu libovolného diskrétního prostoru.
   Ukažte, že $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je homeomorfní prostoru iracionálních čísel?
3. Nechť ξ, η jsou dva různé volné ultrafiltry na $\mathbb{N}$. Ukažte, že diagonála $\{(n, n); n \in \mathbb{N}\}$ je uzavřený diskrétní podprostor v součinu $N_\xi \times \mathbb{N}_\eta$.
4. Najděte všechny otevřené množiny v součinu dvou prostorů Sierpińského.
5. Použijeme-li značení z ordinálních čísel, je číslo n diskrétní prostor o n bodech $\{0, 1, ..., n-1\}$.
   Ukažte, že prostory 2^ω a 3^ω jsou homeomorfní (obecněji, 2^ω a n^ω, $n \in \mathbb{N}$, jsou homeomorfní).
   Mohou tyto prostory být homeomorfní i s $\mathbb{N}^\omega$?

Vnoření do mocniny

1. Každý topologický prostor X je slabě vytvořen množinou $C(X, S_2)$, kde S_2 je Sierpińského prostor. To znamená, že X lze vnořit do součinu $\widetilde{X} \times S_2^\kappa$, kde $\widetilde{X}$ je indiskrétní prostor na nosné množině X a $\kappa = |C(X, S_2)|$ (lze brát jen část ta zobrazení z $C(X, S_2)$, která rozlišují body a uzavřené množiny v X). Pokud $C(X, S_2)$ rozlišuje body X, lze vynechat indiskrétní prostor $\widetilde{X}$.
2. Každý 0-dimenzionální prostor X je slabě vytvořen množinou $C(X, 2)$, kde 2 je dvoubodový diskrétní prostor. To znamená, že X lze vnořit do součinu $\widetilde{X} \times 2^\kappa$, kde $\widetilde{X}$ je indiskrétní prostor na nosné množině X a $\kappa = |C(X, 2)|$ (lze brát jen část ta zobrazení z $C(X, 2)$, která rozlišují body a uzavřené množiny v X). Pokud $C(X, 2)$ rozlišuje body X, lze vynechat indiskrétní prostor $\widetilde{X}$.
3. Jaké prostory budou slabě vytvořeny zobrazeními do $\mathbb{N}$?

Vnoření do mocniny

1. Každý topologický prostor X je slabě vytvořen množinou $C(X, S_2)$, kde S_2 je Sierpińského prostor. To znamená, že X lze vnořit do součinu $\widetilde{X} \times S_2^\kappa$, kde $\widetilde{X}$ je indiskrétní prostor na nosné množině X a $\kappa = |C(X, S_2)|$ (lze brát jen část ta zobrazení z $C(X, S_2)$, která rozlišují body a uzavřené množiny v X). Pokud $C(X, S_2)$ rozlišuje body X, lze vynechat indiskrétní prostor $\widetilde{X}$.
2. Každý 0-dimenzionální prostor X je slabě vytvořen množinou $C(X, 2)$, kde 2 je dvoubodový diskrétní prostor. To znamená, že X lze vnořit do součinu $\widetilde{X} \times 2^\kappa$, kde $\widetilde{X}$ je indiskrétní prostor na nosné množině X a $\kappa = |C(X, 2)|$ (lze brát jen část ta zobrazení z $C(X, 2)$, která rozlišují body a uzavřené množiny v X). Pokud $C(X, 2)$ rozlišuje body X, lze vynechat indiskrétní prostor $\widetilde{X}$.
3. Jaké prostory budou slabě vytvořeny zobrazeními do $\mathbb{N}$?

Vnoření do mocniny

1. Každý topologický prostor X je slabě vytvořen množinou $C(X, S_2)$, kde S_2 je Sierpińského prostor. To znamená, že X lze vnořit do součinu $\widetilde{X} \times S_2^\kappa$, kde $\widetilde{X}$ je indiskrétní prostor na nosné množině X a $\kappa = |C(X, S_2)|$ (lze brát jen část ta zobrazení z $C(X, S_2)$, která rozlišují body a uzavřené množiny v X). Pokud $C(X, S_2)$ rozlišuje body X, lze vynechat indiskrétní prostor $\widetilde{X}$.
2. Každý 0-dimenzionální prostor X je slabě vytvořen množinou $C(X, 2)$, kde 2 je dvoubodový diskrétní prostor. To znamená, že X lze vnořit do součinu $\widetilde{X} \times 2^\kappa$, kde $\widetilde{X}$ je indiskrétní prostor na nosné množině X a $\kappa = |C(X, 2)|$ (lze brát jen část ta zobrazení z $C(X, 2)$, která rozlišují body a uzavřené množiny v X). Pokud $C(X, 2)$ rozlišuje body X, lze vynechat indiskrétní prostor $\widetilde{X}$.
3. Jaké prostory budou slabě vytvořeny zobrazeními do $\mathbb{N}$?

1. Je-li (X, d) pseudometrický prostor a $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ jím určený metrický prostor, je zobrazení $\{x \rightsquigarrow [x]\}$ jak slabě, tak silně vytvářející (a tedy je kvocientové. Toto zobrazení je otevřené i uzavřené.
2. Každá projekce neprázdného součinu prostorů na souřadnicový podprostor je otevřené zobrazení (a tedy kvocientové). Projekce roviny na přímku není uzavřené zobrazení.
3. Projekce čtverce $[0, 1] \times [0, 1]$ na interval $[0, 1]$ je uzavřené i otevřené zobrazení.
4. Retrakce $\mathbb{R}$ na $[0, 1]$, která zobrazí body větší než 1 na bod 1 a body menší než 0 na bod 0, je uzavřené, ale nikoli otevřené zobrazení.
5. Spojitá funkce $f : [-1, \rightarrow) \to [-1, 1]$, která je identita na $[-1, 1]$ a je rovna $|x - 2k|$ na intervalu $[2k - 1, 2k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$, je retrakcí $[-1, \rightarrow)$ na $[-1, 1]$, která není ani uzavřená ani otevřená.

1. Je-li (X, d) pseudometrický prostor a $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ jím určený metrický prostor, je zobrazení $\{x \rightsquigarrow [x]\}$ jak slabě, tak silně vytvářející (a tedy je kvocientové. Toto zobrazení je otevřené i uzavřené.
2. Každá projekce neprázdného součinu prostorů na souřadnicový podprostor je otevřené zobrazení (a tedy kvocientové). Projekce roviny na přímku není uzavřené zobrazení.
3. Projekce čtverce $[0, 1] \times [0, 1]$ na interval $[0, 1]$ je uzavřené i otevřené zobrazení.
4. Retrakce $\mathbb{R}$ na $[0, 1]$, která zobrazí body větší než 1 na bod 1 a body menší než 0 na bod 0, je uzavřené, ale nikoli otevřené zobrazení.
5. Spojitá funkce $f : [-1, \to) \to [-1, 1]$, která je identita na $[-1, 1]$ a je rovna $|x - 2k|$ na intervalu $[2k - 1, 2k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$, je retrakcí $[-1, \to)$ na $[-1, 1]$, která není ani uzavřená ani otevřená.

1. Je-li (X, d) pseudometrický prostor a $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ jím určený metrický prostor, je zobrazení $\{x \rightsquigarrow [x]\}$ jak slabě, tak silně vytvářející (a tedy je kvocientové. Toto zobrazení je otevřené i uzavřené.
2. Každá projekce neprázdného součinu prostorů na souřadnicový podprostor je otevřené zobrazení (a tedy kvocientové). Projekce roviny na přímku není uzavřené zobrazení.
3. Projekce čtverce $[0, 1] \times [0, 1]$ na interval $[0, 1]$ je uzavřené i otevřené zobrazení.
4. Retrakce $\mathbb{R}$ na $[0, 1]$, která zobrazí body větší než 1 na bod 1 a body menší než 0 na bod 0, je uzavřené, ale nikoli otevřené zobrazení.
5. Spojitá funkce $f : [-1, \to) \to [-1, 1]$, která je identita na $[-1, 1]$ a je rovna $|x - 2k|$ na intervalu $[2k - 1, 2k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$, je retrakcí $[-1, \to)$ na $[-1, 1]$, která není ani uzavřená ani otevřená.

1. Je-li (X, d) pseudometrický prostor a $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ jím určený metrický prostor, je zobrazení $\{x \rightsquigarrow [x]\}$ jak slabě, tak silně vytvářející (a tedy je kvocientové. Toto zobrazení je otevřené i uzavřené.
2. Každá projekce neprázdného součinu prostorů na souřadnicový podprostor je otevřené zobrazení (a tedy kvocientové). Projekce roviny na přímku není uzavřené zobrazení.
3. Projekce čtverce $[0, 1] \times [0, 1]$ na interval $[0, 1]$ je uzavřené i otevřené zobrazení.
4. Retrakce $\mathbb{R}$ na $[0, 1]$, která zobrazí body větší než 1 na bod 1 a body menší než 0 na bod 0, je uzavřené, ale nikoli otevřené zobrazení.
5. Spojitá funkce $f : [-1, \to) \to [-1, 1]$, která je identita na $[-1, 1]$ a je rovna $|x - 2k|$ na intervalu $[2k - 1, 2k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$, je retrakcí $[-1, \to)$ na $[-1, 1]$, která není ani uzavřená ani otevřená.

1. Je-li (X, d) pseudometrický prostor a $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ jím určený metrický prostor, je zobrazení $\{x \rightsquigarrow [x]\}$ jak slabě, tak silně vytvářející (a tedy je kvocientové. Toto zobrazení je otevřené i uzavřené.
2. Každá projekce neprázdného součinu prostorů na souřadnicový podprostor je otevřené zobrazení (a tedy kvocientové). Projekce roviny na přímku není uzavřené zobrazení.
3. Projekce čtverce $[0, 1] \times [0, 1]$ na interval $[0, 1]$ je uzavřené i otevřené zobrazení.
4. Retrakce $\mathbb{R}$ na $[0, 1]$, která zobrazí body větší než 1 na bod 1 a body menší než 0 na bod 0, je uzavřené, ale nikoli otevřené zobrazení.
5. Spojitá funkce $f : [-1, \rightarrow) \to [-1, 1]$, která je identita na $[-1, 1]$ a je rovna $|x - 2k|$ na intervalu $[2k - 1, 2k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$, je retrakcí $[-1, \rightarrow)$ na $[-1, 1]$, která není ani uzavřená ani otevřená.