# 1. TOPOLOGIE A SPOJITOST

## Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k,y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

Množina $V_\omega$ se dá také chápat jako kvocient množiny $\mathbb{N} \times X$, který ztotožní všechny body mající nulovou druhou souřadnici. Topologie vějíře má za otevřenou bázi všechny body různé od 0 a pak množiny tvaru

$$U_f = \{0\} \cup \{(k, 1/n); n > f(k)\}$$

kde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

Je zřejmé, že lze místo naší volby $X$ použít i jiné prostory. Často se používá uzavřený interval $[0, 1]$.

Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

Místo spočetně mnoha kopií $X$ lze vzít i jiný nekonečný počet $\kappa$ – pak se výsledný prostor značí jako $V_\kappa$.

Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

## Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

## Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

## Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

## Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bází okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Vějíř)

Nechť $X$ je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ Symbolem $V_\omega$ se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina $X$ se ve $V_\omega$ vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích.
Na množině $V_\omega$ se definují otevřené množiny jako ty množiny, jejichž průnik s každou kopií $X$ je otevřenou množinou v $X$.
S touto topologií se $V_\omega$ nazývá vějíř.

## Vlastnosti vějíře

1. Vějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bází okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Vějíř je FU-prostor.
3. Vějíř je 0-dimenzionální prostor.
4. Vějíř obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
5. Zobrazení na vějíři je spojité právě když je spojité na každé kopii $X$.

$\Rightarrow$

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

**Vlastnosti ježka**

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

Vlastnosti ježka

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

## Vlastnosti ježka

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

## Vlastnosti ježka

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

## Vlastnosti ježka

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

## Vlastnosti ježka

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

Na množině $V_\kappa$ lze zavést jinou topologii pomocí metriky. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujme

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X; \\ x+y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

**DEFINICE** (Ježek)

Množina $V_\omega$ s topologií definovanou pomocí uvedené metriky se nazývá ježek.

## Vlastnosti ježka

1. Ježek je spočetný metrizovatelný prostor.
2. Ježek je 0-dimenzionální prostor.
3. Ježek obsahuje nekonečné uzavřené množiny bez hromadných bodů.
4. Topologie ježka je menší množinou než topologie vějíře (tedy ježek je hrubší než vějíř).
5. Na ježkovi existuje nespojitá reálná funkce, která je spojitá na každé kopii $X$.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite”).

Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite”).

Uvedený postup zavedení topologie se dá zobecnit. Např. na množině $X$ můžeme otevřené množiny definovat jako prázdnou množinu a doplňky nejvýše spočetných množin (cocountable topologie). Je zřejmé, jak lze postupovat dále pro vyšší mohutnosti.

**Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru**

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite").

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite”).

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite”).

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite”).

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite").

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite").

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

**DEFINICE** (Hrubá $T_1$ topologie)

Topologický prostor na množině $X$, jehož otevřené množiny jsou právě doplňky konečných množin a prázdná množina se nazývá hrubý $T_1$ prostor (důvody pro tento název se poznají v kapitole o oddělovacích axiómech). Někdy se uvedená topologie nazývá ko–konečná (anglicky „cofinite”).

## Vlastnosti hrubého $T_1$ prostoru

Nechť $X$ je hrubý $T_1$ prostor.

1. Je-li $X$ konečná množina, je prostor $X$ diskrétní. Je-li $X$ nekonečná množina, nemá žádný izolovaný bod a není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. $X$ má za uzavřenou bázi všechny jednobodové podmnožiny $X$ (tedy, je-li nekonečný, není 0-dimensioální).
3. Topologie prostoru $X$ je nejmenší topologie na $X$, ve které jsou všechny body (a tedy i konečné množiny) uzavřené.
4. Každá nekonečná podmnožina $X$ má hromadný bod.
5. Uzávěr nekonečné podmnožiny v $X$ je celý prostor (tedy $X$ je separabilní).
6. Pokud usměrněný soubor v $X$ nemá konfinální konstantní podsoubor, konverguje ke každému bodu v $X$.
7. Reálná funkce na $X$ je spojitá právě když je buď konstantní nebo tzv. finite-to-one, tj. má jen konečné vzory bodů.

Prostor spočetných ordinálů $\omega_1$ je význačný uspořádaný prostor vhodný pro různé příklady speciálních topologických vlastností, protože už jako dobře uspořádaná množina má zajímavé vlastnosti. Z tvrzení plyne, že pro každé ordinální číslo $\alpha < \omega_1$ je uspořádaný prostor $[0, \alpha)$ metrizovatelný. To však už neplatí pro $\alpha = \omega_1$.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \to)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \to)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Dlouhá přímka

Dlouhá polopřímka nebo přímka mají všechny výše uvedené vlastnosti pro $\omega_1$ kromě první. Jediné její obojetné podmnožiny jsou $\emptyset$ a celý prostor.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \to)$.

Přidáme k $\omega_1$ první nespočetný ordinál a dostaneme uspořádaný prostor $\omega_1 + 1$. Ten má následující vlastnosti.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \to)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

## Prostor $\omega_1$

1. Prostor $\omega_1$ je 0-dimenzionální.
2. Prostor $\omega_1$ má v každém bodě spočetnou lokální bázi, ale není metrizovatelný.
3. Prostor $\omega_1$ není separabilní a nemá spočetnou otevřenou bázi. Množina jeho izolovaných bodů (tj. izolovaných ordinálních čísel) je hustá podmnožina.
4. Každá spočetná podmnožina má hromadný bod.
5. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ je omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$.

## Prostor $\omega_1 + 1$

1. Prostor $\omega_1 + 1$ je nuldimenzionální.
2. Prostor $\omega_1 + 1$ má v bodě $\omega_1$ nespočetnou lokální bázi.
3. Každá spojitá reálná funkce na $\omega_1$ lze rozšířit (tj. prodloužit) na spojitou funkci na $\omega_1 + 1$ a je tedy omezená a konstantní na nějakém intervalu $[\alpha, \rightarrow)$ pro $\alpha < \omega_1$.
4. Bod $\omega_1$ je v uzávěru množiny spočetných ordinálů, ale žádná posloupnost těchto čísel k bodu $\omega_1$ nekonverguje.

Nechť $\mathbb{N}_\xi$ je prostor vytvořený volným ultrafiltrem na množině $\mathbb{N}$.

**Spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem**

1. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ je 0-dimenzionální, spočetný (je tedy separabilní), ale v bodě $\xi$ nemá spočetnou bázi okolí (a není tedy metrizovatelný ani uspořádatelný a nemá spočetnou otevřenou bázi).
2. Žádná posloupnost z $\mathbb{N}$ nekonverguje k bodu $\xi$, takže topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ není vytvořena konvergencí posloupností.
3. V $\mathbb{N}_\xi$ existují nekonečné uzavřené množiny složené z izolovaných bodů (tyto množiny nemají žádné hromadné body).
4. Jediná topologie na množině $\mathbb{N}_\xi$ ostře větší než topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ je diskrétní topologie.
5. Reálná funkce $f$ na $N_\xi$ je spojitá právě když posloupnost $\{f(n)\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje.

Nechť $\mathbb{N}_\xi$ je prostor vytvořený volným ultrafiltrem na množině $\mathbb{N}$.

## Spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem

1. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ je 0-dimenzionální, spočetný (je tedy separabilní), ale v bodě $\xi$ nemá spočetnou bázi okolí (a není tedy metrizovatelný ani uspořádatelný a nemá spočetnou otevřenou bázi).
2. Žádná posloupnost z $\mathbb{N}$ nekonverguje k bodu $\xi$, takže topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ není vytvořena konvergencí posloupností.
3. V $\mathbb{N}_\xi$ existují nekonečné uzavřené množiny složené z izolovaných bodů (tyto množiny nemají žádné hromadné body).
4. Jediná topologie na množině $\mathbb{N}_\xi$ ostře větší než topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ je diskrétní topologie.
5. Reálná funkce $f$ na $N_\xi$ je spojitá právě když posloupnost $\{f(n)\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje.

Nechť $\mathbb{N}_\xi$ je prostor vytvořený volným ultrafiltrem na množině $\mathbb{N}$.

## Spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem

1. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ je 0-dimenzionální, spočetný (je tedy separabilní), ale v bodě $\xi$ nemá spočetnou bázi okolí (a není tedy metrizovatelný ani uspořádatelný a nemá spočetnou otevřenou bázi).
2. Žádná posloupnost z $\mathbb{N}$ nekonverguje k bodu $\xi$, takže topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ není vytvořena konvergencí posloupností.
3. V $\mathbb{N}_\xi$ existují nekonečné uzavřené množiny složené z izolovaných bodů (tyto množiny nemají žádné hromadné body).
4. Jediná topologie na množině $\mathbb{N}_\xi$ ostře větší než topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ je diskrétní topologie.
5. Reálná funkce $f$ na $N_\xi$ je spojitá právě když posloupnost $\{f(n)\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje.

Nechť $\mathbb{N}_\xi$ je prostor vytvořený volným ultrafiltrem na množině $\mathbb{N}$.

## Spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem

1. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ je 0-dimenzionální, spočetný (je tedy separabilní), ale v bodě $\xi$ nemá spočetnou bázi okolí (a není tedy metrizovatelný ani uspořádatelný a nemá spočetnou otevřenou bázi).
2. Žádná posloupnost z $\mathbb{N}$ nekonverguje k bodu $\xi$, takže topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ není vytvořena konvergencí posloupností.
3. V $\mathbb{N}_\xi$ existují nekonečné uzavřené množiny složené z izolovaných bodů (tyto množiny nemají žádné hromadné body).
4. Jediná topologie na množině $\mathbb{N}_\xi$ ostře větší než topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ je diskrétní topologie.
5. Reálná funkce $f$ na $N_\xi$ je spojitá právě když posloupnost $\{f(n)\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje.

Nechť $\mathbb{N}_\xi$ je prostor vytvořený volným ultrafiltrem na množině $\mathbb{N}$.

## Spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem

1. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ je 0-dimenzionální, spočetný (je tedy separabilní), ale v bodě $\xi$ nemá spočetnou bázi okolí (a není tedy metrizovatelný ani uspořádatelný a nemá spočetnou otevřenou bázi).
2. Žádná posloupnost z $\mathbb{N}$ nekonverguje k bodu $\xi$, takže topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ není vytvořena konvergencí posloupností.
3. V $\mathbb{N}_\xi$ existují nekonečné uzavřené množiny složené z izolovaných bodů (tyto množiny nemají žádné hromadné body).
4. Jediná topologie na množině $\mathbb{N}_\xi$ ostře větší než topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ je diskrétní topologie.
5. Reálná funkce $f$ na $N_\xi$ je spojitá právě když posloupnost $\{f(n)\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje.

Nechť $\mathbb{N}_\xi$ je prostor vytvořený volným ultrafiltrem na množině $\mathbb{N}$.

## Spočetný prostor vytvořený ultrafiltrem

1. Prostor $\mathbb{N}_\xi$ je 0-dimenzionální, spočetný (je tedy separabilní), ale v bodě $\xi$ nemá spočetnou bázi okolí (a není tedy metrizovatelný ani uspořádatelný a nemá spočetnou otevřenou bázi).
2. Žádná posloupnost z $\mathbb{N}$ nekonverguje k bodu $\xi$, takže topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ není vytvořena konvergencí posloupností.
3. V $\mathbb{N}_\xi$ existují nekonečné uzavřené množiny složené z izolovaných bodů (tyto množiny nemají žádné hromadné body).
4. Jediná topologie na množině $\mathbb{N}_\xi$ ostře větší než topologie prostoru $\mathbb{N}_\xi$ je diskrétní topologie.
5. Reálná funkce $f$ na $N_\xi$ je spojitá právě když posloupnost $\{f(n)\}$ v $\mathbb{R}$ konverguje.

Různými kombinacemi konvergentních posloupností lze vytvořit zajímavé prostory. Jedním z takových prostorů je vějíř nebo ježek. Oba to jsou FU-prostory. Nyní mírně zmodifikujeme vějíř tak, abychom dostali spočetný prostor, který není sekvenční. Vějíř budeme chápat jako kvocient množiny $\mathbb{N} \times X$, který ztotožní všechny body mající nulovou druhou souřadnici.

**DEFINICE** (Pseudovějíř)

Na nosné množině $V_\omega$ vějíře definujme topologii pomocí okolí:
Každý bod různý od 0 je izolovaný. Báze okolí bodu 0 je tvořena množinami

$$U_{f,m} = \{0\} \cup \{(k, 1/n); k > m, n > f(k)\}$$

kde $m \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Tento prostor nazveme pseudovějíř.

**Pseudovějíř**

1. Pseudovějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Pseudovějíř je 0-dimenzionální.
3. Topologie pseudovějíře je větší než topologie vějíře.

**DEFINICE** (Pseudovějíř)

Na nosné množině $V_\omega$ vějíře definujme topologii pomocí okolí:
Každý bod různý od 0 je izolovaný. Báze okolí bodu 0 je tvořena množinami

$$U_{f,m} = \{0\} \cup \{(k, 1/n); k > m, n > f(k)\}$$

kde $m \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Tento prostor nazveme pseudovějíř.

Pseudovějíř

1. Pseudovějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Pseudovějíř je 0-dimenzionální.
3. Topologie pseudovějíře je větší než topologie vějíře.
4. Bod 0 je v uzávěru svého doplňku, ale žádná posloupnost z doplňku k 0 nekonverguje (tedy prostor není sekvenční).

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Pseudovějíř)

Na nosné množině $V_\omega$ vějíře definujme topologii pomocí okolí:
Každý bod různý od 0 je izolovaný. Báze okolí bodu 0 je tvořena množinami

$$U_{f,m} = \{0\} \cup \{(k, 1/n); k > m, n > f(k)\}$$

kde $m \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Tento prostor nazveme pseudovějíř.

## Pseudovějíř

1. Pseudovějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Pseudovějíř je 0-dimenzionální.
3. Topologie pseudovějíře je větší než topologie vějíře.
4. Bod 0 je v uzávěru svého doplňku, ale žádná posloupnost z doplňku k 0 nekonverguje (tedy prostor není sekvenční).

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Pseudovějíř)

Na nosné množině $V_\omega$ vějíře definujme topologii pomocí okolí:
Každý bod různý od 0 je izolovaný. Báze okolí bodu 0 je tvořena množinami

$$U_{f,m} = \{0\} \cup \{(k, 1/n); k > m, n > f(k)\}$$

kde $m \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Tento prostor nazveme pseudovějíř.

Pseudovějíř

1. Pseudovějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Pseudovějíř je 0-dimenzionální.
3. Topologie pseudovějíře je větší než topologie vějíře.
4. Bod 0 je v uzávěru svého doplňku, ale žádná posloupnost z doplňku k 0 nekonverguje (tedy prostor není sekvenční).

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Pseudovějíř)

Na nosné množině $V_\omega$ vějíře definujme topologii pomocí okolí:
Každý bod různý od 0 je izolovaný. Báze okolí bodu 0 je tvořena množinami

$$U_{f,m} = \{0\} \cup \{(k, 1/n); k > m, n > f(k)\}$$

kde $m \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Tento prostor nazveme pseudovějíř.

**Pseudovějíř**

1. Pseudovějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Pseudovějíř je 0-dimenzionální.
3. Topologie pseudovějíře je větší než topologie vějíře.
4. Bod 0 je v uzávěru svého doplňku, ale žádná posloupnost z doplňku k 0 nekonverguje (tedy prostor není sekvenční).

$\Rightarrow$

**DEFINICE** (Pseudovějíř)

Na nosné množině $V_\omega$ vějíře definujme topologii pomocí okolí:
Každý bod různý od 0 je izolovaný. Báze okolí bodu 0 je tvořena množinami

$$U_{f,m} = \{0\} \cup \{(k, 1/n); k > m, n > f(k)\}$$

kde $m \in \mathbb{N}, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Tento prostor nazveme pseudovějíř.

**Pseudovějíř**

1. Pseudovějíř je spočetný prostor, který v bodě 0 nemá spočetnou bázi okolí (a nemá tedy ani spočetnou otevřenou bázi) a není metrizovatelný a uspořádatelný.
2. Pseudovějíř je 0-dimenzionální.
3. Topologie pseudovějíře je větší než topologie vějíře.
4. Bod 0 je v uzávěru svého doplňku, ale žádná posloupnost z doplňku k 0 nekonverguje (tedy prostor není sekvenční).

$\Rightarrow$

Pseudovějíř lze sestrojit i trochu jiným způsobem. Vezmeme v rovině konvergentní posloupnost $\{(1/n, 0); n \in \mathbb{N}\}$ spolu s její limitou (0,0). Ke každému bodu $(1/n, 0)$ vezmeme posloupnost v rovině $\{(1/n, 1/m)\}_m$ k němu konvergující.
Body $(1/n, 1/m)$ budou izolované, body $(1/n, 0)$ mají za bázi okolí množiny $U_{n,k} = \{(1/n, 0)\} \cup \{(1/n, 1/m) m > k\}$, pro $k \in \mathbb{N}$, bod (0,0) má za bázi okolí množiny $\{(0,0)\} \cup \bigcup\{U_{n,k_n}; n > m\}$, pro $m \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{k_n\}$ v $\mathbb{N}$. Pseudovějíř vznikne z popsané konstrukce vynecháním bodů $(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$ (je to podprostor).

Označíme-li konvergentní posloupnost jako prostor $K_1$, můžeme označit právě popsaný prostor symbolem $K_2$. Je zřejmě, že lze postupovat dále, k bodům $(1/n, 1/m)$ přidat posloupnosti v 3-rozměrném prostoru k těmto bodům konvergujícím – dostaneme prostor $K_3$ atd. Dostaneme tak prostory $K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nic nebrání tomu, abychom tento proces ukončili až $\omega$ konstrukcí prostoru $K_\omega$.

**Sekvenční prostory $K_n$**

1. Všechny prostory $K_n$ i $K_\omega$ jsou sekvenční.
2. Prostor $K_\omega$ je spočetný a nemá žádný izolovaný bod. Množina izolovaných bodů v $K_n$ je v tomto prostoru hustá, ale pro $n > 1$ žádná posloupnost izolovaných bodů nekonverguje k nulovému bodu (tedy prostor není FU-prostor).
3. Žádný prostor $K_n$ ani $K_\omega$ není metrizovatelný.

Pseudovějíř lze sestrojit i trochu jiným způsobem. Vezmeme v rovině konvergentní posloupnost $\{(1/n, 0); n \in \mathbb{N}\}$ spolu s její limitou (0,0). Ke každému bodu $(1/n, 0)$ vezmeme posloupnost v rovině $\{(1/n, 1/m)\}_m$ k němu konvergující.
Body $(1/n, 1/m)$ budou izolované, body $(1/n, 0)$ mají za bázi okolí množiny $U_{n,k} = \{(1/n, 0)\} \cup \{(1/n, 1/m) m > k\}$, pro $k \in \mathbb{N}$, bod (0,0) má za bázi okolí množiny $\{(0, 0)\} \cup \bigcup\{U_{n,k_n}; n > m\}$, pro $m \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{k_n\}$ v $\mathbb{N}$. Pseudovějíř vznikne z popsané konstrukce vynecháním bodů $(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$ (je to podprostor).

Označíme-li konvergentní posloupnost jako prostor $K_1$, můžeme označit právě popsaný prostor symbolem $K_2$. Je zřejmě, že lze postupovat dále, k bodům $(1/n, 1/m)$ přidat posloupnosti v 3-rozměrném prostoru k těmto bodům konvergujícím – dostaneme prostor $K_3$ atd. Dostaneme tak prostory $K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nic nebrání tomu, abychom tento proces ukončili až $\omega$ konstrukcí prostoru $K_\omega$.

**Sekvenční prostory $K_n$**

1. Všechny prostory $K_n$ i $K_\omega$ jsou sekvenční.
2. Prostor $K_\omega$ je spočetný a nemá žádný izolovaný bod. Množina izolovaných bodů v $K_n$ je v tomto prostoru hustá, ale pro $n > 1$ žádná posloupnost izolovaných bodů nekonverguje k nulovému bodu (tedy prostor není FU-prostor).
3. Žádný prostor $K_n$ ani $K_\omega$ není metrizovatelný.

Označíme-li konvergentní posloupnost jako prostor $K_1$, můžeme označit právě popsaný prostor symbolem $K_2$. Je zřejmě, že lze postupovat dále, k bodům $(1/n, 1/m)$ přidat posloupnosti v 3-rozměrném prostoru k těmto bodům konvergujícím – dostaneme prostor $K_3$ atd. Dostaneme tak prostory $K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nic nebrání tomu, abychom tento proces ukončili až $\omega$ konstrukcí prostoru $K_\omega$.

## Sekvenční prostory $K_n$

1. Všechny prostory $K_n$ i $K_\omega$ jsou sekvenční.
2. Prostor $K_\omega$ je spočetný a nemá žádný izolovaný bod. Množina izolovaných bodů v $K_n$ je v tomto prostoru hustá, ale pro $n > 1$ žádná posloupnost izolovaných bodů nekonverguje k nulovému bodu (tedy prostor není FU-prostor).
3. Žádný prostor $K_n$ ani $K_\omega$ není metrizovatelný.
4. Sekvenční prostor $K_2$ obsahuje jako svůj podprostor nesekvenční pseudovějíř.

Označíme-li konvergentní posloupnost jako prostor $K_1$, můžeme označit právě popsaný prostor symbolem $K_2$. Je zřejmě, že lze postupovat dále, k bodům $(1/n, 1/m)$ přidat posloupnosti v 3-rozměrném prostoru k těmto bodům konvergujícím – dostaneme prostor $K_3$ atd. Dostaneme tak prostory $K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nic nebrání tomu, abychom tento proces ukončili až $\omega$ konstrukcí prostoru $K_\omega$.

## Sekvenční prostory $K_n$

1. Všechny prostory $K_n$ i $K_\omega$ jsou sekvenční.
2. Prostor $K_\omega$ je spočetný a nemá žádný izolovaný bod. Množina izolovaných bodů v $K_n$ je v tomto prostoru hustá, ale pro $n > 1$ žádná posloupnost izolovaných bodů nekonverguje k nulovému bodu (tedy prostor není FU-prostor).
3. Žádný prostor $K_n$ ani $K_\omega$ není metrizovatelný.
4. Sekvenční prostor $K_2$ obsahuje jako svůj podprostor nesekvenční pseudovějíř.

Označíme-li konvergentní posloupnost jako prostor $K_1$, můžeme označit právě popsaný prostor symbolem $K_2$. Je zřejmě, že lze postupovat dále, k bodům $(1/n, 1/m)$ přidat posloupnosti v 3-rozměrném prostoru k těmto bodům konvergujícím – dostaneme prostor $K_3$ atd. Dostaneme tak prostory $K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nic nebrání tomu, abychom tento proces ukončili až $\omega$ konstrukcí prostoru $K_\omega$.

## Sekvenční prostory $K_n$

1. Všechny prostory $K_n$ i $K_\omega$ jsou sekvenční.
2. Prostor $K_\omega$ je spočetný a nemá žádný izolovaný bod. Množina izolovaných bodů v $K_n$ je v tomto prostoru hustá, ale pro $n > 1$ žádná posloupnost izolovaných bodů nekonverguje k nulovému bodu (tedy prostor není FU-prostor).
3. Žádný prostor $K_n$ ani $K_\omega$ není metrizovatelný.
4. Sekvenční prostor $K_2$ obsahuje jako svůj podprostor nesekvenční pseudovějíř.

Označíme-li konvergentní posloupnost jako prostor $K_1$, můžeme označit právě popsaný prostor symbolem $K_2$. Je zřejmě, že lze postupovat dále, k bodům $(1/n, 1/m)$ přidat posloupnosti v 3-rozměrném prostoru k těmto bodům konvergujícím – dostaneme prostor $K_3$ atd. Dostaneme tak prostory $K_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nic nebrání tomu, abychom tento proces ukončili až $\omega$ konstrukcí prostoru $K_\omega$.

## Sekvenční prostory $K_n$

1. Všechny prostory $K_n$ i $K_\omega$ jsou sekvenční.
2. Prostor $K_\omega$ je spočetný a nemá žádný izolovaný bod. Množina izolovaných bodů v $K_n$ je v tomto prostoru hustá, ale pro $n > 1$ žádná posloupnost izolovaných bodů nekonverguje k nulovému bodu (tedy prostor není FU-prostor).
3. Žádný prostor $K_n$ ani $K_\omega$ není metrizovatelný.
4. Sekvenční prostor $K_2$ obsahuje jako svůj podprostor nesekvenční pseudovějíř.

Pomocí skoro disjunktních soustav se dají sestrojit topologické prostory se zajímavými vlastnostmi. Jedná se také o kombinace konvergentních posloupností.

**DEFINICE**

Nechť $P$ je nekonečná množina a $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soustava podmnožin $P$. Na množině $X = P \cup \mathcal{S}$ se zavede následující topologie pomocí bází okolí:
Body z $P$ jsou izolované, bod $S \in \mathcal{S}$ má za bázi okolí množiny $\{S\} \cup (S \setminus F)$, kde $F$ probíhá konečné podmnožiny v $S$.
Výsledný topologický prostor se značí $(P, \mathcal{S})$. Speciálně pro $P = \mathbb{N}$ a pro nekonečný maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{S}$ se prostor $(P, \mathcal{S})$ nazývá Mrówkův prostor.

**Mrówkův prostor**

1. Mrówkův prostor je separabilní prostor (množina jeho izolovaných bodů je spočetná a hustá), nemá spočetnou otevřenou bázi a tedy není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. V Mrówkově prostoru má každý bod lokální spočetnou bázi.
3. Množina všech hromadných bodů Mrówkova prostoru je nespočetná, uzavřená a nemá žádný hromadný bod.

**DEFINICE**

Nechť $P$ je nekonečná množina a $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soustava podmnožin $P$. Na množině $X = P \cup \mathcal{S}$ se zavede následující topologie pomocí bází okolí:
Body z $P$ jsou izolované, bod $S \in \mathcal{S}$ má za bázi okolí množiny $\{S\} \cup (S \setminus F)$, kde $F$ probíhá konečné podmnožiny v $S$.
Výsledný topologický prostor se značí $(P, \mathcal{S})$. Speciálně pro $P = \mathbb{N}$ a pro nekonečný maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{S}$ se prostor $(P, \mathcal{S})$ nazývá Mrówkův prostor.

**Mrówkův prostor**

1. Mrówkův prostor je separabilní prostor (množina jeho izolovaných bodů je spočetná a hustá), nemá spočetnou otevřenou bázi a tedy není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. V Mrówkově prostoru má každý bod lokální spočetnou bázi.
3. Množina všech hromadných bodů Mrówkova prostoru je nespočetná, uzavřená a nemá žádný hromadný bod.

**DEFINICE**

Nechť $P$ je nekonečná množina a $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soustava podmnožin $P$. Na množině $X = P \cup \mathcal{S}$ se zavede následující topologie pomocí bází okolí:
Body z $P$ jsou izolované, bod $S \in \mathcal{S}$ má za bázi okolí množiny $\{S\} \cup (S \setminus F)$, kde $F$ probíhá konečné podmnožiny v $S$.
Výsledný topologický prostor se značí $(P, \mathcal{S})$. Speciálně pro $P = \mathbb{N}$ a pro nekonečný maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{S}$ se prostor $(P, \mathcal{S})$ nazývá Mrówkův prostor.

## Mrówkův prostor

1. Mrówkův prostor je separabilní prostor (množina jeho izolovaných bodů je spočetná a hustá), nemá spočetnou otevřenou bázi a tedy není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. V Mrówkově prostoru má každý bod lokální spočetnou bázi.
3. Množina všech hromadných bodů Mrówkova prostoru je nespočetná, uzavřená a nemá žádný hromadný bod.

### DEFINICE

Nechť $P$ je nekonečná množina a $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soustava podmnožin $P$. Na množině $X = P \cup \mathcal{S}$ se zavede následující topologie pomocí bází okolí:
Body z $P$ jsou izolované, bod $S \in \mathcal{S}$ má za bázi okolí množiny $\{S\} \cup (S \setminus F)$, kde $F$ probíhá konečné podmnožiny v $S$.
Výsledný topologický prostor se značí $(P, \mathcal{S})$. Speciálně pro $P = \mathbb{N}$ a pro nekonečný maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{S}$ se prostor $(P, \mathcal{S})$ nazývá Mrówkův prostor.

### Mrówkův prostor

1. Mrówkův prostor je separabilní prostor (množina jeho izolovaných bodů je spočetná a hustá), nemá spočetnou otevřenou bázi a tedy není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. V Mrówkově prostoru má každý bod lokální spočetnou bázi.
3. Množina všech hromadných bodů Mrówkova prostoru je nespočetná, uzavřená a nemá žádný hromadný bod.

**DEFINICE**

Nechť $P$ je nekonečná množina a $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soustava podmnožin $P$. Na množině $X = P \cup \mathcal{S}$ se zavede následující topologie pomocí bází okolí:
Body z $P$ jsou izolované, bod $S \in \mathcal{S}$ má za bázi okolí množiny $\{S\} \cup (S \setminus F)$, kde $F$ probíhá konečné podmnožiny v $S$.
Výsledný topologický prostor se značí $(P, \mathcal{S})$. Speciálně pro $P = \mathbb{N}$ a pro nekonečný maximální skoro disjunktní systém $\mathcal{S}$ se prostor $(P, \mathcal{S})$ nazývá Mrówkův prostor.

**Mrówkův prostor**

1. Mrówkův prostor je separabilní prostor (množina jeho izolovaných bodů je spočetná a hustá), nemá spočetnou otevřenou bázi a tedy není metrizovatelný ani uspořádatelný.
2. V Mrówkově prostoru má každý bod lokální spočetnou bázi.
3. Množina všech hromadných bodů Mrówkova prostoru je nespočetná, uzavřená a nemá žádný hromadný bod.