1. Základy

Nápověda

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih a kol.

KMA MFF UK

2008

Topologické prostory lze chápat jako zobecnění metrických prostorů. To znamená, že každý metrický prostor (X, ρ) je zároveň prostor topologický.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. obsahuje spočetnou hustou část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory" je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

Topologické prostory lze chápat jako zobecnění metrických prostorů. To znamená, že každý metrický prostor (X, ρ) je zároveň prostor topologický.

Topologie příslušná dané metrice ρ má za bázi $\mathcal{B}$ otevřených množin například kolekci všech otevřených koulí, tj. $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r \in \mathbb{R}\}$.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory” je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

Topologické prostory lze chápat jako zobecnění metrických prostorů. To znamená, že každý metrický prostor (X, ρ) je zároveň prostor topologický.

Topologie příslušná dané metrice ρ má za bázi $\mathcal{B}$ otevřených množin například kolekci všech otevřených koulí, tj. $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r \in \mathbb{R}\}$.

Metrické prostory mají celou řadu pěkných vlastností, se kterými se u obecných topologických prostorů nesetkáváme často. Splňují například všechny oddělovací axiomy (viz kapitola 3). Dále řada pojmů v nich vyjde nastejno - například kompaktnost a sekvenciální kompaktnost. Řada vlastností metrických prostorů je shrnuta rovněž zde.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

Topologické prostory lze chápat jako zobecnění metrických prostorů. To znamená, že každý metrický prostor (X, ρ) je zároveň prostor topologický.

Topologie příslušná dané metrice ρ má za bázi $\mathcal{B}$ otevřených množin například kolekci všech otevřených koulí, tj. $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r \in \mathbb{R}\}$.

Metrické prostory mají celou řadu pěkných vlastností, se kterými se u obecných topologických prostorů nesetkáváme často. Splňují například všechny oddělovací axiomy (viz kapitola 3). Dále řada pojmů v nich vyjde nastejno - například kompaktnost a sekvenciální kompaktnost. Řada vlastností metrických prostorů je shrnuta rovněž zde.

Dalším příkladem je následující fakt:

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. obsahuje spočetnou hustou část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory" je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory” je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory" je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory" je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory" je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

TVRZENÍ (Tři ekvivalentní vlastnosti v metrických prostorech)

V metrickém prostoru (X, ρ) jsou následující výroky ekvivalentní:

(i) *Prostor X má spočetnou bázi otevřených množin.*

(ii) *Prostor X je separabilní (tj. existuje spočetná hustá část).*

(iii) *Prostor X je Lindelöfův (z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí).*

Toho se dá využít třeba tehdy, když chceme ukázat, že nějaký prostor není metrizovatelný. (Má-li třeba vlastnost (ii) ale ne (i), už víme, že není metrizovatelný.)

V obecných topologických prostorech platí pouze implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (i) $\Rightarrow$ (iii). Na ostatní implikace jsou snadné protipříklady. Navíc jediná z těchto tří vlastností, která se (vždy) „dědí na podprostory" je (i). V metrických prostorech se však separabilita i Lindelöfovost pochopitelně na podprostory dědí - právě díky výše uvedené ekvivalenci a faktu, že spočetnost báze dědičná je.

Další důležitou vlastností, s jejíž pomocí lze dokázat, že některé topologické prostory nejsou metrizovatelné, je tak zvaný 1. Axiom spočetnosti.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

LEMMA

Každý metrický prostor splňuje 1. Axiom spočetnosti.

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

LEMMA

Každý metrický prostor splňuje 1. Axiom spočetnosti.

Důkaz.

Pro daný bod x metrického prostoru (X, ρ) totiž množina $\mathcal{U} := \{B(x, q) : q \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$ tvoří lokální bázi (bázi filtru okolí bodu x) a je samozřejmě nejvýše spočetná (pochopitelně nemusí být nekonečná - např. v případě, kdy prostor X je konečný). □

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Příklad

Ukažte, že prostor $C([0, 1])$ s topologií bodové konvergence není metrizovatelný. Řešení

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Příklad

Ukažte, že prostor $C([0,1])$ s topologií bodové konvergence není metrizovatelný. Řešení

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 1. Axiom spočetnosti, pokud každý bod $x \in X$ má (nejvýše) spočetnou bázi okolí. (Tj. jde o prostor s lokální spočetnou bází nebo též prvospočetný prostor.)

Pro úplnost ještě připomeňme takzvaný 2. Axiom spočetnosti:

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ splňuje 2. Axiom spočetnosti, má-li nějakou spočetnou bázi otevřených množin.

Je jasné, že druhý axiom spočetnosti implikuje první. Abychom si je nepletli, stačí si zapamatovat, že silnější axiom má větší číslo.

Pochopitelně ne všechny metrické prostory splňují 2. Axiom spočetnosti, protože ne všechny metrické prostory jsou separabilní (například diskrétní prostor na nespočetné množině nebo ℓ^∞ - prostor všech omezených posloupností se supremovou normou).

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).

Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0\le\alpha<\beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Je zřejmé, že definice polského prostoru nezávisí na volbě ekvivalentní metriky. Úplnost však není topologický pojem a na volbě ekvivalentní metriky tedy obecně závisí.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Je zřejmé, že definice polského prostoru nezávisí na volbě ekvivalentní metriky. Úplnost však není topologický pojem a na volbě ekvivalentní metriky tedy obecně závisí.

Jmenujme ještě několik zajímavých vlastností separabilních nebo úplných metrických prostorů.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

▸ Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

▸ Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0\leq\alpha<\beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

DEFINICE

Řekneme, že metrický prostor (X, d) je úplný (metrika d je na prostoru X úplná), jestliže každá posloupnost cauchyovská v metrice d konverguje (k nějakému bodu v prostoru X).
Řekneme, že prostor X je polský, pokud je separabilní a metrizovatelný úplnou metrikou.

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

▸ Důkaz

Mohlo by se zdát, že když má prostor v každém bodě spočetnou lokální bázi a je separabilní, musí už mít spočetnou bázi otevřených množin. Idea důkazu, která se nabízí, je, že vezmeme nějakou spočetnou hustou část a sjednotíme lokální báze příslušné prvkům této husté části. Výsledek by měla být báze otevřených množin celého prostoru. V zásadě přesně tímto způsobem se dokáže, že v metrickém prostoru separabilita implikuje existenci spočetné báze otrevřených množin.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi

Mohlo by se zdát, že když má prostor v každém bodě spočetnou lokální bázi a je separabilní, musí už mít spočetnou bázi otevřených množin. Idea důkazu, která se nabízí, je, že vezmeme nějakou spočetnou hustou část a sjednotíme lokální báze příslušné prvkům této husté části. Výsledek by měla být báze otevřených množin celého prostoru. V zásadě přesně tímto způsobem se dokáže, že v metrickém prostoru separabilita implikuje existenci spočetné báze otrevřených množin.

V topologickém prostoru však tato idea obecně neprojde, což demonstruje řada protipříkladů. Jedním z nich je tak zvaná Sorgenfreyova přímka (viz druhá kapitola). Tento prostor je vcelku rozumný - například splňuje všechny oddělovací axiomy (viz třetí kapitola). Přesto je separabilní a zároveň splňuje 1. Axiom spočetnosti, a přitom nesplňuje 2. Axiom spočetnosti (tj. nemá spočetnou bázi otevřených množin). Kromě toho není Lindelöfův, takže současně poskytuje pěkný protipříklad na implikaci „separabilní $\Rightarrow$ Lindelöfův" (ta tedy skutečně platí pouze v metrických prostorech).

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

Jednodušším příkladem je tak zvaná *topologie konkrétního bodu* (anglicky *particular point topology*):

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ báze filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} = \{\{x, p\};\ x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} = \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

▶ Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

Tato topologie má celou řadu patologických vlastností, které se liší v závislosti na mohutnosti nosné množiny X. Abychom demonstrovali, že separabilita společně s lokálně spočetnou bází neimplikuje existenci spočetné báze všech otevřených množin, budeme potřebovat, aby množina X byla nespočetná.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

Tato topologie má celou řadu patologických vlastností, které se liší v závislosti na mohutnosti nosné množiny X. Abychom demonstrovali, že separabilita společně s lokálně spočetnou bází neimplikuje existenci spočetné báze všech otevřených množin, budeme potřebovat, aby množina X byla nespočetná.

Uveďme nyní několik základních vlastností topologie konkrétního bodu (které na mohutnosti X nezávisí).

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

▸ Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

▸ Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

▸ Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

DEFINICE

Nechť X je neprázdná množina a nechť $p \in X$. Otevřené množiny na X definujeme jako právě všechny množiny obsahující bod p. Tato topologie se nazývá topologie konkrétního bodu.

TVRZENÍ

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz

Vidíme tedy, že prostor X je separabilní a má v každém bodě spočetnou lokální bázi. Zvolíme-li však množinu X nespočetnou, bod 6 tvrzení dává, že náš prostor nemá žádnou spočetnou bázi otevřených množin.

Další věc, která stojí za povšimnutí, je, že všechny body prostoru jsou hromadnými body množiny $\{p\}$, tedy jednobodové množiny. Z metrických prostorů jsme přitom zvyklí, že každá jednobodová (dokonce konečná) množina je uzavřená a nemá žádné hromadné body.

Jednoduchý příklad topologie konkrétního bodu nám už ukázal, že následující definice dávají v topologických prostorech obecně jiné pojmy, než je už zavedený pojem hromadného bodu .

DEFINICE

Buď X nějaký topologický prostor a A nějaká jeho podmnožina. Řekneme, že bod $x \in X$ je

(i) ω-hromadným bodem množiny A, pokud každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů A.

(ii) kondenzačním bodem množiny A, pokud každé okolí bodu x obsahuje *nespočetně* mnoho bodů A.

Jednoduchý příklad topologie konkrétního bodu nám už ukázal, že následující definice dávají v topologických prostorech obecně jiné pojmy, než je už zavedený pojem hromadného bodu .

DEFINICE

Buď X nějaký topologický prostor a A nějaká jeho podmnožina. Řekneme, že bod $x \in X$ je

(i) ω-hromadným bodem množiny A, pokud každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů A.
(ii) kondenzačním bodem množiny A, pokud každé okolí bodu x obsahuje *nespočetně* mnoho bodů A.

Dále se často zavádí následující definice:

DEFINICE

Buď A podmnožina topologického prostoru X. Definujeme derivaci množiny A jako množinu všech jejích hromadných bodů, značíme A'. Dále řekneme, že množina A je dokonalá (též perfektní), jestliže $\overline{A} = A$ a zároveň $A' = A$ (tj. A je uzavřená a nemá izolované body).

Je snadné si rozmyslet, že platí rovnost $\overline{A} = A \cup A'$ a že body rozdílu $A \setminus A'$ jsou právě izolované body množiny A (jako podprostoru). Další důležitý pojem je rovněž hranice množiny - viz zde.

Je-li X metrický prostor, lze uzávěr ekvivalentně definovat jako $\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \to x\}$.

Z tohoto faktu lze mimo jiné například snadno zjistit, že každý separabilní metrický prostor má nejvýše mohutnost kontinua. Stačí si uvědomit, že je-li $H \subseteq X$ spočetná hustá, konverguje ke každému bodu X nějaká posloupnost $(x_n) \subseteq H$ a těch je nejvýše kontinuum.

DEFINICE

Buď A podmnožina topologického prostoru X. Definujeme derivaci množiny A jako množinu všech jejích hromadných bodů, značíme A'. Dále řekneme, že množina A je dokonalá (též perfektní), jestliže $\overline{A} = A$ a zároveň $A' = A$ (tj. A je uzavřená a nemá izolované body).

Je snadné si rozmyslet, že platí rovnost $\overline{A} = A \cup A'$ a že body rozdílu $A \setminus A'$ jsou právě izolované body množiny A (jako podprostoru). Další důležitý pojem je rovněž hranice množiny - viz zde.

Je-li X metrický prostor, lze uzávěr ekvivalentně definovat jako $\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \to x\}$.

Z tohoto faktu lze mimo jiné například snadno zjistit, že každý separabilní metrický prostor má nejvýše mohutnost kontinua. Stačí si uvědomit, že je-li $H \subseteq X$ spočetná hustá, konverguje ke každému bodu X nějaká posloupnost $(x_n) \subseteq H$ a těch je nejvýše kontinuum.

DEFINICE

Buď A podmnožina topologického prostoru X. Definujeme derivaci množiny A jako množinu všech jejích hromadných bodů, značíme A'. Dále řekneme, že množina A je dokonalá (též perfektní), jestliže $\overline{A} = A$ a zároveň $A' = A$ (tj. A je uzavřená a nemá izolované body).

Je snadné si rozmyslet, že platí rovnost $\overline{A} = A \cup A'$ a že body rozdílu $A \setminus A'$ jsou právě izolované body množiny A (jako podprostoru). Další důležitý pojem je rovněž hranice množiny - viz zde.

Je-li X metrický prostor, lze uzávěr ekvivalentně definovat jako $\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \to x\}$.

Z tohoto faktu lze mimo jiné například snadno zjistit, že každý separabilní metrický prostor má nejvýše mohutnost kontinua. Stačí si uvědomit, že je-li $H \subseteq X$ spočetná hustá, konverguje ke každému bodu X nějaká posloupnost $(x_n) \subseteq H$ a těch je nejvýše kontinuum.

DEFINICE

Buď A podmnožina topologického prostoru X. Definujeme derivaci množiny A jako množinu všech jejích hromadných bodů, značíme A'. Dále řekneme, že množina A je dokonalá (též perfektní), jestliže $\overline{A} = A$ a zároveň $A' = A$ (tj. A je uzavřená a nemá izolované body).

Je snadné si rozmyslet, že platí rovnost $\overline{A} = A \cup A'$ a že body rozdílu $A \setminus A'$ jsou právě izolované body množiny A (jako podprostoru). Další důležitý pojem je rovněž hranice množiny - viz zde.

Je-li X metrický prostor, lze uzávěr ekvivalentně definovat jako $\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \to x\}$.

Z tohoto faktu lze mimo jiné například snadno zjistit, že každý separabilní metrický prostor má nejvýše mohutnost kontinua. Stačí si uvědomit, že je-li $H \subseteq X$ spočetná hustá, konverguje ke každému bodu X nějaká posloupnost $(x_n) \subseteq H$ a těch je nejvýše kontinuum.

DEFINICE

Buď A podmnožina topologického prostoru X. Definujeme derivaci množiny A jako množinu všech jejích hromadných bodů, značíme A'. Dále řekneme, že množina A je dokonalá (též perfektní), jestliže $\overline{A} = A$ a zároveň $A' = A$ (tj. A je uzavřená a nemá izolované body).

Je snadné si rozmyslet, že platí rovnost $\overline{A} = A \cup A'$ a že body rozdílu $A \setminus A'$ jsou právě izolované body množiny A (jako podprostoru). Další důležitý pojem je rovněž hranice množiny - viz zde.

Je-li X metrický prostor, lze uzávěr ekvivalentně definovat jako $\overline{A} = \{x \in X : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \to x\}$.

Z tohoto faktu lze mimo jiné například snadno zjistit, že každý separabilní metrický prostor má nejvýše mohutnost kontinua. Stačí si uvědomit, že je-li $H \subseteq X$ spočetná hustá, konverguje ke každému bodu X nějaká posloupnost $(x_n) \subseteq H$ a těch je nejvýše kontinuum.

Příklad topologie konkrétního bodu však ukazuje, že tento popis uzávěru v topologických prostorech obecně nemá šanci fungovat (jde o separabilní topologii bez ohledu na mohutnost nosné množiny). Nejjednodušším příkladem na tento fakt je však samozřejmě indiskrétní prostor na libovolné množině mohutnosti větší než kontinuum (indiskrétní prostor je totiž triviálně separabilní).