LEBESGUEOVA MÍRA

Tento krátký **provizorní** text se vztahuje k části látky přednášené v předmětu **M230 Teorie míry a integrálu**. Zahrnuje alternativní (v učebnicích zatím nerozpracovaný) podrobný výklad zavedení Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^k$ založený na *vnitřní aproximaci*. Tento postup přihlíží k současným trendům teorie míry (abstraktní i topologické), která v posledních desetiletích prochází stádiem určité restrukturalizace svých základů.

Text bude rozšířen o další odstavce a doplněn o metodické a historické poznámky i komentáře.

Za *veškeré* připomínky budu vděčen. Zašlete je, prosím, k mým rukám na Matematický ústav UK (MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8) nebo na níže uvedenou adresu elektronické pošty.

listopad 1998 Ivan Netuka

`netuka@karlin.mff.cuni.cz`

Poznámka. V září r. 2000 byly v textu provedeny drobné úpravy a bylo opraveno několik tiskových chyb. Kód výše zmíněného předmětu se změnil na **MAA068**.

1 Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^k$

V tomto odstavci připomeneme označení, které budeme v textu užívat, a shrneme nejdůležitější vlastnosti kompaktních množin v $\mathbb{R}^k$.

Pro systém přirozených, celých, racionálních a reálných čísel užíváme obvyklé označení: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Definujeme $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Je-li X libovolná množina a $A \subset X$, pak místo $X \setminus A$ píšeme často A^c. Jestliže $\{A_n\}$ je posloupnost podmnožin, pak symbol $A_n \nearrow A$ (resp. $A_n \searrow A$) znamená, že $A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subset A_n$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (resp. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$). Je-li $\mathcal{L}$ systém podmnožin množiny X, říkáme, že $\mathcal{L}$ je *nahoru* (resp. *dolů*) *filtrující*, jestliže pro každé $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ existuje $L \in \mathcal{L}$ tak, že $L_1 \subset L$ a $L_2 \subset L$ (resp. $L \subset L_1$ a $L \subset L_2$).

Připomeňme, že pro množinu $K \subset \mathbb{R}^k$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *K je uzavřená a omezená;*

(ii) *každé otevřené pokrytí množiny K obsahuje konečné podpokrytí;*

(iii) *každá nekonečná podmnožina množiny K má v K hromadný bod.*

Říkáme, že množina $K \subset \mathbb{R}^k$ je *kompaktní*, jestliže platí některá z uvedených podmínek. Systém všech kompaktních podmnožin prostoru $\mathbb{R}^k$ značíme $\mathcal{K}^k$. (K podmínce (ii) připomeňme, že *otevřeným pokrytím* množiny K rozumíme systém $\mathcal{O}$ otevřených množin v $\mathbb{R}^k$, pro nějž $K \subset \bigcup \mathcal{O}$. Požadavek, že otevřené pokrytí $\mathcal{O}$ množiny K *obsahuje konečné podpokrytí* pak znamená, že existuje konečný systém $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ takový, že $K \subset \bigcup \mathcal{O}_1$.)

Zřejmě $\emptyset \in \mathcal{K}^k$ a pro $K, L \in \mathcal{K}^k$ je $K \cup L \in \mathcal{K}^k$. Průnik libovolného systému množin z $\mathcal{K}^k$ padne do $\mathcal{K}^k$.

Jestliže $\mathcal{H} \neq \emptyset$ je systém kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^k$ a každý konečný podsystém $\mathcal{H}$ má neprázdný průnik, pak $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$. (Předpokládáme, že $\bigcap \mathcal{H} = \emptyset$, položíme $\mathcal{O} := \{H^c;\ H \in \mathcal{H}\}$ a zvolíme $H_0 \in \mathcal{H}$. Potom je $H_0 \cap \bigcap \mathcal{H} = \emptyset$, tedy $\mathcal{O}$ je otevřené pokrytí množiny H_0. To však znamená, že existují $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{H}$ tak, že $H_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} H_j^c$. Odtud vyplývá, že $H_0 \cap H_1 \cap \ldots \cap H_n \neq \emptyset$, což je spor.)

Odtud snadno plyne toto tvrzení: *Jestliže $\mathcal{L} \neq \emptyset$ je dolů filtrující systém kompaktních množin v $\mathbb{R}^k$, $K = \bigcap \mathcal{L}$ a V je otevřená množina taková, že $K \subset V$, potom existuje množina $L \in \mathcal{L}$, pro niž $L \subset V$.* Je-li totiž $\mathcal{H} := \{L \cap V^c;\ L \in \mathcal{L}\}$, pak $\bigcap \mathcal{H} = K \cap V^c = \emptyset$, a existují $L_1, \ldots, L_n \in \mathcal{L}$ tak, že $(L_1 \cap V^c) \cap \ldots \cap (L_n \cap V^c) = \emptyset$, neboli $L_1 \cap \ldots \cap L_n \subset V$. Protože $\mathcal{L}$ je dolů filtrující, existuje $L \in \mathcal{L}$ taková, že $L \subset L_1 \cap \ldots \cap L_n$.

2 Míra kompaktních množin

V tomto odstavci přiřadíme každé kompaktní množině v $\mathbb{R}^k$ přirozeným způsobem její „míru“, tedy určité nezáporné číslo, které v $\mathbb{R}^3$ bude intuitivně představovat objem, v $\mathbb{R}^2$ obsah a v $\mathbb{R}^1$ délku.

Pro $s \in \mathbb{N}_0$ označíme $\mathcal{M}_s$ systém kompaktních krychlí $Q \subset \mathbb{R}^k$, které se získají s-násobným postupným půlením hran kompaktních krychlí s vrcholy v bodech $\mathbb{Z}^k$, tedy v bodech s celočíselnými souřadnicemi. Podrobněji: $\mathcal{M}_s$ je systém všech množin

$$Q(p) := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k\,;\ \frac{1}{2^s}(p_j - 1) \leq x_j \leq \frac{1}{2^s} p_j,\ j \in \{1, \ldots, k\} \right\},$$

kde $p = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$.

Nechť $K \in \mathcal{K}^k$. Pro $s \in \mathbb{N}_0$ definujeme

$$Z_s(K) := \operatorname{card}\{Q \in \mathcal{M}_s;\ Q \cap K \neq \emptyset\}\,;$$

zde ovšem card znamená počet prvků, a tedy číslo $(1/2^{sk})Z_s(K)$ má intuitivní význam součtu objemů všech krychlí $Q \in \mathcal{M}_s$, které protínají K. Všimněme si, že rozpůlením hran dostaneme z každé z krychlí $Q \in \mathcal{M}_s$ celkem 2^k krychlí z $\mathcal{M}_{s+1}$. Navíc $Q \cap K \neq \emptyset$, právě když alespoň jedna z těchto 2^k krychlí protne K. Odtud plyne nerovnost $Z_{s+1}(K) \leq 2^k Z_s(K)$, neboli

$$\frac{1}{2^{(s+1)k}} Z_{s+1}(K) \leq \frac{1}{2^{sk}} Z_s(K)\,.$$

Položme

$$\lambda(K) := \lim_{s \to \infty} \frac{1}{2^{sk}} Z_s(K)\,.$$

Zřejmě je $\lambda(\emptyset) = 0$ a $\lambda(K) = \inf\left\{(1/2^{sk})Z_s(K);\ s \in \mathbb{N}_0\right\}$. Pokud bude užitečné zdůraznit dimenzi prostoru $\mathbb{R}^k$, budeme místo $\mathcal{M}_s, Z_s(K)$ a λ psát $\mathcal{M}_s^k, Z_s^k(K)$ a λ_k.

Samozřejmě nás zajímá, zda množinová funkce $\lambda : \mathcal{K}^k \to \langle 0, \infty)$ má vlastnosti, které bychom od funkce představující zobecnění objemu očekávali. Pokud např. $K, L \in \mathcal{K}^k$ jsou disjunktní množiny, platí $\lambda(K \cup L) = \lambda(K) + \lambda(L)$? Je λ invariantní vůči posunutí? Pro kompaktní interval I, počítá se $\lambda(I)$ jako součin délek hran?

Na tyto otázky v tomto odstavci odpovíme. Dokážeme také některé další vlastnosti funkce λ; ty nám později umožní rozšířit funkci λ přirozeným způsobem z $\mathcal{K}^k$ na velmi bohatý množinový systém.

Poznámka 2.1. *Je-li $A \in \mathcal{K}^m, B \in \mathcal{K}^n$, je $\lambda_{m+n}(A \times B) = \lambda_m(A)\lambda_n(B)$.* Pro každou krychli $Q \in \mathcal{M}_s^{m+n}$ totiž existují krychle $U \in \mathcal{M}_s^m$ a $V \in \mathcal{M}_s^n$ takové, že $Q = U \times V$. Zřejmě $Q \cap (A \times B) \neq \emptyset$, právě když $U \cap A \neq \emptyset$ a $V \cap B \neq \emptyset$. Proto je $Z_s^{m+n}(A \times B) = Z_s^m(A) Z_s^n(B)$. Nyní je platnost tvrzení zřejmá.

Tvrzení 2.2. *Nechť* $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$, $a_j \le b_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$, *a nechť* $K = \langle a, b\rangle := \big\{x \in \mathbb{R}^k;\ a_j \le x_j \le b_j,\ j \in \{1, \dots, k\}\big\}$. *Potom*

$$\lambda(K) = (b_1 - a_1) \dots (b_k - a_k)\,.$$

Důkaz. V důsledku (2.1) se stačí omezit na případ $k = 1$. Nejprve dokážeme toto: *Je-li* $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ *a* $N := \operatorname{card}(\mathbb{Z} \cap \langle a, b\rangle)$, *pak platí*

$$(b - a) - 1 < N \le (b - a) + 1\,.$$

Jsou-li totiž $m, n \in \mathbb{Z}$ takové, že $m - 1 < a \le m$ a $n \le b < n + 1$, pak $N = n - m + 1$. Nyní se výsledek dostane sečtením obou nerovností $-a < -m + 1 \le -a + 1$ a $b - 1 < n \le b$.

Jestliže $s \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{Z}$, pak $Q(p) \cap \langle a, b\rangle \ne \emptyset$, právě když $a \le (1/2^s)p$ a $(1/2^s)(p - 1) \le b$, neboli $2^s a \le p \le 2^s b + 1$, takže podle první části důkazu je $2^s(b - a) < Z_s(K) \le 2^s(b - a) + 2$. Rovnost $\lambda(\langle a, b\rangle) = b - a$ pak plyne z definice λ. □

Poznámka 2.3. Z definice ihned plyne: Jsou-li $K, L \in \mathcal{K}^k$ a $K \subset L$, potom $\lambda(K) \le \lambda(L)$.

Tvrzení 2.4. *Nechť* $\mathcal{L} \ne \emptyset$ *je dolů filtrující podmnožina* $\mathcal{K}^k$ *a* $K := \bigcap \mathcal{L}$. *Potom*

$$\lambda(K) = \inf\{\lambda(L); L \in \mathcal{L}\}\,.$$

Důkaz. V důkazu nám bude užitečný tento postřeh: *Je-li* $V \subset \mathbb{R}^k$ *otevřená množina,* $K \subset V$, *pak podle odst. 1 existuje* $L \in \mathcal{L}$ *tak, že* $L \subset V$.

Označme $R := \inf\{\lambda(L);\ L \in \mathcal{L}\}$. Zřejmě $\lambda(K) \le R$. Budeme dokazovat obrácenou nerovnost. Zvolme $s, t \in \mathbb{N}_0$, $s \le t$, dále pak $p \in \mathbb{Z}^k$ a $Q = Q(p) \in \mathcal{M}_s$. Označme Q^* kompaktní krychli, která z Q vznikne zvětšením každé hrany na obou stranách o $1/2^t$. Tudíž Q^* je kartézským součinem intervalů

$$\left\langle \frac{1}{2^s}(p_j - 1) - \frac{1}{2^t},\ \frac{1}{2^s}p_j + \frac{1}{2^t} \right\rangle\,,$$

neboli

$$\left\langle \frac{1}{2^t}(2^{t-s}(p_j - 1) - 1),\ \frac{1}{2^t}(2^{t-s}p_j + 1) \right\rangle,\ j \in \{1, \dots, k\}\,.$$

Zřejmě $Q \subset \operatorname{Int} Q^* \subset Q^*$ (zde ovšem Int označuje *vnitřek* množiny) a počet krychlí z $\mathcal{M}_t$, z nichž se Q^* skládá, je roven

$$\prod_{j=1}^{k} \big((2^{t-s}p_j + 1) - (2^{t-s}(p_j - 1) - 1)\big) = (2^{t-s} + 2)^k\,.$$

Označme $V := \bigcup\{\operatorname{Int} Q^*;\ Q \in \mathcal{M}_s,\ Q \cap K \ne 0\}$. Pak V je otevřená množina a

$$K \subset \bigcup\{Q;\ Q \in \mathcal{M}_s,\ Q \cap K \ne \emptyset\} \subset V\,.$$

Podle postřehu uvedeného na začátku důkazu existuje $L \in \mathcal{L}$ tak, že $L \subset V$, neboli

$$L \subset \bigcup \{\operatorname{Int} Q^*;\ Q \in \mathcal{M}_s,\ Q \cap K \neq \emptyset\} \subset \bigcup \{Q^*;\ Q \in \mathcal{M}_s,\ Q \cap K \neq \emptyset\}\ .$$

Napravo v poslední inkluzi je množina, která je sjednocením krychlí z $\mathcal{M}_t$ a jejich počet je nejvýše $(2^{t-s}+2)^k Z_s(K)$. Platí tedy

$$R \leq \lambda(L) \leq \frac{1}{2^{tk}} Z_t(L) \leq \frac{1}{2^{tk}} (2^{t-s}+2)^k Z_s(K) = \left(\frac{1}{2^s} + \frac{2}{2^t}\right)^k Z_s(K)\,.$$

Tato nerovnost je splněna pro všechna $s, t \in \mathbb{N}_0,\ s \leq t$. Pro $t \to \infty$ dostáváme odtud pro každé $s \in \mathbb{N}_0$ nerovnost $R \leq (1/2^{sk}) Z_s(K)$. Podle definice $\lambda(K)$ platí $R \leq \lambda(K)$. □

Domluvme se, že číslo $x \in \mathbb{R}$ nazveme *dyadicky racionální*, když existují $p \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ tak, že $x = p/2^n$. Bod $v \in \mathbb{R}^k$ nazveme *dyadicky racionální*, když všechny jeho souřadnice jsou dyadicky racionální.

Pro $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^k$ a $x \in \mathbb{R}^k$ definujeme $d(x, A) := \inf\{|x-y|;\ y \in A\}$ (vzdálenost bodu x od množiny A). Protože $|d(x,A) - d(y,A)| \leq |x-y|$, kdykoli $x, y \in \mathbb{R}^k$, je funkce $x \mapsto d(x, A)$ spojitá na $\mathbb{R}^k$.

Pro $\emptyset \neq K \in \mathcal{K}^k$ a $\delta > 0$ definujeme $K(\delta) := \{x \in \mathbb{R}^k;\ d(x,K) \leq \delta\}$. Zřejmě je množina $K(\delta)$ omezená a uzavřená, neboť funkce $x \mapsto d(x, K)$, $x \in \mathbb{R}^k$, je spojitá. Tudíž $K(\delta) \in \mathcal{K}^k$ a zřejmě $K \subset \operatorname{Int} K(\delta)$. Systém $\{K(\delta); \delta > 0\}$ je dolů filtrující a $\bigcap\{K(\delta);\ \delta > 0\} = K$.

Pro $A \subset \mathbb{R}^k$ a $v \in \mathbb{R}^k$ definujeme $A + v := \{x + v;\ x \in A\}$.

Tvrzení 2.5. *Nechť $K \in \mathcal{K}^k$ a $v \in \mathbb{R}^k$. Potom*

$$\lambda(K+v) = \lambda(K)\,.$$

Důkaz. Lze předpokládat, že $K \neq \emptyset$. Je-li $v = (v_1, \dots, v_k)$ dyadicky racionální bod, pak existuje $r \in \mathbb{N}_0$ takové, že $2^r v_j \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \dots, k\}$. Pro každé $s \in \mathbb{N}_0,\ s \geq r$, je pak $Z_s(K+v) = Z_s(K)$, tudíž $\lambda(K+v) = \lambda(K)$.

Nyní uvažujme bod $v \in \mathbb{R}^k$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $\{K(\delta);\ \delta > 0\}$ je dolů filtrující systém s průnikem K, existuje podle (2.4) δ_0 takové, že $\lambda(K(\delta_0)) < \lambda(K) + \varepsilon$. Zvolme dyadicky racionální bod $v_0 \in \mathbb{R}^k$ tak, aby $|v - v_0| < \delta_0$. Potom $K + v - v_0 \subset K(\delta_0)$, tudíž podle (2.3) platí

$$\lambda(K + v - v_0) \leq \lambda(K(\delta_0)) < \lambda(K) + \varepsilon\,,$$

a podle první části důkazu pak je

$$\lambda(K+v) \ = \ \lambda(K + v - v_0 + v_0) \ = \ \lambda(K + v - v_0) < \lambda(K) + \varepsilon\,.$$

Nerovnost $\lambda(K+v) \leq \lambda(K) + \varepsilon$ platí tudíž pro každé $\varepsilon > 0$. Tím je dokázáno, že $\lambda(K+v) \leq \lambda(K)$, kdykoli $K \in \mathcal{K}^k$ a $v \in \mathbb{R}^k$. Aplikujeme-li tento výsledek na množinu $K + v \in \mathcal{K}$ a vektor $-v \in \mathbb{R}^k$, dostaneme $\lambda(K) = \lambda(K + v - v) \leq \lambda(K+v)$. □

Tvrzení 2.6. *Pro $K, L \in \mathcal{K}^k$ platí*

$$\lambda(K \cap L) + \lambda(K \cup L) = \lambda(K) + \lambda(L)\,.$$

Důkaz. Rovnost je zřejmá, pokud $K = \emptyset$ nebo $L = \emptyset$. Předpokládejme tudíž, že obě množiny K, L jsou neprázdné. Volme $s \in \mathbb{N}_0$ a označme $N_s := \mathrm{card}\{Q \in \mathcal{M}_s;\ Q \cap K \neq \emptyset,\ Q \cap L \neq \emptyset\}$. Potom

$$Z_s(K \cup L) + N_s = Z_s(K) + Z_s(L)\,,$$

a tedy

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{2^{sk}} N_s = \lambda(K) + \lambda(L) - \lambda(K \cup L)\,.$$

Nechť $\delta > 0$. Dokažme, že pro $s \in \mathbb{N}_0$ splňující $(1/2^s)\sqrt{k} \leq \delta$ platí nerovnosti

$$Z_s(K \cap L) \leq N_s \leq Z_s\left(K(\delta) \cap L\right)\,.$$

První nerovnost je zřejmá (platí pro libovolné $s \in \mathbb{N}_0$). Dokazujeme druhou nerovnost. Je-li $Q \in \mathcal{M}_s$ takové, že $K \cap Q \neq \emptyset$, $L \cap Q \neq \emptyset$, zvolíme $x \in K \cap Q$ a $y \in L \cap Q$. Protože $x, y \in Q$, platí $|x - y| \leq (1/2^s)\sqrt{k} \leq \delta$, takže $y \in K(\delta)$. Tudíž $y \in (K(\delta) \cap L) \cap Q$. Každá krychle $Q \in \mathcal{M}_s$, která protne obě množiny K, L, protne množinu $K(\delta) \cap L$. Tím je druhá nerovnost dokázána. Dělíme nerovnosti číslem $1/2^{sk}$ a pro $s \to \infty$ dostáváme

$$\lambda(K \cap L) \leq \lambda(K) + \lambda(L) - \lambda(K \cup L) \leq \lambda\left(K(\delta) \cap L\right)\,.$$

Protože $\{K(\delta) \cap L;\ \delta > 0\}$ je dolů filtrující systém s průnikem $K \cap L$, je podle (2.4)

$$\inf\{\lambda\left(K(\delta) \cap L\right);\ \delta > 0\} = \lambda(K \cap L)\,,$$

tedy

$$\lambda(K \cap L) + \lambda(K \cup L) = \lambda(K) + \lambda(L)\,,$$

což je již dokazovaná rovnost. □

Tvrzení 2.7. *Nechť $K_n, K \in \mathcal{K}^k$, $n \in \mathbb{N}$, $K_n \nearrow K$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lambda(K)\,.$$

Důkaz. Označme $R := \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n)$. Zřejmě $R \leq \lambda(K)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K důkazu nerovnosti $R \geq \lambda(K)$ stačí dokázat, že existuje neklesající posloupnost $\{L_n\}$ množin z $\mathcal{K}^k$ taková, že $K_n \subset \operatorname{Int} L_n$ a

$$\lambda(L_n) < \lambda(K_n) + \varepsilon\,(1 - 1/2^n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{$*$}$$

Skutečně, platí-li $(*)$, je $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int} L_n$ a tedy existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \operatorname{Int} L_m \subset L_m$. Potom $\lambda(K) \leq \lambda(L_m) < \lambda(K_m) + \varepsilon \leq R + \varepsilon$. Odtud dostáváme $\lambda(K) \leq R$.

Dokazujeme $(*)$. Můžeme předpokládat, že $K_n \neq \emptyset$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podle (2.4) existují čísla $\delta_n > 0$ tak, že $\lambda\left(K_n(\delta_n)\right) < \lambda(K_n) + \varepsilon/2^n$. Položme $L_n := K_1(\delta_1) \cup \ldots \cup K_n(\delta_n)$. Zřejmě $\{L_n\}$ je neklesající posloupnost kompaktních množin splňujících $K_n \subset \operatorname{Int} L_n \subset L_n$. Zřejmě

$$\lambda(L_1) = \lambda\left(K_1(\delta_1)\right) < \lambda(K_1) + \varepsilon/2\,,$$

takže $(*)$ platí pro $n = 1$. Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a že $(*)$ platí pro n. Ukážeme, že platí pro $n+1$. Připomeňme, že $L_{n+1} = L_n \cup K_{n+1}(\delta_{n+1})$ a $K_n \subset L_n \cap K_{n+1}(\delta_{n+1})$, takže $-\lambda(L_n \cap K_{n+1}(\delta_{n+1})) \leq -\lambda(K_n)$. Podle (2.6) dostáváme pomocí $(*)$

$$\begin{aligned}
\lambda(L_{n+1}) - \lambda(K_{n+1}) &= \lambda(L_n \cup K_{n+1}(\delta_{n+1})) = \\
&= \lambda(L_n) + \lambda(K_{n+1}(\delta_{n+1})) - \lambda(L_n \cap K_{n+1}(\delta_{n+1})) - \lambda(K_{n+1}) \leq \\
&\leq \lambda(L_n) - \lambda(K_n) + \lambda(K_{n+1}(\delta_{n+1})) - \lambda(K_{n+1}) < \\
&< \varepsilon(1 - 1/2^n) + \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon\left(1 - 1/2^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Indukcí jsme tedy ověřili $(*)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Tvrzení 2.8. *Nechť* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^k,\ K_1 \subset K_2$. *Potom*

$$\lambda(K_2) - \lambda(K_1) = \sup\{\lambda(K);\ K \in \mathcal{K}^k,\ K \subset K_2 \setminus K_1\}.$$

Důkaz. Lze předpokládat, že $K_1 \neq \emptyset$. Potom $K_1 \cup (K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1(1/n)) \nearrow K_2$, takže podle (2.7) je

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(K_1 \cup (K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1\,(1/n))\right) = \lambda(K_2).$$

Podle (2.6) platí $\lambda\left(K_1 \cup (K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1(1/n))\right) = \lambda(K_1) + \lambda\left(K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1(1/n)\right)$, tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\left(K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1\,(1/n)\right) = \lambda(K_2) - \lambda(K_1).$$

Vzhledem k tomu, že $K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1(1/n) \in \mathcal{K}^k$ a $K_2 \setminus K_1(1/n) \subset K_2 \setminus K_1$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\sup\{\lambda(K);\ K \in \mathcal{K}^k,\ K \subset K_2 \setminus K_1\} &\geq \lim_{n\to\infty} \lambda\left(K_1 \cup (K_2 \setminus \operatorname{Int} K_1(1/n))\right) \\
&= \lambda(K_2) - \lambda(K_1).
\end{aligned}$$

Je-li $K \in \mathcal{K}^k, K \subset K_2 \setminus K_1$, je podle (2.6) a (2.3)

$$\lambda(K) + \lambda(K_1) = \lambda(K \cup K_1) \leq \lambda(K_2),$$

a tudíž

$$\sup\{\lambda(K);\ K \in \mathcal{K}^k,\ K \subset K_2 \setminus K_1\} \leq \lambda(K_2) - \lambda(K_1)\,,$$

což jsme měli dokázat. □

Poznámka 2.9. Na rozdíl od (2.4) je v (2.7) podstatné, že pracujeme s posloupnostmi. Jestliže totiž $K \in \mathcal{K}^k$ je libovolná množina, pro niž $\lambda(K) > 0$, a $\mathcal{L}$ je systém všech konečných podmnožin množiny K, potom je zřejmě $\lambda(L) = 0$ pro každou $L \in \mathcal{L}$, systém $\mathcal{L}$ je nahoru filtrující, $K = \bigcup \mathcal{L}$ a přitom $\lambda(K) \neq \sup\{\lambda(L);\ L \in \mathcal{L}\}$.

3 Prostor s mírou

Množinová funkce $\lambda : \mathcal{K}^k \to \langle 0, \infty)$ je podle (2.6) a (2.5) aditivní (to znamená, že z $K, L \in \mathcal{K},\ K \cap L = \emptyset$ vyplývá $\lambda(K \cup L) = \lambda(K) + \lambda(L)$) a je invariantní vůči posunutí. Tvrzení (2.4) a (2.7) pak vyjadřují určité vlastnosti spojitosti funkce λ. Na druhé straně je definiční obor funkce λ příliš úzký. Při zachování zmíněných vlastností nelze funkci λ rozšířit na *všechny* podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^k$; srv. s (4.6). V tomto odstavci budeme proto studovat množinové systémy, které slouží jako vhodné definiční obory pro míry (to jsou množinové funkce, které se chovají podobně jako objem v $\mathbb{R}^3$, obsah v $\mathbb{R}^2$ a délka v $\mathbb{R}^1$).

Nechť X je libovolná množina, $\mathcal{P}(X)$ nechť znamená systém všech podmnožin množiny X. Připomeňme, že pro $A \subset X$ píšeme často A^c místo $X \setminus A$.

Budeme říkat, že množinový systém $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra* (na množině X), jestliže platí:

(i) $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A^c \in \mathcal{A}$, kdykoli $A \in \mathcal{A}$;

(iii) je-li $\{A_n\}$ posloupnost množin z $\mathcal{A}$, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra na X, nazýváme X *měřitelným prostorem* a prvky systému $\mathcal{A}$ *měřitelnými množinami*. Někdy bude účelné zdůraznit, o jakou σ-algebru se jedná. Pak za měřitelný prostor budeme považovat dvojici $(X, \mathcal{A})$.

Jestliže $\mathcal{S}$ je libovolný systém podmnožin množiny X, potom existuje na X nejmenší σ-algebra taková, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ (ta je definována jako průnik všech σ-algeber, které $\mathcal{S}$ obsahují). Tato σ-algebra se značí $\sigma(\mathcal{S})$ a nazývá se *σ-algebra generovaná systémem $\mathcal{S}$*.

Je-li X topologický prostor (spec. $X = \mathbb{R}^k$) a je-li $\mathcal{S}$ systém všech otevřených množin z X, pak se $\sigma(\mathcal{S})$ značí $\mathcal{B}(X)$ a prvky této σ-algebry se nazývají *borelovské množiny*. Místo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ budeme psát jen $\mathcal{B}^k$. Protože každá otevřená podmnožina v $\mathbb{R}^k$ je spočetným sjednocením kompaktních množin, je $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{K}^k)$.

Je-li $\mathcal{A}$ σ-algebra na množině X, pak zřejmě $\emptyset \in \mathcal{A}$ (neboť $\emptyset = X^c$). Dále pro $A, B \in \mathcal{A}$ je $A \cup B \in \mathcal{A}$ (položí se $A_1 := A,\ A_2 := B,\ A_n := \emptyset$ pro $n \geq 3$), $A \cap B \in \mathcal{A}$ (neboť $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$), $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (neboť $A \setminus B = A \cap B^c$) a pro posloupnost $\{A_n\}$ množin z $\mathcal{A}$ je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, protože $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$.

Je tedy každá σ-algebra uzavřená vůči operaci rozdílu a operacím nejvýše spočetného průniku a sjednocení množin.

Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na množině X. Funkce $\mu : \mathcal{A} \to \langle 0, \infty\rangle$ se nazývá *míra* (na $\mathcal{A}$), jestliže μ není identicky rovna ∞ a je *σ-aditivní* v tomto smyslu: Je-li $\{A_n\}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$, potom $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$. Je-li $\mu(X) = 1$, míra μ se nazývá *pravděpodobnostní.*

Prostorem s mírou se rozumí měřitelný prostor, na jehož σ-algebře měřitelných množin je definována míra. (Často se za prostor s mírou považuje trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$.)

Nechť μ je míra na $\mathcal{A}$. Podle definice existuje $A \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(A) < \infty$. Položme $A_1 := A$ a $A_n := \emptyset$ pro $n \geq 2$. Potom platí

$$\infty > \mu(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \geq \sum_{n=1}^2 \mu(A_n) = \mu(A) + \mu(\emptyset)\,,$$

takže $\mu(\emptyset) = 0$. Odtud vyplývá, že pro množiny $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$, které jsou po dvou disjunktní, platí $\mu\big(\bigcup_{n=1}^m A_n\big) = \sum_{n=1}^m \mu(A_n)$. Jestliže $A, B \in \mathcal{A}$ a $B \subset A$, pak platí $\mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A)$, tedy $\mu(B) \leq \mu(A)$ a $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, pokud $\mu(B) < \infty$. Dále platí

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))\,,$$

takže za předpokladu $\mu(A \cap B) < \infty$ je $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$. Je-li $\mu(A \cap B) = \infty$, je $\mu(A) = \infty$, tudíž vždy platí rovnost

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Odtud dostáváme $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$, obecněji pro množiny $A_1, A_2, \dots$ z $\mathcal{A}$ platí

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^m A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^m \mu(A_n), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Z následujícího tvrzení odtud vyplývá

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)\,.$$

(Tato nerovnost vyjadřuje, že míra μ je σ-*subaditivní.*)

Tvrzení 3.1. *Nechť μ je míra na σ-algebře $\mathcal{A}$. Je-li $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, a $A_n \nearrow A$, pak* $\lim_{n\to\infty} \mu(A) = \mu(A)$. *Jestliže $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \searrow A$ a navíc $\mu(A_1) < \infty$, potom* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Důkaz. Nechť $A_n \nearrow A$. Položme $A_0 := \emptyset$, $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $B_n \in \mathcal{A}$, množiny B_n jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = A$. Můžeme předpokládat, že $\mu(A_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jinak je tvrzení zřejmé. Pak ovšem

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) = \sum_{n=1}^\infty (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)\,.$$

Nechť nyní $A_n \searrow A$, $\mu(A_1) < \infty$. Definujme $B_n := A_1 \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$B_n \nearrow A_1 \setminus A, \quad \mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n), \quad \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)\,,$$

a tedy podle první části platí $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1 \setminus A)$. Odtud plyne $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. $\square$

Příklady 3.2. 1. (*aritmetická míra*) Nechť X je libovolná množina. Pro nekonečnou množinu $A \subset X$ položme $\mu(A) := \infty$, pro $A \subset X$ konečnou definujme $\mu(A) := \operatorname{card} A$. Potom μ je míra na $\mathcal{P}(X)$.

2. (*Diracova míra*) Nechť X je libovolná množina a $x \in X$. Pro $A \subset X$ položíme $\varepsilon_x(A) := 1$, pokud $x \in A$, $\varepsilon_x(A) := 0$, pokud $x \notin A$. Potom ε_x je míra na $\mathcal{P}(X)$.

3. Nechť μ je aritmetická míra na $\mathbb{N}$, $A_n = \{n, n+1, \dots\}$. Potom $A_n \searrow \emptyset$ a neplatí $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. V (3.1) nelze předpoklad $\mu(A_1) < \infty$ v druhé části tvrzení vypustit.

4 Lebesgueova míra

Odstavce 4 a 5 jsou věnovány existenci a jednoznačnosti Lebesgueovy míry. Naším cílem je dokázat toto tvrzení: *Existuje σ-algebra $\mathcal{B}_0^k$ obsahující všechny borelovské podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^k$ a existuje právě jedna míra λ_k na $\mathcal{B}_0^k$ taková, že $\lambda_k(K) = \lambda(K)$ pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^k$. Míra λ_k je invariantní vůči posunutí a úplná v tomto smyslu: Je-li $\lambda_k(A) = 0$ a $B \subset A$, pak $B \in \mathcal{B}_0^k$ (a tudíž $\lambda_k(B) = 0$).*

Ukážeme, že míra λ_k zaujímá mezi mírami v $\mathbb{R}^k$ prominentní postavení: *Je-li μ míra na $\mathcal{B}^k$, která je invariantní vůči posunutí a je normalizovaná* (tj. μ-míra kompaktní jednotkové krychle je rovna jedné), *pak μ a λ_k na $\mathcal{B}^k$ splývají.*

V tomto okamžiku není vůbec zřejmé, že existuje σ-algebra $\mathcal{A}$ obsahující $\mathcal{K}^k$ a míra (označme ji $\bar{\lambda}$) na $\mathcal{A}$ taková, že $\bar{\lambda}(K) = \lambda(K)$ pro všechna $K \in \mathcal{K}^k$. Pokud však $\mathcal{A}$ a $\bar{\lambda}$ s uvedenými vlastnostmi existují, platí podle (2.8)

$$\bar{\lambda}(K_2 \setminus K_1) = \sup\{\lambda(L)\,;\, L \in \mathcal{K}^k,\, L \subset K_2 \setminus K_1\}\,,$$

a protože $\bar{\lambda}$ je míra, je pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$

$$\bar{\lambda}(L \cap A) + \bar{\lambda}(L \cap A^c) = \bar{\lambda}(L), \quad L \in \mathcal{K}^k.$$

Tyto postřehy nás vedou k následujícím definicím: Pro $A \subset \mathbb{R}^k$ položme

$$\lambda_*(A) := \sup\{\lambda(L)\,;\, L \in \mathcal{K}^k,\, L \subset A\}\,,$$

a definujme

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^k\,;\, \lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) = \lambda_*(L),\ L \in \mathcal{K}^k\}\,.$$

Nechť $A \in \mathcal{K}^k$ a $L \in \mathcal{K}^k$. Položme $K_1 := L \cap A,\ K_2 := L$ a aplikujme (2.8):

$$\lambda(L \cap A) + \sup\{\lambda(K)\,;\, K \in \mathcal{K}^k,\, K \subset L \cap A^c\} = \lambda(L)\,.$$

Protože zřejmě $\lambda_*(K) = \lambda(K)$, kdykoli $K \in \mathcal{K}^k$, platí

$$\lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) = \lambda_*(L),$$

takže $A \in \mathcal{A}$. Vidíme, že $\mathcal{K}^k \subset \mathcal{A}$. Význam množinového systému $\mathcal{A}$ a množinové funkce λ_* je patrný z následující věty.

Věta 4.1. *Množinový systém $\mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující $\mathcal{B}^k$ a restrikce λ_* na $\mathcal{A}$ je míra na $\mathcal{A}$. Je-li $A \in \mathcal{A},\ \lambda_*(A) = 0$ a $B \subset A$, potom $B \in \mathcal{A}$.*

Důkaz. Z definice plyne, že množinový systém $\mathcal{A}$ je uzavřený vzhledem k doplňku. Nechť nyní $A_1 \subset \mathbb{R}^k$ a $A_2 \subset \mathbb{R}^k$ jsou disjunktní, $L_1, L_2 \in \mathcal{K}^k$, $L_j \subset A_j,\ j = 1, 2$. Podle (2.6) je

$$\lambda(L_1) + \lambda(L_2) = \lambda(L_1 \cup L_2) \leq \lambda_*(A_1 \cup A_2),$$

takže

$$\lambda_*(A_1) + \lambda_*(A_2) \le \lambda_*(A_1 \cup A_2).$$

Odtud pro posloupnost $\{A_n\}$ po dvou disjunktních množin z $\mathbb{R}^k$ dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(A_n) \le \lambda_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)\,.$$

Jestliže $A \subset \mathbb{R}^k$ a $L \in \mathcal{K}^k$, pak $L \cap A$ a $L \cap A^c$ jsou disjunktní množiny, tudíž $\lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) \le \lambda_*(L)$. V důsledku toho

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^k;\ \lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) \ge \lambda_*(L),\ L \in \mathcal{K}^k\}.$$

Dokážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra a λ_* je na disjunktních množinách z $\mathcal{A}$ σ-subaditivní.

Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost množin z $\mathcal{A}$, $L \in \mathcal{K}^k$ a $\varepsilon > 0$. Dokážeme, že $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Protože $\lambda(L) = \lambda_*(L \cap A_n) + \lambda_*(L \cap A_n^c)$, existují $K_n, L_n \in \mathcal{K}^k$ tak, že $K_n \subset L \cap A_n,\ L_n \subset L \cap A_n^c$ a

(1) $\lambda(L) \le \lambda(K_n) + \lambda(L_n) + \varepsilon/2^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Následující rovnosti plynou pro $m \in \mathbb{N}$ z (2.6):

(2) $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{m+1} K_n\Big) + \lambda\Big(K_{m+1} \cap \bigcup_{n=1}^{m} K_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{m} K_n\Big) + \lambda(K_{m+1})\,,$

(3) $\lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{m+1} L_n\Big) + \lambda\Big(L_{m+1} \cup \bigcap_{n=1}^{m} L_n\Big) = \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{m} L_n\Big) + \lambda(L_{m+1})\,.$

Definujme $K_m^* := K_{m+1} \cap \bigcup_{n=1}^{m} K_n,\ L_m^* := L_{m+1} \cup \bigcap_{n=1}^{m} L_n$. Protože $K_m^* \subset L \cap \Big(A_{m+1} \cap \bigcup_{n=1}^{m} A_n\Big),\ L_m^* \subset L \cap \Big(A_{m+1}^c \cup \bigcap_{n=1}^{m} A_n^c\Big)$, jsou K_m^* a L_m^* disjunktní kompaktní podmnožiny množiny L, takže

(4) $\lambda(K_m^*) + \lambda(L_m^*) \le \lambda(L).$

Sečtením (2) a (3) a užitím (4) a (1) dostáváme

(5) $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{m+1} K_n\Big) + \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{m+1} L_n\Big) =$
$= \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{m} K_n\Big) + \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{m} L_n\Big) + \lambda(K_{m+1}) + \lambda(L_{m+1}) - \lambda(K_m^*) - \lambda(L_m^*) \ge$
$\ge \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{m} K_n\Big) + \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{m} L_n\Big) - \varepsilon/2^{m+1}\,.$

Nechť $r \in \mathbb{N}$. Sečtením nerovností z (5) a užitím (1) pro $n = 1$ dostaneme

(6) $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{r} K_n\Big) + \lambda\Big(\bigcap_{n=1}^{r} L_n\Big) \ge \lambda(L) - \varepsilon \sum_{j=1}^{r} 1/2^j\,.$

Podle (2.4) je

(7) $\lim\limits_{r\to\infty} \lambda\big(\bigcap_{n=1}^{r} L_n\big) = \lambda\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_n\big) \leq \lambda_*(L \cap A^c)$

a dále $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{r} K_n\Big) \leq \lambda_*(L \cap A)$, tudíž z (6) dostáváme pro $r \to \infty$ nerovnost

$$\lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) \geq \lambda(L) - \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) \geq \lambda(L)$ pro každé $L \in \mathcal{K}^k$, neboli $A \in \mathcal{A}$. Dokázali jsme, že $\mathcal{B}_0^k$ je σ-algebra. Protože $\mathcal{K}^k \subset \mathcal{A}$ a $\sigma(\mathcal{K}^k) = \mathcal{B}^k$, platí $\mathcal{B}^k \subset \mathcal{A}$.

Předpokládejme navíc, že množiny $A_1, A_2, \dots$ z $\mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $L \subset A$. Podle (7) je $\lim_{r\to\infty} \lambda\big(\bigcap_{n=1}^{r}\big) = 0$ a z (6) dostáváme

$$\lambda(L) - \varepsilon \leq \lim_{r\to\infty} \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{r} K_n\Big) = \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} \lambda(K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(K_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(A_n).$$

Odtud vyplývá $\lambda(L) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(A_n)$ a

$$\lambda_*(A) = \sup\{\lambda(L)\,;\, L \in \mathcal{K}^k,\, L \subset A\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(A_n)\,.$$

Je tedy λ_* na disjunktních množinách z $\mathcal{A}$ σ-aditivní.

Nechť $A \in \mathcal{A}$, $\lambda_*(A) = 0$, $B \subset A$ a $L \in \mathcal{K}^k$. Potom

$$\lambda_*(L \cap A^c) \leq \lambda_*(L \cap B^c) \quad \text{a} \quad \lambda_*(L \cap A) \leq \lambda_*(A) = 0\,,$$

takže $\lambda_*(L \cap B) + \lambda_*(L \cap B^c) \geq \lambda_*(L \cap A^c) \geq \lambda_*(L \cap A) + \lambda_*(L \cap A^c) \geq \lambda_*(L)$, neboli $B \in \mathcal{A}$. $\square$

V dalším budeme značit tuto σ-algebru $\mathcal{A}$ symbolem $\mathcal{B}_0^k$. Její prvky se nazývají *lebesgueovsky měřitelné množiny*. Restrikce množinové funkce λ_* na σ-algebru $\mathcal{B}_0^k$ se nazývá *Lebesgueova míra* (podrobněji: *k-rozměrná Lebesgueova míra*) a značí se λ_k.

Následující tvrzení charakterizuje prvky σ-algebry $\mathcal{B}_0^k$. Před jeho formulací zavedeme ještě toto označení: Symbol $\mathcal{G}^k$ (resp. $\mathcal{F}^k$) znamená systém všech otevřených (resp. uzavřených) podmnožin prostoru $\mathbb{R}^k$. Řekneme, že $A \subset \mathbb{R}^k$ je množina typu G_δ (resp. F_σ), jestliže existují $G_n \in \mathcal{G}^k$, $n \in \mathbb{N}$, (resp. $F_n \in \mathcal{F}^k$, $n \in \mathbb{N}$) tak, že $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ (resp. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$). Systém všech množin typu G_δ (resp. F_σ) označíme $\mathcal{G}_\delta^k$ (resp. $\mathcal{F}_\sigma^k$). Zřejmě $\mathcal{K}^k \subset \mathcal{F}^k$, $\mathcal{G}^k \subset \mathcal{G}_\delta^k$, $\mathcal{F}^k \subset \mathcal{F}_\sigma^k$ a $\mathcal{F}_\sigma^k \cup \mathcal{G}_\delta^k \subset \mathcal{B}^k$.

Věta 4.2. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^k$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$A \in \mathcal{B}_0^k$;*

(ii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existují množiny $F \in \mathcal{F}^k$ a $G \in \mathcal{G}^k$ tak, že $F \subset A \subset G$ a $\lambda_k(G \setminus F) < \varepsilon$;*

(iii) *existují množiny $C \in \mathcal{F}_\sigma^k$ a $D \in \mathcal{G}_\delta^k$ tak, že $C \subset A \subset D$ a $\lambda_k(D \setminus C) = 0$.*

Důkaz. Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme $Z_j := \{x \in \mathbb{R}^k;\ j-1 \le |x| < j\}$. Nechť platí (i) a nechť $\varepsilon > 0$. Nejprve předpokládejme, že množina A je omezená. Existuje $F \subset A,\ F \in \mathcal{K}^k (\subset \mathcal{F}^k)$ tak, že $\lambda(F) > \lambda_k(A) - \varepsilon/2$, neboli $\lambda_k(A \setminus F) < \varepsilon/2$. Zvolme omezenou množinu $H \in \mathcal{G}^k$ tak, aby $A \subset H$. Existuje $L \in \mathcal{K}^k$ taková, že $L \subset H \setminus A$ a $\lambda(L) > \lambda_k(H \setminus A) - \varepsilon/2$. Položme $G := H \setminus L$. Potom $G \in \mathcal{G}^k$, $A \subset G$ a

$$\lambda_k(G \setminus A) = \lambda_k((H \setminus L) \setminus A) = \lambda_k((H \setminus A) \setminus L) = \lambda_k(H \setminus A) - \lambda_k(L) < \varepsilon/2\,.$$

Dostáváme tak

$$\lambda_k(G \setminus F) = \lambda_k(G \setminus A) + \lambda_k(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Nechť nyní $A \in \mathcal{B}_0^k$ je libovolná, $A_j := A \cap Z_j,\ j \in \mathbb{N}$. Potom A_j, $j \in \mathbb{N}$, jsou omezené množiny z $\mathcal{B}_0^k$, tedy existují $F_j \in \mathcal{F}^k$ a $G_j \in \mathcal{G}^k$ tak, že $F_j \subset A_j \subset G_j$ a $\lambda_k(G_j \setminus F_j) < \varepsilon/2^j,\ j \in \mathbb{N}$. Položme $F := \bigcup_{j=1}^\infty F_j$ a $G := \bigcup_{j=1}^\infty G_j$. Potom $F \subset A \subset G,\ G \setminus F \subset \bigcup_{j=1}^\infty (G_j \setminus F_j)$ a zřejmě $G \in \mathcal{G}^k$. Dokažme, že $F \in \mathcal{F}^k$. Nechť $z_n \in F$ a $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Tvrdíme, že $z \in F$. Protože $\{z_n\}$ je omezená posloupnost, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $z_n \in \bigcup_{j=1}^m Z_j$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Je-li $r > m$, je $F_r \cap \bigcup_{j=1}^m Z_j = \emptyset$, takže $z_n \in \bigcup_{j=1}^m F_j$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože $\bigcup_{j=1}^m F_j$ je uzavřená množina, je $z \in \bigcup_{j=1}^m F_j \subset F$. K dokončení důkazu implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) stačí poznamenat, že

$$\lambda_k(G \setminus F) \le \sum_{j=1}^\infty \lambda_k(G_j \setminus F_j) < \varepsilon.$$

Nechť platí (ii). Potom existují množiny $F_n \in \mathcal{F}^k$ a $G_n \in \mathcal{G}^k$ tak, že $F_n \subset A \subset G_n$ a $\lambda_k(G_n \setminus F_n) < 1/n,\ n \in \mathbb{N}$. Položme $C := \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ a $D := \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Potom $C \in \mathcal{F}_\sigma^k,\ D \in \mathcal{G}_\delta^k,\ C \subset A \subset D$ a $D \setminus C \subset G_n \setminus F_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. V důsledku toho je $\lambda_k(D \setminus C) \le \lambda_k(F_n \setminus G_n) < 1/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboli $\lambda_k(D \setminus C) = 0$.

Nechť platí (iii). Potom podle (4.1) je $A \setminus C \in \mathcal{B}_0^k$, takže platí rovnost $A = C \cup (A \setminus C) \in \mathcal{B}_0^k$. □

Poznámka 4.3. Míra λ_k je *regulární* v tomto smyslu: Pro každou množinu $A \in \mathcal{B}_0^k$ je

$$\lambda_k(A) = \sup\{\lambda(K)\,;\, K \in \mathcal{K}^k,\, K \subset A\}\,,\ \lambda_k(A) = \inf\{\lambda_k(G)\,;\, G \in \mathcal{G}^k,\, G \supset A\}\,.$$

První rovnost je zřejmá z definice λ_* a λ_k. Druhá rovnost je zřejmá, pokud $\lambda_k(A) = \infty$. Nechť $\lambda_k(A) < \infty$ a $\varepsilon > 0$. Podle (4.2) existují $F \in \mathcal{F}^k$ a $G \in \mathcal{G}^k$ tak, že $F \subset A \subset G$ a $\lambda_k(G \setminus F) < \varepsilon$. V důsledku toho je $\lambda_k(G \setminus A) < \varepsilon$ a $\lambda_k(G) = \lambda_k(A \cup (G \setminus A)) = \lambda_k(A) + \lambda_k(G \setminus A) \le \lambda_k(A) + \varepsilon$. Odtud vyplývá druhá rovnost.

Věta 4.4. *Je-li $A \in \mathcal{B}_0^k$ a $v \in \mathbb{R}^k$, potom je $A+v \in \mathcal{B}_0^k$ a $\lambda_k(A+v) = \lambda_k(A)$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}^k;\ A + v \in \mathcal{B}^k\}$. Zřejmě $\mathcal{G}^k \subset \mathcal{A}$. Jestliže $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n + v) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n + v$, tudíž $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Odtud plyne, že $\mathcal{B}^k \subset \mathcal{A}$. Posunutí borelovské množiny je tedy borelovská množina.

Podle (4.2) tedy existují množiny $C, D \in \mathcal{B}^k$ tak, že $C \subset A \subset D$ a $\lambda_k(D \setminus C) = 0$. Z (2.5) a definice míry λ_k plyne, že $\lambda_k(C + v) = \lambda_k(C)$ a $\lambda_k((D \setminus C) + v) = 0$. Protože $(A \setminus C) + v \subset (D \setminus C) + v$, je podle (4.1) $(A \setminus C) + v \in \mathcal{B}_0^k$, takže $A + v = (C + v) \cup ((A \setminus C) + v) \in \mathcal{B}_0^k$. Dále $\lambda_k(A + v) = \lambda_k(C + v) + \lambda_k((A \setminus C) + v) = \lambda_k(C) = \lambda_k(A)$. $\square$

Příklady 4.5. **1.** Nechť $x \in \mathbb{R}^k$. Potom z (2.2) plyne $\lambda_k(\{x\}) = \lambda(\{x\}) = 0$. Proto $\lambda_k(S) = 0$, kdykoli $S \subset \mathbb{R}^k$ je spočetná množina.

2. Na $\mathbb{R}$ existují nespočetné kompaktní množiny, které mají míru 0. Připomeňme nepominutelný příklad, tzv. *Cantorovo diskontinuum*.

Je známo, že každé číslo $a \in \langle 0, 1\rangle$ lze vyjádřit v trojkové soustavě ve tvaru
$$a = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots$$
(zápis: $a = 0{,}a_1a_2\dots$), kde „cifry“ a_n jsou čísla $0, 1, 2$. Je-li $a = 0{,}a_1a_2\dots$, $b = 0{,}b_1b_2\dots$ a $n \in \mathbb{N}$ je nejmenší číslo, pro které $a_n \ne b_n$, potom v případě $b_n > a_n$ je $b > a$, pokud nenastal následující výjimečný případ: $a_n < 2$, $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 2$ a $b_n = a_n + 1$, $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0$. Pak zřejmě $a = b$.

Nechť C je množina všech čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, která lze alespoň jedním způsobem vyjádřit ve tvaru $a = 0{,}a_1a_2\dots$, přičemž $a_n \ne 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Snadno si rozmyslíme, že C vznikne postupným odstraněním prostředních třetin (tzv. styčných intervalů Cantorova diskontinua): nejprve se odstraní interval $(1/3, 2/3)$, v tomto intervalu totiž leží právě všechna čísla, která mají nutně na prvním místě cifru 1. V druhém kroku se ze zbývajících intervalů $\langle 0, 1/3\rangle$ a $\langle 2/3, 1\rangle$ odstraní prostřední třetina, tj. intervaly $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$. V n-tém kroku se odstraní 2^{n-1} intervalů délky 3^{-n}, atd. Označíme-li $G = \langle 0, 1\rangle \setminus C$, je G otevřená množina sestávající z otevřených intervalů po dvou disjunktních. Intervalů délky 3^{-n} je 2^{n-1}, proto $\lambda_1(G) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1} \cdot 3^{-n}) = 1$. Pro kompaktní množinu C je tudíž $\lambda_1(C) = 0$. Nechť S je množina těch $x = 0{,}a_1a_2\dots$, pro něž všechna a_n s výjimkou konečného počtu jsou rovna nule. Pak S je spočetná a zobrazení $\varphi : C \setminus S \to \langle 0, 1\rangle$, které bodu $2b_1/3 + 2b_2/3^2 + \dots$ přiřadí bod $b_1/2 + b_2/2^2 \dots$

(b_n je rovno 0 nebo 1) je prosté zobrazení $C \setminus S$ na $\langle 0,1\rangle$. Proto je množina C nespočetná.

3. Nechť $m \in \{1,\dots,k\}$, $a \in \mathbb{R}$ a $H := \{x = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k;\ x_m = a\}$. Potom $\lambda_k(H) = 0$. Definujme

$$H_n := \big\{x \in \mathbb{R}^k;\ |x_j| \le n \text{ pro } j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{m\},\ x_m = a\big\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ a $\lambda_k(H_n) = 0$ podle (2.2). Proto

$$\lambda_k(H) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(H_n) = 0\,.$$

Tvrzení 4.6. *Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{A}$ a μ je míra na $\mathcal{A}$, která je invariantní vůči posunutí a každému intervalu přiřazuje jeho délku. Je-li $A \in \mathcal{A}$ a $\mu(A) > 0$, potom existuje $B \subset A,\ B \notin \mathcal{A}$.*

Důkaz. Zřejmě existuje otevřený interval I délky 1 tak, že $\mu(A \cap I) > 0$. Protože μ je invariantní vůči posunutí, lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $A \subset (0,1)$.

Řekneme, že bod $x \in \mathbb{R}$ je v relaci s bodem $y \in \mathbb{R}$, jestliže $x - y \in \mathbb{Q}$. Pišme $x \sim y$, jestliže x je v relaci s y. Zřejmě má tato relace za následek rozklad $\mathbb{R}$ na třídy ekvivalence. Označme $\mathcal{T}$ systém tříd ekvivalence. Pro každé $\emptyset \ne T \in \mathcal{T}$ je zřejmě $T \cap (0,1) \ne \emptyset$. Z axiomu výběru plyne, že existuje množina M, která z každé množiny $T \cap (0,1)$, $T \in \mathcal{T}$, obsahuje právě jeden prvek. Nechť $r_1, r_2, \dots$ je prostá posloupnost všech racionálních čísel z $(-1,1)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme $M_n := M + r_n$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset (-1,2)$. Nechť $m \ne n$. Kdyby existoval bod $z \in M_n \cap M_m$, existovaly by body $x, y \in M$ tak, že $z = x + r_n = y + r_m$. Pak by platilo $x - y = r_m - r_n \ne 0$ a x, y by byly různé body z M, pro něž $x \sim y$. Dokázali jsme, že množiny M_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní. Je-li $y \in \mathbb{R}$, pak existuje $r \in \mathbb{Q}$ a $x \in M$ tak, že $y = x + r$. Jestliže $y \in (0,1)$, pak $|r| = |y - x| < 1$, tudíž existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $r = r_n$ a $y \in M_n$. Odtud plyne, že $(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Definujme $A_n := A \cap M_n$. Předpokládejme, že $A_n \in \mathcal{A}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; odvodíme spor. Protože $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $\mu(A) > 0$, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\mu(A_m) > 0$. Definujme $S_n = A_m - r_m + r_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $S_n \in \mathcal{A}$. Jestliže $z \in S_n$, existuje $u \in A_m$ tak, že $z = u - r_m + r_n$. Protože $u \in M_m$, existuje $x \in M$ tak, že $u = x + r_m$, neboli $z = x + r_n \in M_n$. Dokázali jsme, že $S_n \subset M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tudíž množiny S_n jsou po dvou disjunktní. Zřejmě $\mu(S_n) = \mu(A_m) > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Jelikož $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset (-1,2)$, je $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\big) \le \mu\left((-1,2)\right) = 3$. Na druhé straně, protože $\mu(S_n) = \mu(A_m) > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) = \infty\,,$$

což je spor. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro $B = A_n$ je $B \subset A$ a $B \notin \mathcal{A}$.

Poznámka 4.7. Z minulého tvrzení plyne, že každá množina kladné Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}$ obsahuje neměřitelnou množinu.

Tvrzení 4.8. *Existuje spojitá neklesající funkce $\varphi : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ taková, že φ je konstantní na každém styčném intervalu Cantorova diskontinua C a $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$.*

Důkaz. Pro každé x z omezeného styčného intervalu Cantorova diskontinua, jehož koncový bod má rozvoj tvaru $2a_1/3 + \ldots + 2a_n/3^n$, definujeme $\varphi(x) := a_1/2 + \ldots + a_n/2^n$ (a_j je 0 nebo 1). Dále položíme $\varphi(0) := 0$ a pro $x \in (0,1\rangle$ definujeme $\varphi(x) := \sup\{\varphi(y);\ y \in \langle 0,1\rangle \setminus C,\ y \le x\}$. Potom je funkce φ neklesající. Jelikož pro každé $m,n \in \mathbb{N},\ m < 2^n$, je $m/2^n \in \varphi(\langle 0,1\rangle \setminus C)$, je funkce φ spojitá a $\varphi(1) = 1$. □

Příklady 4.9. **1.** Nechť φ je funkce zavedená v minulém tvrzení. Položme $\psi(x) := (x + \varphi(x))/2,\ x \in \langle 0,1\rangle$. Potom ψ zobrazuje spojitě a prostě $\langle 0,1\rangle$ na $\langle 0,1\rangle$, ψ^{-1} je spojitá a $\psi(\langle 0,1\rangle \setminus C)$ je otevřená množina, jejíž míra je rovna $1/2$. Proto $\lambda_1(\psi(C)) = 1/2$. Podle (4.7) existuje $A \subset \psi(C)$ taková, že $A \notin \mathcal{B}_0^1$. Definujme $M := \psi^{-1}(A)$. Potom $M \subset C$, tudíž $M \in \mathcal{B}_0^1$. Z níže popsané úvahy plyne, že $M \notin \mathcal{B}^1$.

Označme $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}^1;\ \psi(B) \in \mathcal{B}^1\}$. Protože ψ^{-1} je spojité zobrazení, je vzor každé otevřené podmnožiny intervalu $\langle 0,1\rangle$ při ψ^{-1} otevřená množina, tedy každá otevřená množina padne do $\mathcal{A}$. Protože ψ je prosté, je obraz sjednocení spočetně mnoha množin sjednocením obrazů a obraz doplňku množiny je roven doplňku obrazu. Je tedy $\mathcal{A}$ σ-algebra a odtud plyne, že $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{A}$.

2. Existuje kompaktní množina $K \subset \langle 0,1\rangle$ tak, že $\operatorname{Int} K = \emptyset$ a $\lambda_1(K) > 0$. Nechť $\mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Pro $\delta \in (0,1)$ definujme interval

$$I_n := (r_n - \delta/2^{n+1}, r_n + \delta/2^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

a definujme $K_\delta := \langle 0,1\rangle \setminus \bigcup_{n=1}^\infty I_n$. Potom $K_\delta \in \mathcal{K}^1$ a

$$\lambda_1(K_\delta) = 1 - \lambda_1\Big(\bigcup_{n=1}^\infty I_n\Big) \ge 1 - \sum_{n=1}^\infty (\delta/2^n) = 1 - \delta\,.$$

Jelikož $K_\delta \cap (\mathbb{Q} \cap \langle 0,1\rangle) = 0$, je $\operatorname{Int} K_\delta = \emptyset$.

Definujme ještě $L := \bigcup_{n=2}^\infty K_{1/n}$. Potom $\lambda_1(L) \ge \lambda_1(K_{1/n}) \ge 1 - 1/n$, kdykoli $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$, proto $\lambda_1(L) = 1$. Jestliže $M := \bigcup\{L + m;\ m \in \mathbb{Z}\}$, $N := \mathbb{R} \setminus M$, pak M je množina 1. kategorie (tj. spočetné sjednocení řídkých množin) a $\lambda_1(N) = 0$. Tedy každá množina $A \subset \mathbb{R}$ je sjednocením množiny 1. kategorie a množiny míry 0, totiž $A = (A \cap M) \cup (A \cap N)$.

Poznámka 4.10. Množina kladné míry tedy nemusí obsahovat (nedegenerovaný) interval. Platí toto tvrzení: *Je-li $A \in \mathcal{B}_0^1,\ \lambda_1(A) > 0$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(-\delta, \delta) \subset A - A := \{x - y;\ x, y \in A\}$.* To lze dokázat např. takto: S odvoláním na (4.3) lze předpokládat, že $A \in \mathcal{K}^1$. Podle (4.2) existuje $G \in \mathcal{G}^1$ tak, že $A \subset G$ a $\lambda_1(G) < 2\lambda_1(A)$. Protože A je kompaktní množina disjunktní s uzavřenou množinou $\mathbb{R} \setminus G$, existuje $\delta > 0$ tak, že $A + x \subset G$ pro každé $x \in (-\delta, \delta)$. Tvrdíme, že $(-\delta, \delta) \subset A - A$. Zvolme $v \in (-\delta, \delta)$. Potom $A \cup (A + v) \subset G$. Kdyby $A \cap (A + v) = \emptyset$, pak by platilo

$$2\lambda_1(A) = \lambda_1(A) + \lambda_1(A + v) = \lambda_1(A \cup (A + v)) \leq \lambda_1(G),$$

což je ve sporu s nerovností $\lambda_1(G) < 2\lambda_1(A)$. Vidíme, že $A \cap (A + v) \neq \emptyset$, tj. existují $x, y \in A$ tak, že $x = y + v$, neboli $v = x - y \in A - A$.

5 Jednoznačnost Lebesgueovy míry

V předcházejícím odst. 4 jsme míru λ_k na $\mathcal{B}_0^k$ získali rozšířením množinové funkce $\lambda : \mathcal{K}^k \to \langle 0, \infty)$. Ukážeme, že takové rozšíření je hodnotami na $\mathcal{K}^k$ jednoznačně určeno. Dále dokážeme, že λ_k je jediná míra na $\mathcal{B}^k$, která je normalizovaná (tj. $\lambda_k(\langle 0,1\rangle^k) = 1$) a invariantní vůči posunutí.

Začněme touto motivační úvahou. Nechť X je množina, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a μ a ν jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro všechna $S \in \mathcal{S}$. Označme $\mathcal{T} := \{A \in \sigma(\mathcal{S});\ \mu(A) = \nu(A)\}$. Je zřejmé, že pro $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}$ platí $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{T}$, pokud jsou množiny $A_1, A_2, \ldots$ po dvou disjunktní. Je-li např. navíc $X \in \mathcal{S}$ a $\mu(X) < \infty$, pak také $A^c \in \mathcal{T}$ pro každé $A \in \mathcal{T}$. V takovém případě se tedy rovnost měr μ a ν přenáší z $\mathcal{S}$ na nejmenší množinový systém, který obsahuje $\mathcal{S}$ a je uzavřený vůči doplňku a sjednocení spočetného systému po dvou disjunktních množin. Proto je užitečné množinové systémy s touto vlastností studovat.

Nechť X je libovolná množina a $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$. Potom se $\mathcal{D}$ nazývá *Dynkinův systém* (na množině X), když má tyto vlastnosti:

(i) $X \in \mathcal{D}$;

(ii) $A^c \in \mathcal{D}$, kdykoli $A \in \mathcal{D}$;

(iii) je-li $\{A_n\}$ posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{D}$, potom je $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{D}$.

Pro krátkost budeme místo Dynkinův systém říkat *D-systém*. Zřejmě každý D-systém $\mathcal{D}$ obsahuje $\emptyset$ a pro $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, je také $B \setminus A \in \mathcal{D}$, neboť $B \setminus A = (A \cup B^c)^c$. Samozřejmě každá σ-algebra je D-systém.

Je-li $n \in \mathbb{N}$ a X konečná množina, pro niž $\operatorname{card} X = 2n$, definujme $\mathcal{D}$ jako systém všech podmnožin sestávajících ze sudého počtu prvků. Pak $\mathcal{D}$ je D-systém a pro $n > 1$ není $\mathcal{D}$ σ-algebra.

Věta 5.1. *Nechť $\mathcal{D}$ je D-systém. Pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra, právě když průnik každých dvou množin z $\mathcal{D}$ je prvkem $\mathcal{D}$.*

Důkaz. Víme, že každá σ-algebra je uzavřená vůči (dokonce spočetným) průnikům. Předpokládejme, že $\mathcal{D}$ je D-systém obsahující s každými dvěma množinami jejich průnik. Je-li $A, B \in \mathcal{D}$, pak $A \cap B \in \mathcal{D}$, $A \cap B \subset A$, tudíž $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Z vlastnosti (iii) z definice D-systému plyne, že také $A \cup B = (A \setminus B) \cup B \in \mathcal{D}$. Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost prvků z $\mathcal{D}$. Položme $B_0 := \emptyset$, $B_n := A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigcup_{n=1}^\infty (B_n \setminus B_{n-1}) \in \mathcal{D}$$

opět podle (iii) z definice D-systému. Tudíž $\mathcal{D}$ je σ-algebra. □

Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ libovolný množinový systém, potom existuje nejmenší D-systém obsahující $\mathcal{S}$ (ten je definován jako průnik všech D-systémů, které $\mathcal{S}$ obsahují). Tento D-systém se značí $\delta(\mathcal{S})$ a nazývá *D-systém generovaný systémem $\mathcal{S}$*. Zřejmě vždy platí $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$.

Věta 5.2. *Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ obsahuje průnik každých dvou množin z $\mathcal{S}$. Potom $\delta(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Protože $\delta(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{S})$, stačí dokázat, že $\delta(\mathcal{S})$ je σ-algebra. Podle (5.1) k tomu stačí dokázat, že $\delta(\mathcal{S})$ obsahuje s každými dvěma množinami jejich průnik. Zvolme $A \in \delta(\mathcal{S})$ a vyšetřujme pomocný systém

$$\mathcal{D}_A := \{Q \in \mathcal{P}(X);\ Q \cap A \in \delta(\mathcal{S})\}.$$

Zřejmě $X \in \mathcal{D}_A$. Je-li $Q \in \mathcal{D}_A$, je $Q^c \in \mathcal{D}_A$, neboť $Q^c \cap A = A \setminus (Q \cap A) \in \delta(\mathcal{S})$. Sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních množin z $\mathcal{D}_A$ je zřejmě prvkem $\mathcal{D}_A$. Dokázali jsme tedy: Pro každé $A \in \delta(\mathcal{S})$ je $\mathcal{D}_A$ D-systém. Nechť $B \in \mathcal{S}$. Podle předpokladu o $\mathcal{S}$ je $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_B$, tudíž $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_B$, neboť $\mathcal{D}_B$ je D-systém. Dokázali jsme, že $A \cap B \in \delta(\mathcal{S})$ pro každé $A \in \delta(\mathcal{S})$ a $B \in \mathcal{S}$. Odtud plyne, že pro každé $A \in \delta(\mathcal{S})$ je $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_A$ a tudíž $\delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_A$, neboť $\mathcal{D}_A$ je D-systém. Jinými slovy: $A \cap B \in \delta(\mathcal{S})$, kdykoli $A, B \in \delta(\mathcal{S})$. □

Věta 5.3. *Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ obsahuje s každými dvěma množinami jejich průnik a nechť $S_n \in \mathcal{S}$, $S_n \nearrow X$. Nechť μ a ν jsou míry na $\sigma(\mathcal{S})$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$, pro všechna $S \in \mathcal{S}$, a nechť $\mu(S_n) < \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom $\mu(A) = \nu(A)$ pro všechna $A \in \sigma(\mathcal{S})$.*

Důkaz. Zvolme nejprve množinu $B \in \mathcal{S}$ takovou, že $\mu(B) < \infty$. Definujme $\mathcal{D}_B := \{A \in \sigma(\mathcal{S});\ \mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)\}$. Potom $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}_B$ a zřejmě $X \in \mathcal{D}_B$. Jsou-li $A_1, A_2, \ldots$ množiny z $\mathcal{D}_B$, které jsou po dvou disjunktní, potom $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n \cap B) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B)$, takže $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_B$. Je-li $A \in \mathcal{D}_B$, pak

$$\mu(A^c \cap B) = \mu(B \setminus (A \cap B)) = \mu(B) - \mu(A \cap B) = \nu(B) - \nu(A \cap B) = \nu(A^c \cap B),$$

tudíž $A^c \in \mathcal{D}_B$ (zde jsme užili, že $\mu(A \cap B) \leq \mu(B) < \infty$). Tak je dokázáno, že $\mathcal{D}_B$ je D-systém obsahující $\mathcal{S}$, tedy s užitím (5.2) dostáváme $\sigma(\mathcal{S}) = \delta(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}_B \subset \sigma(\mathcal{S})$. Pro každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{S})$ a každou $B \in \mathcal{S}$, pro niž $\mu(B) < \infty$, tedy platí $\mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)$. Speciálně pro každou $A \in \sigma(\mathcal{S})$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je $\mu(A \cap S_n) = \nu(A \cap S_n)$. Protože $S_n \nearrow X$, je $\mu(A) = \nu(A)$ podle (3.1). □

Věta 5.4. *Nechť μ je míra na $\mathcal{B}_0^k$ taková, že pro každou množinu $K \in \mathcal{K}^k$ platí $\mu(K) = \lambda(K)$. Potom pro každou množinu $A \in \mathcal{B}_0^k$ je $\mu(A) = \lambda_k(A)$.*

Důkaz. Zřejmě existují $K_n \in \mathcal{K}^k$ tak, že $K_n \nearrow \mathbb{R}^k$. Protože $K, L \in \mathcal{K}^k$ implikuje $K \cap L \in \mathcal{K}^k$ a $\lambda(K_n) < \infty$, platí podle (5.3) $\mu(A) = \lambda_k(A)$ pro každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{K}^k) = \mathcal{B}^k$. Je-li $A \in \mathcal{B}_0^k$, existují podle (4.2) množiny $C, D \in \mathcal{B}^k$ takové, že $C \subset A \subset D$ a $\lambda_k(D \setminus C) = 0$. Protože

$$\mu(A \setminus C) \leq \mu(D \setminus C) = \lambda_k(D \setminus C) = 0\,,$$

je $\mu(A) = \mu(C) + \mu(A \setminus C) = \lambda_k(C) = \lambda_k(A)$. □

Položme $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ a $b = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$. Množinu $A = \{x \in \mathbb{R}^k;\ a_j \leq x_j < b_j,\ j \in \{1, \dots, k\}\}$ budeme nazývat *polouzavřeným intervalem*. Jsou-li a, b dyadické body, budeme mluvit o *dyadickém polouzavřeném intervalu*. Systém všech polouzavřených dyadických intervalů označíme $\mathcal{J}^k$. Zřejmě je $\mathcal{J}^k$ spočetný systém a $I \cap J \in \mathcal{J}^k$, kdykoli $I, J \in \mathcal{J}^k$. Je-li $G \subset \mathbb{R}^k$ otevřená množina a $x \in G$, existuje $I \in \mathcal{J}^k$ tak, že $x \in I$ a $I \subset G$. Každá otevřená množina je tedy sjednocením množin ze spočetného systému množin $\mathcal{J}^k$, tudíž $\mathcal{G}^k \subset \sigma(\mathcal{J}^k)$. Odtud $\mathcal{B}^k \subset \sigma(\mathcal{J}^k)$, a protože $\mathcal{J}^k \subset \mathcal{B}^k$, je $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{J}^k)$.

Je-li $a \in \mathbb{R}^k$ dyadický bod, $c > 0$ dyadicky racionální číslo a $A = \{x \in \mathbb{R}^k;\ a_j \leq x_j < a_j + c\}$, nazveme A *dyadickou polouzavřenou krychlí* o délce hrany c. Pro takovou krychli s přihlédnutím k (2.2) je $\lambda_k(A) = c^k$.

Věta 5.5. *Nechť μ je míra na $\mathcal{B}^k$ invariantní vůči posunutí a nechť $\mu(\langle 0,1)^k) = 1$. Potom pro každou množinu $A \in \mathcal{B}^k$ platí $\mu(A) = \lambda_k(A)$.*

Důkaz. Označme $a := \mu(\langle 0,1)^k)$. Zřejmě $0 \leq a < \infty$. Podobně jako v odst. 2 definujeme pro $s \in \mathbb{N}_0$ systém $\mathcal{M}_s^{\#}$ polouzavřených dyadických krychlí, které vznikají postupným půlením hran polouzavřených krychlí s vrcholy v $\mathbb{Z}^k$, tj. systém všech množin

$$Q^{\#}(p) := \{x \in \mathbb{R}^k;\ (p_j - 1)/2^s \leq x_j < p_j/2^s,\ j \in \{1, \dots, k\}\}$$

pro $p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$. Označíme-li $q = (1, \dots, 1)$, pak každá z krychlí $Q^{\#}(p)$ je posunutím polouzavřené krychle $Q^{\#}(q)$. Dále je interval $\langle 0,1)^k$ sjednocením po dvou disjunktních polouzavřených krychlí $Q^{\#}(p)$ pro různá $p = (p_1, \dots, p_k)$ splňující $1 \leq p_j \leq 2^s$, $j \in \{1, \dots, k\}$. Počet k-tic z 2^s prvků je 2^{sk}. Platí tedy $a = \mu(\langle 0,1)^k) = 2^{sk}\mu(Q^{\#}(q))$. S přihlédnutím k (4.5.3) je $\lambda_k(Q^{\#}(q)) = 1/2^{sk}$, a proto

$$\mu(Q^{\#}(p)) = \mu(Q^{\#}(q)) = a/2^{sk} = a\lambda_k(Q^{\#}(q)) = a\lambda_k(Q^{\#}(p))$$

pro každé $p \in \mathbb{Z}^k$. Je-li $I \in \mathcal{J}^k$, existuje $s \in \mathbb{N}_0$ takové, že I je sjednocením po dvou disjunktních polouzavřených krychlí z $\mathcal{M}_s^{\#}$. V důsledku toho $\mu(I) = a\lambda_k(I)$. Podle (5.3) platí rovnost $\mu(A) = a\lambda_k(A)$ pro každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{J}^k) = \mathcal{B}^k$. Protože podle (2.2) je $\lambda_k(\langle 0,1)^k) = 1$, z rovnosti $1 = \mu(\langle 0,1)^k) = a\lambda_k(\langle 0,1)^k) = a$ vyplývá, že $\mu(A) = \lambda_k(A)$, kdykoli $A \in \mathcal{B}^k$. □

6 Distribuční funkce a Lebesgue-Stieltjesova míra

Věta 6.1. *Nechť μ je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{B}^1$. Definujme*

$$F(x) := \mu((-\infty, x\rangle)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Potom je funkce F neklesající, zprava spojitá a $F(-\infty+) = 0$, $F(\infty-) = 1$.

Důkaz. Zřejmě $(-\infty, x\rangle \subset (-\infty, y\rangle$, kdykoli $x \leq y$. Proto je F neklesající. Je-li $x \in \mathbb{R}$ a $x_n \searrow x$, pak $(-\infty, x_n\rangle \searrow (-\infty, x\rangle$ a odtud vyplývá $\mu((-\infty, x_n\rangle) \searrow \mu((-\infty, x\rangle)$. Tudíž funkce F je zprava spojitá v bodě x. Rovnosti $F(-\infty+) = 0$ a $F(\infty-) = 1$, které zbývá dokázat, jsou zřejmé, neboť $(-\infty, -n\rangle \searrow \emptyset$, $(-\infty, n\rangle \nearrow \mathbb{R}$ a $\mu(\mathbb{R}) = 1$. $\square$

Každé pravděpodobnostní míře na $\mathcal{B}^1$ odpovídá tudíž přirozeným způsobem definovaná neklesající funkce na $\mathbb{R}$ mající dodatečné vlastnosti.

Budeme říkat, že funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *distribuční funkce*, je-li neklesající, zprava spojitá a $F(-\infty+) = 0$, $F(\infty-) = 1$.

Předpokládejme na okamžik, že F je distribuční funkce, která je navíc rostoucí a spojitá. Není těžké si rozmyslet, že $F(A) \in \mathcal{B}^1$ pro každou $A \in \mathcal{B}^1$ a že $\mu : A \to \lambda_1(F(A))$, $A \in \mathcal{B}^1$, je míra, pro niž $\mu(\mathbb{R}) = 1$ a $\mu((-\infty, x\rangle) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, neboť $F((-\infty, x\rangle)$ je interval o koncových bodech 0 a $F(x)$. Tak určuje tedy v tomto případě distribuční funkce F pravděpodobnostní míru na $\mathcal{B}^1$. Ukážeme, že vzájemně jednoznačné přiřazení mezi pravděpodobnostními mírami a distribučními funkcemi platí zcela obecně.

Věta 6.2. *Nechť F je distribuční funkce. Potom existuje právě jedna pravděpodobnostní míra μ na $\mathcal{B}^1$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$F(x) = \mu((-\infty, x\rangle)\,.$$

Důkaz. Nechť μ a ν jsou míry na $\mathcal{B}^1$, pro něž platí

$$F(x) = \mu((-\infty, x\rangle) = \nu((-\infty, x\rangle)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Potom $\mu((a, b\rangle) = F(b) - F(a) = \nu((a, b\rangle)$, kdykoli $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Systém $\mathcal{J} = \{(a, b\rangle;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ obsahuje s každými dvěma množinami jejich průnik, tudíž podle (5.3) je $\mu(A) = \nu(A)$, pro všechny $A \in \mathcal{B}^1$. Míra μ s vlastností uvedenou ve větě existuje tudíž nejvýše jedna.

Budeme dokazovat existenci míry μ. Následující definice, názorně řečeno, zprostředkuje vyplnění případných „děr“ v množině $F(\mathbb{R})$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme $\Phi[x] := \{F(x)\}$, pokud je x bodem spojitosti funkce F, a $\Phi[x] := \langle F(x-), F(x)\rangle$, pokud F není v bodě x spojitá. Pro $A \subset \mathbb{R}$ definujeme $\Phi[A] := \bigcup_{x \in A} \Phi[x]$. Označme ještě

$$S := \{y \in \langle 0, 1\rangle\,;\ F^{-1}(y) \text{ obsahuje více než 1 bod}\}\,.$$

Pro $y \in S$ je $F^{-1}(y)$ nedegenerovaný interval, proto je množina S spočetná.

Definujme $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R};\ \Phi[A] \in \mathcal{B}^1\}$. Jestliže $A \in \mathcal{A}$, pak existuje $S_1 \subset S$ tak, že $\Phi[A^c] = (\Phi[\mathbb{R}] \setminus \Phi[A]) \cup S_1$, tudíž $A^c \in \mathcal{A}$. Je-li $\{A_n\}$ posloupnost množin z $\mathcal{A}$, pak $\Phi\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi[A_n]$, tudíž $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Je-li A otevřený interval, je $\Phi[A]$ interval. Odtud plyne, že všechny otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou prvky $\mathcal{A}$. Je tedy $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny, tudíž $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{A}$.

Pro $A \in \mathcal{B}^1$ definujeme $\mu(A) := \lambda_1(\Phi[A])$. Nechť $A_1, A_2, \dots$ jsou po dvou disjunktní množiny z $\mathcal{B}^1$. Potom pro všechna $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, je $\Phi[A_m] \cap \Phi[A_n] \subset S$, tedy $\lambda_1(\Phi[A_m] \cap \Phi[A_n]) = 0$. Odtud snadno plyne, že $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Je tedy μ míra na $\mathcal{B}^1$.

Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\Phi[(-\infty, x\rangle]$ interval o koncových bodech 0 a $F(x)$, tak $\mu((-\infty, x\rangle) = F(x)$. $\square$

Poznámka 6.3. Je-li $x \in \mathbb{R}$ a $x_n \nearrow x$, $x_n < x$, pak

$$F(x) - F(x_n) = \mu((x_n, x\rangle)\,.$$

Odtud plyne, že $\mu(\{x\}) = F(x) - F(x-)$. Je tedy $\mu(\{x\}) = 0$, právě když x je bod spojitosti funkce F.

7 Transformace Lebesgueovy míry při lineárních zobrazeních

Nechť $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení. Naším cílem je vyjasnit vztah mezi Lebesgueovou mírou množiny $A \subset \mathbb{R}^k$ a mírou množiny $T(A)$.

Nejprve předpokládejme, že zobrazení T je prosté. Pak zobrazení T^{-1} je spojité, proto obraz každé otevřené množiny při zobrazení T (což je ovšem vzor při zobrazení T^{-1}) je otevřená množina. Označíme-li tedy

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^k;\ T(A) \in \mathcal{B}^k\},$$

je $\mathcal{A}$ zřejmě σ-algebra a $\mathcal{G}^k \subset \mathcal{A}$, tudíž $\mathcal{B}^k \subset \mathcal{A}$.

Pro $A \in \mathcal{B}^k$ definujme $\nu(A) := \lambda_k(T(A))$ a $\Delta(T) := \nu(\langle 0,1\rangle^k)$. Protože $T(\langle 0,1\rangle^k)$ obsahuje neprázdnou otevřenou množinu $T((0,1)^k)$, je $\Delta(T) > 0$. Položme $\mu(A) := (\Delta(T))^{-1}\,\nu(A),\ A \in \mathcal{B}^k$. Protože zobrazení T je lineární a prosté, snadno se ověří, že μ je míra na $\mathcal{B}^k$, která je invariantní vůči posunutí a $\mu(\langle 0,1\rangle^k) = 1$. Podle (5.5) je $\mu(A) = \lambda_k(A),\ A \in \mathcal{B}^k$, neboli $\lambda_k(T(A)) = \Delta(T)\,\lambda_k(A)$.

Jestliže jsou T_1, T_2 prostá lineární zobrazení $\mathbb{R}^k$ na sebe, potom

$$\begin{aligned}\Delta(T_1 \circ T_2) &= \lambda_k((T_1 \circ T_2)(\langle 0,1\rangle^k)) = \lambda_k(T_1(T_2(\langle 0,1\rangle^k))) = \\ &= \Delta(T_1)\,\lambda_k(T_2(\langle 0,1\rangle^k)) = \Delta(T_1)\,\Delta(T_2)\,\lambda_k(\langle 0,1\rangle^k) = \Delta(T_1)\,\Delta(T_2)\,.\end{aligned}$$

Je-li $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ libovolné lineární zobrazení, označme $\det T$ *determinant matice zobrazení* T vzhledem ke standardní bázi $\mathbb{R}^k$.

Uvažujme nyní speciální zobrazení. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou vesměs nenulová reálná čísla a nechť pro $x = (x_1, \dots, x_k)$ je $T(x) := (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_k x_k)$. (Matice tohoto zobrazení má na diagonále $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, na ostatních místech nuly, takže $\det T$ je pro toto diagonální zobrazení roven $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k$.) V tomto případě je $T(\langle 0,1\rangle^k)$ kompaktní interval o délce hran $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_k|$, tedy $\lambda_k(T(\langle 0,1\rangle^k)) = |\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_k|$, takže $\Delta(T) = |\det T|$.

Další speciální zobrazení, které budeme uvažovat, je izometrické lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Podle definice tedy platí $|T(x) - T(y)| = |x - y|$, kdykoli $x, y \in \mathbb{R}^k$. (Matice takového zobrazení je ortonormální, tudíž $\det T = \pm 1$.) Je-li $B = \{x \in \mathbb{R}^k;\ |x| \le 1\}$, je pro takové zobrazení $T(B) = B$, takže $\lambda_k(B) = \lambda_k(T(B)) = \Delta(T)\,\lambda_k(B)$. Zřejmě je $\lambda_k(B) \geq 0$, protože B obsahuje (nedegenerovaný) otevřený interval, tedy $\Delta(T) = 1 = |\det T|$.

Tyto speciální informace stačí k tomu, abychom dokázali následující větu. (Užíváme obvyklé definice $0 \cdot \infty = 0$.)

Věta 7.1. *Nechť $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení. Potom pro každou množinu $A \in \mathcal{B}_0^k$ je $T(A) \in \mathcal{B}_0^k$ a*

$$\lambda_k(T(A)) = |\det T|\,\lambda_k(A). \tag{1}$$

Důkaz. Nechť nejprve T je prosté (tedy matice zobrazení T je regulární). Podle Dodatku existují izometrická zobrazení T_1 a T_3 prostoru $\mathbb{R}^k$ na sebe a diagonální prosté zobrazení $T_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tak, že $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$. Protože pro každou množinu $A \in \mathcal{B}^k$ je $\lambda_k(T_j(A)) = \Delta(T_j)\,\lambda_k(A)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, a navíc $\Delta(T) = \Delta(T_1)\,\Delta(T_2)\,\Delta(T_3)$ a $\det T = \det T_1 \cdot \det T_2 \cdot \det T_3$, tak platí rovnost (1) pro $A \in \mathcal{B}^k$. S odvoláním na (4.2) je třeba dokázat (1) pro $A \in \mathcal{B}_0^k$, pro niž $\lambda_k(A) = 0$. Existuje však $D \in \mathcal{B}^k$, $A \subset D$, $\lambda_k(D) = 0$. Potom $\lambda_k(T(D)) = |\det T|\,\lambda_k(D) = 0$, a protože $T(A) \subset T(D)$, je $T(A) \in \mathcal{B}_0^k$ a $\lambda_k(T(A)) = 0$, takže (1) platí.

Nechť nyní T je lineární zobrazení, které není prosté. Potom $T(\mathbb{R}^k)$ je podprostor v $\mathbb{R}^k$, jehož dimenze je menší než k. Existuje tedy nadrovina $N \subset \mathbb{R}^k$ taková, že $T(\mathbb{R}^k) \subset N$. Označme nyní $H := \{x \in \mathbb{R}^k;\ x_1 = 0\}$ a připomeňme, že podle (4.5.3) je $\lambda_k(H) = 0$. Potom existuje prosté lineární zobrazení $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tak, že $S(H) = N$. Zřejmě

$$\lambda_k(N) = \lambda_k(S(H)) = |\det S|\,\lambda_k(H) = 0\,.$$

Pro $A \in \mathcal{B}_0^k$ tedy platí $\lambda_k(T(A)) \le \lambda_k(N) = 0 = |\det T|\,\lambda_k(A)$. $\square$

Poznámka 7.2. Pro lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ má tedy $|\det T|$ tuto geometrickou interpretaci: $|\det T|$ je „objem“ rovnoběžnostěnu $T(\langle 0, 1\rangle^k)$.

Dodatek. Faktorizace lineárního zobrazení

Lemma. *Nechť* $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *je lineární zobrazení. Potom existuje* $e \in \mathbb{R}^k$, $|e| = 1$, *takové, že* $T(x) \cdot T(e) = 0$, *kdykoli* $x \in \mathbb{R}^k$ *a* $x \cdot e = 0$.

Důkaz. Existuje $e \in \mathbb{R}^k$ takové, že $|e| = 1$ a $|T(z)| \geq |T(e)|$ pro všechna $z \in \mathbb{R}^k$, $|z| = 1$ (spojitá funkce na kompaktní množině). Nechť $x \in \mathbb{R}^k$ a $x \cdot e = 0$. Definujme $\varphi(t) := |T(e + tx)|^2$, $t \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\varphi(t) = |T(e)|^2 + 2\,t\,T(x) \cdot T(e) + t^2\,|T(x)|^2\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Je-li $y = e + t\,x$, $t \in \mathbb{R}$, je $|y|^2 = |e|^2 + t^2|x|^2 \geq 1$. Pro $z := y/|y|$ platí $|z| = 1$ a tudíž $|T(y)| = |y|\,|T(z)| \geq |T(e)|$. Proto platí $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, pro všechna $t \in \mathbb{R}$, takže v bodě 0 nabývá φ minima. To znamená, že $\varphi'(0) = 0$. Ovšem $\varphi'(0) = 2\,T(x) \cdot T(e)$. □

Věta. *Nechť* M *je regulární* $(k \times k)$*-matice. Potom existují ortonormální matice* A, B *a diagonální regulární matice* C *tak, že* $M = A\,C\,B$.

Důkaz. Na základě lemmatu se sestrojí ortonormální báze $\{v_1, \dots, v_k\}$ prostoru $\mathbb{R}^k$ tak, že $M\,v_i \cdot M\,v_j = 0$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$. Nechť $\alpha_j := |M v_j|$, $j \in \{1, \dots, k\}$, a C je matice s (kladnými) prvky α_j na diagonále. Dále nechť A je matice o sloupcích $w_j := (\alpha_j)^{-1}\,M\,v_j$, B matice o řádcích v_j, $j = 1, \dots, k$. Pak $A\,C$ je matice o sloupcích $M\,v_j$, $j = 1, \dots, k$, což je matice $M\,B'$ (čárka značí transponovanou matici). Je tudíž $A\,C\,B = M\,B'\,B = M$. □