9 Přednáška z 10. 12. 2003

Věta (Cayleyova):

$$t(n) = n^{n-2}$$

Tato věta byla zmíněna již v minulé přednášce, ale nebyla dokázána. Nyní si jí i dokážeme. Důkaz této věty ovšem spočívá v důkazu věty následující.

Věta:

$$t(d_1, \cdots, d_n) = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

$$\forall \quad d_1, \cdots, d_n \geq 1 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n2$$

Kde d_i je skóre grafu a $t(d_1, \cdots, d_n)$ je počet stromů na množině $\{1, \cdots, n\}$ splňující podmínku, že stupeň i-tého vrcholu je d_i.

Důkaz dostatečnosti důkazu druhé věty:

Stačí dokázat, že

$$\sum_{\substack{d_i \geq 1 \\ \sum d_i = 2n-2}} t(d_1, \cdots, d_n) = n^{n-2}$$

$$\sum_{\substack{d_i \geq 1 \\ \sum d_i = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdots(d_n-1)!} = \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ \sum k_i = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1!\cdots k_n!} =$$

Použijeme-li multinomickou větu, dostaneme:

$$= \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n} = n^{n-2}$$

Multinomická věta:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ \sum k_i = n}} \binom{n}{k_1, \cdots, k_m} x_1^{k_1} . x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$$

Kde $\displaystyle\binom{n}{k_1, \cdots, k_m} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$

Kombinační číslo

$\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny

Důkaz:

Použijeme počítání dvěma způsoby. Označíme X n-prvkovou množinku.

$$\binom{|X|}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{\text{počet uspořádaných } k\text{-tic}}}{\underbrace{k!}_{\text{počet uspořádání}}}$$

Uvažme matici, ve která budou zapsány jedničky a nuly následujícím předpisem. označme sloupce uspořádanými k-ticemi a řadky $\binom{X}{k}$. A pokud si sloupec a řádek odpovídají, umístíme na tuto pozici jedničku, jinak nulu.

Tímto způsobem dostaneme v každém řádku $k!$ jedniček a v každém sloupci právě jednu jedničku.
Čili počet uspořádaných k-tic je $|\binom{X}{k}|k!$

návrat zpět:

Vraťme se nyní zpět k důkazu věty, kteroužto jsme použili k důkazu Caleyovi věty.
Pro upřesnění:

$$t(d_1, \cdots, d_n) = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}$$

Důkaz:

Označme $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d_1, \cdots, d_n) = \{T; d_T(i) = d_i\}$
$\exists j : \quad d_j = 1 \quad n \geq 3$
předpokládejme, že $d_n = 1$

Označme $\mathcal{T}_i$ množinu všech stromů T', mající tyto vlastnosti:

$$d_i \geq 2 \quad \mathcal{T}_i = \{T'; T' \text{ je strom na } \{1, \cdots, n\}, \{i, n\} \in E'\}$$

$$\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_{i'} = \emptyset \qquad \forall i \neq i'$$

$|\mathcal{T}_i| = t(d_1, \cdots, d_i - 1, \cdots, d_{n-1})$ podle Lematu o postupné výstavbě stromu

Postupujme indukcí dle n:
Pro $n = 2$ a $n = 3$ jsme ověřili již minule

$$|\mathcal{T}_i| = t(d_1, \cdots, d_i - 1, \cdots, d_{n-1}) =$$

$$= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_i-2)! \cdots (d_{n-1}-1)!} =$$

rozšíříme celý zlomek zlomkem $\dfrac{d_i - 1}{d_i - 1}$

$$= \frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)! \cdots (d_{n-1}-1)!} =$$

a jmenovatel vynásobíme $(d_n - 1)! = 1 \quad (d_n = 1)$

$$= \underline{\underline{\frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!}}}$$

$$|\mathcal{T}| = \sum |\mathcal{T}_i| = \sum_{i, d_i \geq 1} \frac{(n-3)!(d_i-1)}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!} =$$

$$\underbrace{\sum_{i, d_i \geq 1} (d_i - 1)}_{n-2} \left(\frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdots (d_n-1)!} \right) = \underline{\underline{\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)! \cdots (d_n-1)!}}}$$

Jiný důkaz:

Dokážeme, že existuje jednoznačné zobrazení mezi daným grafem a posloupností $a_1, \cdots, a_{n-2}$

Definice posloupnosti:

Mějme vrcholy očíslované popořadě přirozenými čísly. Nechť a_1 je číslo souseda minimálního listu(listu s nejnižším stupněm a číslem). Umažme nyní tento list a pokračujme stejně až do a_n.

Postup zpětné výstavby:

Vezmeme minimální list, který se nevyskytuje v posloupnosti a spojíme ho s a_1. Jeho číslo umístíme místo a_1 a pokračujeme, dokud není strom opět vystavěn.

Ještě jiný důkaz:

Počítejme počet stromů s nejvýše dvěma význačnými vrcholy.

Definice obratlovce:

Obratlovec je strom T se dvěma význačnými vrcholy x_1, x_2. Jeho *páteř* je cesta z x_1 do x_2

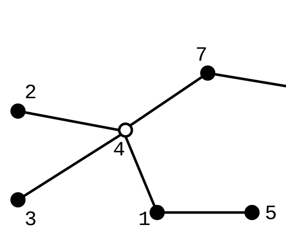
Z každé kostry můžeme stvořit právě n^2 obratlovců.

Pozorování

Počet obratlovců je n^n

Pozorování dokážeme tím, že najdeme vzájemně jednoznačné zobrazení mezi obratlovci a zobrazením

$$f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$$



Napišme čísla vrcholů páteře seřazená podle velikosti a pod ně pořadí v němž jsou v páteři:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Dále napišme ostatní vrcholy podle pořadí, jak vedou do páteře.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dostáváme takto několik nezávislých cyklů. Složíme-li je dohromady, je výsledná permutace hledaným zobrazením.

Definice:

Eulerovský graf je graf $G = (V, E)$ pro který existuje nakreslení, v němž existuje tah $\{x_0, e_1, \cdots, e_m, x_m = x_0\}$ takový, že $\{e_1, \cdots, e_m\} = E$. (Z toho, že se jedná o tah vyplývá, že se hrany nesmějí opakovat, ale mohou se opakovat vrcholy)

Věta:

$G = (V, E)$ lze nakreslit jedním uzavřeným tahem $\iff$ G je souvislý a má všechny stupně sudé.