6 Přednáška z 19. 11. 2003

Důkaz Lemmatu z předchozí přednášky

Nechť $x_0, e_1, x_1, \cdots, e_t, x_t$ je cesta maximání délky délky. $t \geq 1 \wedge t \leq |V| - 1$ (Tyto omezující podmínky plynou z předpokladu a souvislostí).

Potom x_0 a x_t jsou listy.

Dokažme sporem. Předpokládejme, že $d_t(x_0) > 1 \Rightarrow \exists y \neq x_1$ tak, že $\{x_0, y\} \in E$. Potom musí nastat jeden z následujících případů:

- $y \in \{x_2, x_3, \cdots, x_t\} : y = x_i$ Vyjdeme-li z tohoto předpokladu, tak dostáváme kružnici

$\Rightarrow$ **SPOR!**

- $y \notin \{x_2, x_3, \cdots, x_t\}$ Potom můžeme cestu rozšířit o hranu $\{x_0, y\}$ a o vrchol y. Z toho ovšem plyne, že cesta neměla maximální délku

$\Rightarrow$ **SPOR!**

Lemma (Postupná výstavba stromu):

Nechť G je graf, pro který platí, že $d_g(x) = 1$
Potom G je strom $\Longleftrightarrow G - x$ je strom

Definice:

$$\begin{aligned} G &= (V, E) \\ G - x &= (V', E') \\ V' &= V \setminus \{x\} \\ E' &= \{e; e \in E \wedge x \notin e\} \end{aligned}$$

Důkaz:

$\Rightarrow$ Nechť G je strom

- $G - x$ neobsahuje kružnice, protože už G (od kterého jsme odebrali jeden vrchol a jednu hranu) neobsahoval kružnice
- $G - x$ je souvislý:
  Nechť $y, z \in V \setminus \{x\}$. Protože G je souvislý, existuje cesta $y = x_0, e_1, x_1, \cdots, e_t, x_t = z$. Žádná taková cesta nemůže obsahovat x, protože do x vede jen jedna hrana. Takto tedy dostáváme cestu v $G - x$.

$\Leftarrow$ Nechť $G - x$ je strom

- G je souvislý, protože existuje hrana vedoucí z x do $y; y \in G - x$. Podle předpokladu existuje cesta ze všech vrcholů grafu $G - x$ do y. Nyní tedy musí existovat cesta i do x, protože existuje cesta mezi x a y
- G neobsahuje kružnice:
  - kružnice nemůže být $G - x$ (podle předpokladu).
  - kružnice nemůže obsahovat x, protože x je stupně 1.

Věta (hlavní věta o stromech):

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom.
2. G je *minimální* souvislý graf. (Minimálním souvislým grafem je míněn graf, který je souvislý a libovolný graf $(V, E - e \in E)$ je nesouvislý)
3. G je *maximální* graf bez kružnice. (Maximálním grafem bez kružnice je míněn graf, který neobsahuje kružnici a libovolný graf $(V, E \cup \{e\}); e \in \binom{V}{2} \setminus E)$ obsahuje kružnici)
4. G je *jednoznačně souvislý*. (Pro každé $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y)
5. G je souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Důkaz:

$1 \Rightarrow 3$ Uvaž graf $(V, E \cup \{e\}); e = \{x, y\}$. Potom existuje cesta z x do y v G (protože je souvislý) a spolu s e tvoří kružnici.

$3 \Rightarrow 1$ G je maximální graf bez kružnic. Stačí tedy dokázat, že je souvislý. Předpokládejme, že není. V_1, V_2 jsou komponenty grafu G. Zvolme $x_1 \in V_1$ a $x_2 \in V_2$. Uvažme graf $G \cup \{\{x_1, x_2\}\}$. Tento graf je souvislý, neobsahuje kružnice a je větší.

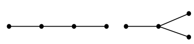
$1 \Rightarrow 5$ $G = (V, E)$ je strom. Postupujme indukcí dle $|V|$.

$\lvert V\rvert = 1$		$0 = 1 - 1$	$\surd$
$\lvert V\rvert = 2$		$1 = 2 - 1$	$\surd$
$\lvert V\rvert = 3$		$2 = 3 - 1$	$\surd$

V indukčním kroku $|V| = n + 1 \geq 2$. Nechť $x \in V$ je list. Potom $G' = G - x$ je strom (podle Lemmatu o listech). Podívejme se tedy, co víme:

$$\left.\begin{array}{l}\text{dle předpokladu } |E'| = |V'| - 1 \\ |E| = |E'| + 1, |V| = |V'| + 1\end{array}\right\} |E| = |V| - 1$$

$5 \Rightarrow 1$ Nechť $G = (V, E)$ je graf splňující 5. Indukcí dle $|V|$ ukážeme, že G je strom

$\lvert V\rvert = 1$		$\surd$
$\lvert V\rvert = 2$		$\surd$
$\lvert V\rvert = 3$		$\surd$
$\lvert V\rvert = 4$		$\surd$

Nechť $|V| = n + 1$

Pozorování:

G obsahuje list

Důkaz pozorování:

Uvažme stupně vrcholů:

$$
\begin{aligned}
0 \leq d_g(x) \leq n & \qquad \text{ze souvislosti dostaneme:} \\
1 \leq d_g(x) \leq n & \qquad \text{dále víme, že:} \\
\sum_{x \in V} d_g(x) = 2|E| & \qquad \text{z druhého předpokladu dostáváme, že:} \\
\sum_{x \in V} d_g(x) = 2|E| = 2|V| - 2 &
\end{aligned}
$$

Z obou předpokladů dohromady plyne, že existuje vrchol se stupněm 1.

Nechť x je list G. Uvažme graf $G' = G - x = (V', E')$

G' je souvislý a $|E'| = |V'| - 1$ $\Rightarrow$ dle předpokladu je G' strom $\Rightarrow$ G je strom. (Podle Lemmatu o postupné výstavbě)

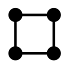
Důsledek:

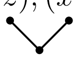
Maximáloní počet hran grafů s množinou vrcholů V bez kružnic je $|V| - 1$.

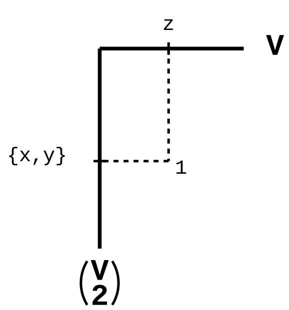
Věta:

Maximální počet hran grafu bez C_4 je $\leq \frac{1}{2}(n^{\frac{3}{2}} + n)$

Důkaz (pomocí počítání dvěma způsoby) :

$G = (V, E)$, $|V| = n$, G neobsahuje $C_4 =$ 

Uvažme množinu $\mathcal{M} = \{(\{x, y\}, z); (x, z) \in E \land (y, z) \in E \land x \neq y\}$. Jinými slovy, uvažme množinu všech 



$$|\mathcal{M}| \leq \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{počet } \{x,y\}} . \overbrace{1}^{\text{z}} \qquad \text{nevíme, kolik je } z \text{, ale v řádku je nejvýše } 1 \times 1$$

$$|\mathcal{M}| = \sum_{z \in V} \binom{d_g(z)}{2} \qquad \text{počet možných "vidliček" s daným } z$$

$$\sum_{z \in V} \binom{d_g(z)}{2} \leq \binom{n}{2}$$

My chceme ale zjistit něco o $|E|\ldots$

Zbavíme se kobinačních čísel:

$$\sum_{z \in V} \frac{(d_g(z)-1)^2}{2} \leq \sum_{z \in V} \binom{d_g(z)}{2} \leq \binom{n}{2} \leq \frac{n^2}{2}$$

$$\sum_{z \in V} (d_g(z)-1)^2 \leq n^2$$

Použijeme *Cauchy-Schwarzovu nerovnost*, která zní:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

$V = \{1, \cdots, n\} \qquad x_i = d_g(i) - 1 \qquad y_i = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (d_g(i)-1).1 &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_g(i)-1)^2} . \sqrt{n} \leq n.\sqrt{n} \\ 2|E| - n &\leq n.\sqrt{n} \\ |E| &\leq \frac{n^{\frac{3}{2}} + n}{2} \end{aligned}$$