4 Přednáška z 5. 11. 2003

Spernerův problém - pokračování

Důkaz

1. $\alpha(B_n) \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

   $\binom{X}{k}$ je nezávislé v $\mathcal{P}(X)$

   $\alpha(B_n) \geq \binom{n}{k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

   $\binom{n}{k}$ je největší pro $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

2. $\alpha(B_n) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

   $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \qquad \mathcal{M}$ je nezávislá v B_n

   $\mathcal{M} \not\subseteq M \qquad \forall M \in \mathcal{M}$

   Počítání dvěma způsoby $\quad A = (a_{ij})$ řádu $m \times n, a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\sum_{j=1}^{m} a_{ij})}_{\text{řádkové součty}} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} a_{ij})}_{\text{sloupcové součty}}$$

$$|\{(M, R); M \in \mathcal{M} \quad \wedge \quad R \text{ je maximální řetězec v } B_n \quad \wedge \quad M \in R\}|$$

(a)

$$= \sum_{R' \in R} |\{M \in \mathcal{M} \wedge M \in R'\}| \leq |R| = n!$$

(b) Počet maximálních řetězců obsahujících M

$$= \sum_{M \in \mathcal{M}} \overbrace{|M|!}^{\text{cesty do } M} \underbrace{(n-|M|)!}_{\text{cesty z } M}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{M \in \mathcal{M}} |M|!(n-|M|)! &\leq n! \\
\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{|M|!(n-|M|)!}{n!} &\leq 1 \\
\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{1}{\frac{n!}{|M|!(n-|M|)!}} &\leq 1 \\
\sum_{M \in \mathcal{M}} \frac{1}{\binom{n}{|M|}} &\leq 1 \\
\sum \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} &\leq \sum \frac{1}{\binom{n}{|M|}} \\
|\mathcal{M}| \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} &\leq 1 \\
|\mathcal{M}| &\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
\alpha(B_n) &\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}
\end{aligned}$$

Littlewood-Offordův problém

Výsledek nějakého děje, jehož průběh je ovlivňován různými vlivy lze vyjádřit:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{vlivy} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ a_i > 0 \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = a \qquad \text{počet možných výrazů je } 2^n$$

Kolik bude výrazů takových, že $a \in (x-1, x+1)$?

- méně než $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$
- Tento výsledek je nejlepší možný v následujícím smyslu:

  $\exists a_1, \ldots, a_n \wedge \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ a_i > 0 \wedge x \in \mathbb{R}$ tak, že počet výrazů v intervalu $(x-1, x+1)$ je $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Důkaz(Erdös-Szekeres):

Definujme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ předpisem

$$M \subseteq \mathcal{M} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\sum_{i \in M} a_i - \sum_{i \notin M} a_i}_{\sum \varepsilon_i a_i} \in < x-1, x+1 >$$

Pozorování:

$\mathcal{M}$ je nezávislá množina.

Důkaz pozorování:

sporem: předpokládejme, že $M, M' \in \mathcal{M}, M \subsetneq M' \Rightarrow \exists i_0 \in (M' \setminus M)$

$$M \subsetneq \qquad M \cup \{i_0\} \qquad \subseteq M'$$

$$\sum_{i \in M} a_i - \sum_{i \notin M} a_i < \ \textstyle\sum_{i \in M \cup \{i_0\}} a_i - \sum_{\substack{i \notin M \\ i \neq i_0}} a_i \ \leq \displaystyle\sum_{i \in M'} a_i - \sum_{i \notin M'} a_i$$

$$\sum_{i\in M} a_i - \sum_{i\notin M} a_i - \sum_{i\in M\cup\{i_0\}} a_i - \sum_{\substack{i\notin M\\ i\neq i_0}} a_i = 2a_{i_0} > 2$$

SPOR!

Grafy

Graf $G(V,E)$ se skládá z konečné množiny vrcholů V a z množiny hran E
$E \subseteq \binom{V}{2}$; $E = \{e, e \subseteq V \wedge |e| = 2\}$

Typy grafů:

- K_n - úplný graf na n vrcholech $|V| = n$ $\quad |E| = \binom{|V|}{2}$
- C_n - kružnice (cyklus) na n vrcholech $\quad n \geq 3$

  $$V = \{v_1, \ldots v_n\}, E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$$

- P_n - cesta na n vrcholech

  $$V = \{v_1, \ldots v_n\}, E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$$

  – délka cesty P_n je počet jejích hran, tedy $n - 1$

- $G_1(V_1, E_1)$ je podgraf grafu $G_2(V_2, E_2)$, jestliže $V_1 \subset V_2 \wedge E_1 \subset E_2$
- $G_1(V_1, E_1)$ je indukovaný podgraf grafu $G_2(V_2, E_2)$, jestliže
  $V_1 \subset V_2 \wedge E_1 = E_2 \cap V_1 \times V_1$
- $G_1(V_1, E_1)$ a $G_2(V_2, E_2)$ jsou izomorfní, jestliže existuje bijekce
  $f : V_1 \to V_2 : \forall x, y \in V_1 : \{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$

Kolik je grafů na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$?

$$- \qquad 2^{\binom{n}{2}}$$

$$\text{pozorování: } 2^{\binom{n}{2}} \gg 2^{n \log_2 n} = n^n > n!$$

Izomorfizmus na $G(V,E)$ je ekvivalence $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ rozklad $G(V,E)$ na třídy ekvivalence
Kolik je $\underbrace{\text{tříd ekvivalence izomorfismu}}_{\text{neizomorfních grafů}}$?

- Každá je menší než $n!$
-

$$Iso_n \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$$