3 Přednáška z 29. 10. 2003

Vlastnosti relací:

X je množina $\qquad R(R \subseteq X \times X)$ je *relace* na X

1. Relace R je *reflexivní* jestliže $(x, x) \in R, \forall x \in X$
2. Relace R je *symetrická* jestliže $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
3. Relace R je *antisymetrická* jestliže $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$
4. Relace R je *slabě antisymetrická* jestliže $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$
5. Relace R je *tranzitivní* jestliže $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
6. Relace R je *úplná* jestliže $\forall x, y \in X$ platí $(y, x) \in R \vee (x, y) \in R$

Relace R je *ekvivalence* na X, pokud splňuje body 1, 2 a 5

Relace R je *částečné uspořádání* (množina (X, R) je *částečně uspořádaná*), pokud splňuje body 1, 4 a 5

Relace R je *lineární uspořádání* (množina (X, R) je *lineárně uspořádaná*), pokud splňuje body 1, 4, 5 a 6

Inverzní relace	- $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$
Diagonála	- $\Delta_x = \{(x, x) : x \in X\}$
Složení	- $R \circ S = \{(x, z) : \exists y \in X : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

Vlastnosti relací můžeme zapsat tedy i jinak:

1. $\Delta_x \subseteq R$	3. $R \cap R^{-1} = \emptyset$	5. $R \circ R \subseteq R$
2. $R^{-1} = R$	4. $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_x$	6. $R \cup R^{-1} = X \times X$

Příklady:

ekvivalence	- shodnost, podobnost, ...
částečné uspořádání	- lineární uspořádání
	- $\mathbb{N} \qquad R = \{(m, n); m \mid n\}$

Věta:

Pro každou konečnou částečně uspořádanou množinu (X, R) existuje lineární uspořádání L množiny X tak, že $R \subseteq L$

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *minimální prvek* (X, R), jestliže neexistuje $y \in X$ tak, že $(y, x) \in R \wedge (y \neq x)$.

Důkaz:

Indukcí dle $|X|$

$|X| = 1 \qquad \surd$

$n \to n + 1$

Nechť $x \in X$ je *minimální prvek* $X(v(X, R))$. Definujeme částečně uspořádanou množinu (X', R') předpisem $X' = X - \{x\}$ a $R' = R \cap (X' \times X')$

$|X'| = n$ dle indukce $R' \subseteq L'$ $L'-$lineární uspořádání

definujme relaci L předpisem:

$(y, z) \in L \Leftrightarrow (y, z) \in L' \qquad x \neq y, x \neq z$
$(x, x) \in L$
$(x, y) \in L \qquad \forall y \in X'$

Je zřejmé, že L je lineární uspořádání a že $L \supseteq R$ (protože x je minimální prvek.

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *nejmenší prvek* (X, R), jestliže $(x, y) \in R \forall y \neq x, y \in X$.

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *maximální prvek* (X, R), jestliže x je minimální prvek v (X, R^{-1}).

Definice:

(X, R) je částečně uspořádaná množina. $x \in X$ nazvu *největší prvek* (X, R), jestliže x je nejmenší prvek v (X, R^{-1}).

Věta:

Každá konečná neprázdná částečně uspořádaná množina má minimální prvek.

Důkaz:

intuitivní: Zvol $x \in X$
Pokud je x minimální, konec.
Jinak existuje $x' \neq x, (x', x) \in R$. Opakuj tedy pro x'.

sporem: Zvol $x \in X$ tak, aby $\{y; (x, y) \in R\}$ měla maximální počet prvků $\leq |X|$. Pak tvrdím, že x je minimální.

spor: Kdyby existovalo $z \neq x, (z, x) \in R$, pak

$$|\{y; (z, y) \in R\}| \geq |\{y; (x, y) \in R\}| + 1$$

Množinové znázornění ekvivalencí a částečně uspořádaných množin

Definice:

Množina $\mathcal{P}(X) = \{Y; Y \subseteq X\}$ se nazývá *potenční množina.* Značí se $\mathcal{P}(X), {}^X2, 2^X, exp(X)$. $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathcal{P}(X)$ a $\{f : X \to \{0,1\}\}$

$A \subseteq X$ $\quad f : X \to \{0,1\}$ $\quad$ charakteristická funkce množiny - ${}^\chi A$

$f(x) = 1 \quad x \in A$

$f(x) = 0 \quad x \notin A$

$\{x \in X, f(x) \neq 0\}$ - nosič f

Částečně uspořádaná množina

$B_X = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Věta:

Každá částečně uspořádaná množina (X,R) je izomorfní indukovanému poduspořádánému $B_X = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Relace (X,R) a (X',R') jsou *izomorfní*, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : X \to X'$ tak, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in R'$

(X,R) je indukované poduspořádání (X',R') pokud

$$X \subseteq X' \qquad \wedge \qquad R \subseteq R' \qquad \wedge \qquad R = R' \cap (X \times X)$$

Důkaz:

$(X,R) \qquad (\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Definujme zobrazení $f : X \to \mathcal{P}(X)$ předpisem $f(x) = \{y; (y,x) \in R\}$

f je prosté $\quad$ viz. slabá antisymetrie

$(x,y) \in R \Rightarrow f(x) \subseteq f(y) \quad f$ je tranzitivní

$f(x) \subseteq f(y) \Rightarrow (x,y) \in R \quad f$ je reflexivní

O ekvivalencích

(X, R) je ekvivalence

$R(x) = \{y, (x, y) \in R\}$ - třída ekvivalence obsahující x

Věta: $x, y \in X \Rightarrow \Big(R(x) = R(y)\Big) \vee \Big(R(x) \cap R(y) = \emptyset\Big)$

Důkaz: Nechť $R(x) \cap R(y) \neq \emptyset$ a $z \in R(x) \cap R(y)$

$$(x, z) \in R \qquad (y, z) \in R \Leftrightarrow (x, z) \in R \qquad (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R$$
$$\text{tedy} (z, x) \in R \Leftrightarrow (z, y) \in R$$
$$\text{tedy} R(x) = R(y)$$

Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_t$ jsou všechny různé množiny tvaru $R(x), x \in X$

$$X_i \cap X_j = \emptyset \qquad \forall \qquad 1 \leq i, j \leq t, i \neq j \qquad \bigcup_{i=1}^{t} X_i = X$$

Nazvěme je *rozklad* X na části $X_1, \ldots, X_t$

Je-li $X_1, \ldots, X_t$ rozklad množiny X, definujme relaci R na X předpisem:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists i \text{ tak, že } x, y \subseteq X_i$$
$$R \text{ je ekvivalence}$$

Nechť je (X, R) částečně uspořádaná množina

$A \subseteq X$ je *nezávislá*, jestliže $x \neq y \in A \Rightarrow (x, y) \notin R \wedge (y, x) \notin R$

$A \subseteq X$ je *řetězec* v (X, R), jestliže $\Big(A, R \cap (A \times A)\Big)$ je lineárně uspořádaná množina.

Označme $\alpha(X, R)$ maximální počet prvků nezávislé podmnožiny a $\omega(X, R)$ maximální počet prvků řetězce.

Věta: $\alpha(X,R).\omega(X,R) \geq |X|$ pro každou částečně uspořádanou množinu (X,R).

Důkaz: Definujme podmnožiny $X_1, X_2, \dots, X_t$ množiny X předpisem

$$\begin{array}{lcr} X_1 = & \{x, x \text{ je minimální prvek } (X,R) & \neq \emptyset \\ X_2 = & \{x, x \text{ je minimální prvek } \Big(X \setminus X_1, R \cap ((X \setminus X_1) \times (X \setminus X_1))\Big) & \neq \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Jestliže $X_1, \dots, X_l$ jsou dány

$$X_{l+1} = \{x, x \text{ je minimální prvek } \Big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} X_i, R \cap ((X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} X_i) \times (X \setminus \bigcup_{i=1}^{l} X_i))\Big)$$

$X_1, X_2, \dots, X_t$ tvoří rozklad X
X_i jsou nezávislé množiny v (X,R) $\quad |X_i| \leq \alpha(X,R)$

Pozorování: $t = \omega(X,R)$

$\omega(X,R) \leq t$ - Je-li $A \subseteq X$ řetězec $\Rightarrow |A \cap X_i| \leq 1$
- různé prvky A jsou v relaci
- různé prvky X_i nejsou v relaci

$t \leq \omega(X,R)$ - stačí dokázat, že (X,R) obsahuje řetězec délky t
$x_{i-1} \in X_{i-1} \quad x_i \in X_i$
- pokud $(x_{i-1}, x_i) \notin R$, x_i nebyl minimální prvek $\Rightarrow$ SPOR

Aplikace - Erdös-Szekeres

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je posloupnost reálných čísel. Potom posloupnost obsahuje monotónní (neklesající nebo nerostoucí) podposloupnost s $\lceil\sqrt{n}\rceil$ prvky.

Důkaz:

Definujeme částečně uspořádanou množinu (X, R) předpisem:

$$(i, j) \in R \Leftrightarrow i \leq j \wedge x_i \leq x_j$$

A je řetězec v (X, R):	$(i, j) \in R$	$\forall i, j \in A$	
	$i_1 < \ldots < i_t$	$\wedge$	$x_1 \leq \ldots \leq x_t$ - neklesající
A je nezávislá množina v (X, R):	$(i, j) \notin R$		
	$i_1 < \ldots < i_t$	$\wedge$	$x_1 > \ldots > x_t$ - nerostoucí

$$\alpha.\omega \geq |X| \Rightarrow \alpha \geq \sqrt{|X|} \vee \omega \geq \sqrt{|X|}$$

Příklad:

Množina X a podmnožina $M \subseteq \mathcal{P}(X)$ spolků

Kolik je nezávislých spolků?
To záleží na zadání, ale...
Kolik jich je maximálně? $\alpha(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Množiny M a M' ($M \neq M'$ jsou závislé, jestliže $M \subseteq M' \quad \vee \quad M' \subseteq M$).

Věta Spernerova

$$\alpha(B_n) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$