2 Přednáška z 22. 10. 2003

Princip inkluze a exkluze

Pozorování:

A, B jsou konečné množiny:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

A, B, C jsou konečné množiny:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Zobecněním dostaneme

Princip inkluze a exkluze

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom platí:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i|$$

$$\text{obecný } k\text{-tý člen } (-1)^{|I|-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Důkaz: indukcí dle n

$n = 1$ $\quad |A| = |A|$

$n = 2$ $\quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$n \to n + 1$

$$|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| = |\underbrace{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}_{A} \cup \underbrace{A_{n+1}}_{B}| \stackrel{n=2}{=} |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}| =$$

$$= |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})| =$$

použijeme indukční předpoklad

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i| +$$

$$+|A_{n+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n} |\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i|$$

sečtením obecných k-tých členů dostaneme

$$\begin{array}{c} \sum\limits_{\substack{I\subseteq\{1,2,\cdots,n\} \\ |I|=k}} |\bigcap\limits_{i\in I} A_i| + \\ \sum\limits_{\substack{I\subseteq\{1,2,\cdots,n\} \\ |I|=k-1}} |\bigcap\limits_{i\in I} A_i \cap A_{n+1}| \\ \hline \sum\limits_{\substack{I\subseteq\{1,2,\cdots,n+1\} \\ |I|=k}} |\bigcap\limits_{i\in I} A_i| \end{array}$$

Šatnářka

množina $M = \{1, 2, \ldots, n\}$

Počítáme počet permutací π množiny M bez pevného bodu (bez pevného bodu $= \pi(i) \neq i, \forall i \in M$)
$X = \{\pi; \pi \text{permutace} M\}$
$A_i = \{\pi; \pi \in X \wedge \pi(i) = i\}$

$$s(n) = |X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i| = |X| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = n! - \sum \underbrace{|A_i|}_{(n-1)!} + \sum \underbrace{|A_i \cap A_j|}_{(n-2)!} \ldots =$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^k \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{(n-k)!k!}} (n-k)! + \ldots + \underbrace{(-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!}_{1} =$$

$$= \underbrace{n!\Big(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\Big)}_{\text{konverguje k } \frac{n!}{e}}$$

Interpretace Principu inkluze a exkluze

množina X, vlastnosti(predikáty) $V_1, V_2, \ldots, V_n$

počet prvků bez vlastností = počet prvků - $\sum$ prvků majících alespoň 1 vlastnost
+ $\sum$ prvků majících alespoň 2 vlastnosti - ...

$$\underbrace{|X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i|}_{\text{počet prvků bez vlastností}} = \underbrace{|X| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \ldots}_{\text{počet prvků bez vlastností(podle PIE)}}$$

Aplikace

Matice $k \times n$ se nazývá *latinský obdélník (pro* $k = n$ latinský čtverec), jestliže
$a_{ij} \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ a
$\forall i : a_{ij} \neq a_{ij'} \iff j \neq j'$
$\forall j : a_{ij} \neq a_{i'j} \iff i \neq i'$

Kolik je latinských obdélníků $k \times n$?

$$\begin{array}{ccl} 1 \times n & - & n! \\ 2 \times n & - & n!s(n) \doteq \frac{(n!)^2}{e} \\ 3 \times n & \leq & \frac{(n!)^3}{e^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k \times n & \leq & \frac{(n!)^k}{e^{k-1}} \end{array}$$