10 Přednáška ze 17. 12. 2003

Věta:

$G = (V, E)$ lze nakreslit jedním uzavřeným tahem $\Longleftrightarrow$ G je souvislý a má všechny stupně sudé.

Důkaz

$\Rightarrow$ G je souvislý. Nechť v je libovolný vrchol v G. A mějme uzavřený eurelovský tah $v_0, e_1, v_1, \cdots, e_t, v_t = v_0$

Definice:

Eulerovský tah je sled, v němž je každá hrana grafu obsažena právě jednou a každý vrchel alespoň jednou.

Zjišťujme tedy stupeň vrcholu v:

$$\underbrace{d = |\{i, v = v_i\}|}_{\text{počet } v \text{ v eulerovském tahu}} \qquad \underbrace{v_i \in e_i \quad \wedge \quad v_i \in e_{i+1} \quad \wedge \quad v_{i+1} \notin e_i}_{\text{každý vrchol } v_i \text{ je součástí dvou hran}}$$

Tedy $d_G(v) = 2d$

$\Leftarrow$ Nechť $v_0, e_1, v_1, \cdots, e_t, v_t$ je tah v G, který je nejdelší. Potom:

- $v_0 = v_t$

  Kdyby $v_0 \neq v_t$ potom by $|\{i, v_t \in e_i\}|$ bylo liché číslo, což je ve sporu s předpokladem že stupeň v_t je sudý.

- $\{e_1, \cdots, e_t\} = E$

  Dokážeme sporem. Nechť existuje $e = \{v, v'\}, e \in E \setminus \{e_1, \cdots, e_t\}$. Ze souvislosti ale plyne, že existuje hrana $e' = \{v_i, v''\}$ pro nějaké i taková, že $v'' = v'$ nebo $v'' = v$. Potom můžeme tah prodloužit o hrany e a e' $\Rightarrow$**SPOR!**

Důsledky:

Věta:

Nechť G je eulerovský graf. Potom G nemá most.

Definice:

Most je hrana po jejímž odstranění má vzniklý graf více komponent.

Důkaz:

Předpokládejme, že graf je eulerovský a je tam most. Uvažme tedy graf bez mostu. Obě jeho komponenty jsou souvislé a mají právě jeden stupeň lichý. Tímto se dostáváme do sporu s principem sudosti.

Věta:

Graf $G = (V, E)$ má všechny stupně sudé $\Leftrightarrow$ E je hranově disjunktním sjednocením kružnic.

Definice:

E je hranově disjunktní sjednocení kružnic pokud

$$E = \bigcup E_i \quad \wedge \quad E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neg j$$

kde E_i jsou množiny hran kružnic.

Důkaz:

$\Leftarrow$ Každá kružnice přidá ke každému vrcholu buď žádnou nebo dvě hrany. Z toho plyne, že všechny stupně jsou sudé

Pozorování: $E \neq \emptyset \Rightarrow (V, E)$ obsahuje kružnici. Každá komponenta obsahuje strom a navíc hranu $e = \{v_1, v_t\}$ spojující listy(z předpokladu, že všechny stupně jsou sudé)

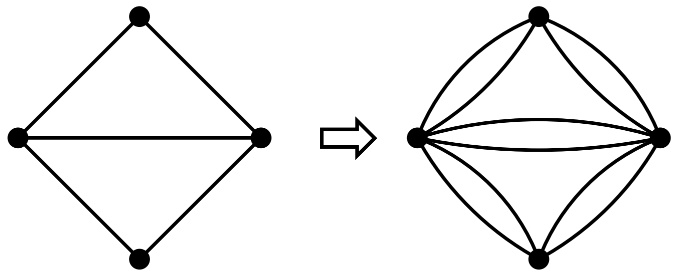
$\Rightarrow$ Nechť K je kružnice v G. Uvažme tedy graf $G' = (V, E \setminus K)$. G' má všechny stupně sudé a tudíž na něj můžeme použít indukční předpoklad.

Poznámka:

Pro hledání eulerovského tahu nelze použít hladový algoritmus!

Problém CDC:

Mějme graf $G = (V, E)$. Uvažme zdvojený graf G'. Takovýto graf má všechny stupně sudé a je tedy hranově disjunktním sjednocením kružnic.



Otázka zní, jestli existují vždy takové kružnice, které mají délku ≥ 3.

Jiný problém:

Kolik je kružnic v grafu G? Označme počet kružnic v grafu G jako $K(G)$. Potom:

- počet kružnic v úplném grafu je:

$$K(K_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} (n-k)!$$

- a $K(G) = 0 \Longleftrightarrow G$ je les

Definice:

G je les $\Leftrightarrow$ každá komponenta G je strom.

Definice(Eulerovská množina hran):

Mějme graf $G = (V, E)$. $A \subseteq E$ se nazývá eulerovská právě když má graf (V, A) všechny stupně sudé.

Definice:

Definujme dále charakteristický vektor v_a množiny A a to takto:

$$E = \{e_1, \cdots, e_n\} \quad v_a = (v_1, \cdots, v_n) \quad \begin{array}{ccc} v_i = 1 & \Leftrightarrow & e_i \in A \\ v_i = 0 & \Leftrightarrow & e_i \notin A \end{array}$$

Všechny podmnožiny $A \subseteq E$ tvoří vektorový prostor V^n dimenze n nad tělesem $\{0, 1\}$.

Označme ξ množinu všech eulerovských podmnožin grafu G. Označme ξ rovněž množinu vektorů odpovídajících množinám z ξ.

Věta(o prostoru kružnic(Kirhof)):

Mějme $G = (V, E), \xi$. Potom platí:

1. ξ je vektorový prostor V^n
2. $\dim \xi = |E| - |V| + k$, kde k je počet komponent G
3. báze ξ je tvořena elementárními kružnicemi vzhledem ke kostře G

Definice:

Rozšiřme nyní definici kostry. Nechť kostra je:

- sjednocením koster všech komponent
- maximální podgraf bez kružnic
- minimální podgraf se stejným počtem komponent
- les koster komponent

Definice:

Nechť (V, E') je kostra $G = (V, E)$. A nechť dále

$$e \in E \setminus E' \qquad T + e = (V, E' \cup \{e\})$$

Potom $T + e$ obsahuje právě jednu kružnici a tato kružnice se nazývá elementární vzhledem k T.

Důkaz 1:

ξ je podprostor

- $1.v_A = v_A$
  $0.v_A = v_\emptyset \qquad \emptyset$ je eulerovská
- $v_A + v_B = v_C \qquad C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ - symetrický rozdíl - $A \Delta B$

Pozorování:

A, B jsou eulerovské $\Rightarrow A \Delta B$ je eulerovský.

Důkaz:

Zvolme $v \in V$ libovolné. Potom

$$|\{e, v \in e \wedge e \in A \Delta B\}| =$$

$$= \underbrace{\underbrace{|\{e, v \in e \wedge e \in A\}|}_{\text{sudé}} + \underbrace{|\{e, v \in e \wedge e \in B\}|}_{\text{sudé}} - \underbrace{2|\{e, v \in e \wedge e \in A \cap B\}|}_{\text{sudé}}}_{\text{sudé}}$$

Důkaz 2:

Nechť (V, E') je kostra G, dále nechť k je počet komponent. Z vlastností stromu plyne, že $|E'| = |V| - k$. Počet elementárních kružnic je tedy roven $|E| - |E'| = |E| - |V| + k$. Z čehož plyne, že nám již stačí dokázat pouze třetí bod.

Důkaz 3:

Nechť $E = \{e_1, \cdots, e_m\}$

- Dokažme nejdříve lineární nezávislost.

  Nechť tedy (V, E') je kostra a předpokládejme, že $E' = \{e_1, \cdots, e_t\}$, kde $t = |V| - k$

  Vezměme $e_i, i > t$ a označme K_{e_i} elementární kružnici obsahující e_i. Dále označme vektor $v_{K_{e_i}}$ jako v_i. Potom každý v_i má na i-tém místě jedničku a žádný jiný vektor(odpovídající elementární kružnici) jí tam nemá. Z toho tedy plyne, že vektory $v_i, \cdots, v_m$ jsou lineárně nezávislé.

- Nyní dokažme, že generují celý prostor.

  Nechť $A \subseteq E$ je eulerovská a má charakteristický vektor $v_a \in \xi$. Potom $v_A = \sum_{i \in I} v_i$.

  Definujme A' předpisem $v_{A'} = \sum_{e_i \in A \setminus E'} v_i$, kde hrana která neleží v E' leží právě v jedné elementární kružnici. Potom $A' \setminus E' = A \setminus E'$.

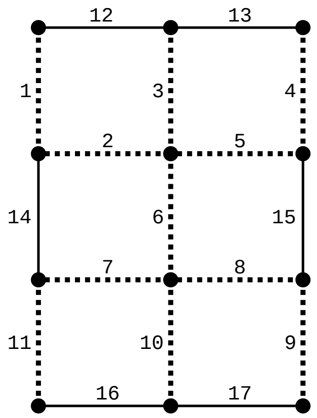
  Uvažme $C = A \Delta A'$.

  $$\left.\begin{array}{l} C \text{ je eulerovská} \\ C \subseteq E' \end{array}\right\} C = \emptyset \quad \Rightarrow \quad (A \setminus A') \cup (A' \setminus A) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A = A'$$

  Tudíž $v_A = \sum_{i \le t} v_i$ pro libovolné A a $\{v_1, \cdots, v_t\}$ generují celý prostor.

Příklad:

Máme takovýto graf s tečkovaně vyznačenou kostrou. Tudíž vektory elementárních kružnic vypadají následovně(pomocí | oddělíme(pro názornost) čát značící hrany náležící do kostry a hrany, které v kostře neleží):



$$\begin{aligned}
v_{12} &= (1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0 \mid 1,0,0,0,0,0)\\
v_{13} &= (0,0,1,1,1,0,0,0,0,0,0 \mid 0,1,0,0,0,0)\\
v_{14} &= (0,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0 \mid 0,0,1,0,0,0)\\
v_{15} &= (0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0 \mid 0,0,0,1,0,0)\\
v_{16} &= (0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1 \mid 0,0,0,0,1,0)\\
v_{17} &= (0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,0 \mid 0,0,0,0,0,1)
\end{aligned}$$

Nyní se pokusíme nalézt takovou lineární kombinaci těchto vektorů, abychom dostali vektor v kružnice s hranami $e_{14}, e_2, e_5, e_{15}, e_8, e_7$. Sčítáme nad tělesem s prvky {0,1}.

$$v = v_{14} + v_{15} = (0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,0 \mid 0,0,1,1,0,0)$$

Pokud bychom chtěli zjistit vektor v_A kružnice vedoucí kolem celého grafu, sečteme vektory všech elementárních kružnic.

$$\begin{aligned}
v_A &= v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + v_{16} + v_{17}\\
v_A &= (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,1 \mid 1,1,1,1,1,1)
\end{aligned}$$

Důsledek:

Počet eulerovských množin hran je $2^{|E|-|V|+k}$ pro každý graf $G = (V, E)$ s k komponentami.

Rovina

Nechť X je množina bodů a nechť $\mathcal{P}$ jsou podmnožiny X - přímky. Potom se rovina, která splňuje následující axiomy, názývá *projektivní rovina*

- Axiom 1: Každé dva body určují právě jednu přímku.

$$\forall x, y \in X, x \neq y \quad \exists! P \in \mathcal{P} \quad x, y \in P$$

- Axiom 2: Každé dvě přímky se protínají právě v jednom bodě.

$$P, P' \in \mathcal{P} \quad P \neq P' \quad |P \cap P'| = 1$$

- Axiom 0: existují 4 body, které každá přímka protne v nejvýše 2 z nich.

$$P \in \mathcal{P} \quad Q \subseteq X \quad |Q| = 4 \quad |P \cap Q| \leq 2$$

Je-li navíc X konečná, nazýváme takovou rovinu konečná projektivní rovina.

Tvrzení:

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina. Potom $|P| = |P'|$ pro libovolné dvě přímky $P, P' \in \mathcal{P}$.

Důkaz:

Zvolme $P, P' \in \mathcal{P}$ libovolné. Nejprve nalezneme $x \notin P \cup P'$. Vezměme $Q = (a_1, \cdots, a_4)$ a vyberme odtud x. Pokud $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \in P \cup P'$ potom uvažme $P_1 = \overline{a_1 a_3}$[1] a $P_2 = \overline{a_2 a_4}$. Potom $x \in P_1 \cap P_2$ a $x \notin P \cup P'$ jinak bychom měli dvě přímky protínající se ve dvou bodech.

Nyní pro každé $a \in P$ definujme zobrazení $f(a) \in P'$ jako průsečík $\overline{ax} \cap P'$. Toto námi definované zobrazení f je prosté a zároveň na a tudíž $|P| = |P'|$.

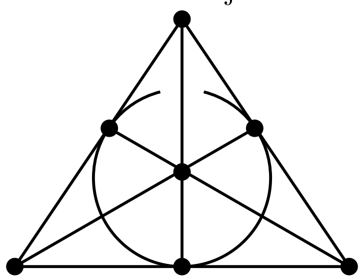
[1] $\overline{xy}$ značíme přímku procházející body x a y

Definice:

Řád konečné projektivní roviny je $|P| - 1$ pro libovolné $P \in \mathcal{P}$.

řád

$n = 1$ neexistuje



$n = 2$

Fanova rovina

$n = 3 - 5$	existuje
$n = 6$	neexistuje
$n = 7 - 9$	existuje
$n = 10$	neexistuje

Věta:

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina řádu n. Potom platí:

1. Pro každý bod $x \in X$ existuje $n + 1$ přímek jím procházejících.
2. $|X| = n^2 + n + 1$
3. $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$

Důkaz:

1. Zvolme $x \in X$ libovolné. Najděme $P \in \mathcal{P}, x \notin P$. Zároveň existuje $n+1$ bodů na přímce P. Vezmeme-li libovolný z nich, tak existuje právě jedna přímka procházející x a protínající P v tomto bodě.

2. Zvolme $x \in X$ libovolné a uvažme všechny přímky. Existuje $n + 1$ přímek procházejících x a každá z nich obsahuje kromě x ještě dalších n bodů. Celkem tedy obsahují $n(n + 1) + 1$ bodů. Z čehož plyne, že $|X| = n^2 + n + 1$.

3. Počítejme dvěma způsoby:

$$|X|(n + 1) = |\{(x, P), x \in X, P \in \mathcal{P}\} = |\mathcal{P}(n + 1)$$

Aplikace:

Počet grafů na m vrcholech neobsahujících C_4 je $\leq \frac{1}{2}(m^{\frac{3}{2}} + m)$. Ukážeme, že řád tohoto odhadu je nejlepší možný.

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina řádu n. Uvažme graf $G = (V, E)$ definovaný předpisem:

$$V = X \cup \mathcal{P} \qquad E = \{\{x, P\}, x \in P \in \mathcal{P}\}$$

$$|V| = 2(n^2 + n + 1) = m$$

$$|E| = (n^2 + n + 1)(n + 1) = \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

Jediný způsob, jak by mohla vzniknout C_4 je, že by se dvě přímky protínaly alespoň ve dvou bodech, což by byl spor.