1 Přednáška z 1. 10. 2003

Problém šatnářky:

Šatnářka má velké problémy. Tak velké, že nám vystačí na několik hodin.

K šatnářce přicházejí hosté (jejich počet je **n**) a odkládají si klobouky (každý host jeden klobouk). Šatnářka je nedbale ukládá. A když hosté odcházejí, dá každému ten klobouk, který jí přijde jako první pod ruku. Klobouky jsou ovšem rozlišitelné a každý host si dokáže poznat svůj klobouk. Pro šatnářku jsou ovšem nerozlišitelné. Jaká je pravděpodobnost, že žádný host nedostane svůj klobouk?

<u>Máme tedy:</u>

množinu hostů $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_n\}$
množinu klobouků $K = \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_n\}$

a šatnářku, která vyrábí zobrazení $H \to K$

<u>zobrazení</u> $f : X \to Y$ - speciální relace - $\forall\ x \in X\ \exists$ právě jedno $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f\ \wedge\ y = f(x)$
<u>relace</u> na množině X je podmnožina $X \times X = \{(x, y); x, y \in X\}$

Druhy zobrazení

<u>$f : X \to Y$</u>	zobrazení množiny X do množiny Y
<u>prosté</u>	$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
<u>na</u>	$\forall y \in Y \exists x \in X$ tak, že $f(x) = y$
<u>bijekce</u>	*prosté* a *na* zároveň - vzájemně jednoznačné zobrazení

Množina X je konečná, jestliže existuje bijekce X a množiny $1, 2, 3, \cdots, n$ pro nějaké n jednoznačně určené, $|X| = n$ - počet prvků (velikost(mohutnost)) množiny X.

Kolik je zobrazení X do Y, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$
- $\underline{\underline{n^m}}$

Kolik je zobrazení X na Y, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$
- dozvíme se příště...

Kolik je prostých zobrazení X do Y, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$

- $\underline{\underline{(n)(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}}$

Kolik je bijekcí $X \to Y$, jestliže $|X| = m$ a $|Y| = n$

- $\underline{\underline{m!}}$ pro $m = n$
- $\underline{\underline{0}}$ pro $m \neq n$

Věta 1 $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Důkaz 1 *Místo* $n!$ *použijeme* $(n!)^2$

$$(n!)^2 = ((n)(n-1)\dots(2)(1))^2 = \begin{array}{c} n(n-1)\dots(2)(1). \\ .(1)(2)\dots(n-1)n \end{array} = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$$

Pozorování 1 $k(n-k+1) \leq (\frac{n+1}{2})^2$

Pozorování 2 $k(n-k+1) \geq n$

Důkaz pozorování 1 Výrazy na obou stranách jsou kladné, můžeme je tedy odmocnit a vyjde nám, že geometrický průměr je menší než aritmetický, což můžeme dokázat:

$$\begin{aligned} \sqrt{k(n-k+1)} &\leq \frac{n+1}{2} \qquad k = a;\ n-k+1 = b \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a+b}{2} \\ 2\sqrt{ab} &\leq a+b \\ 0 &\leq a - 2\sqrt{ab} + b \\ 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Dosadíme-li meze, které nám vyšli do $\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$, vyjde nám:

$$\begin{array}{ccccc} n^n & \leq & \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) & \leq & (\frac{n+1}{2})^2 \\ n^n & \leq & (n!)^2 & \leq & (\frac{n+1}{2})^2 \\ n^{\frac{n}{2}} & \leq & n! & \leq & \frac{n+1}{2} \end{array}$$

Pro přesnější odhad $n!$ lze použít *Stirlingovu formuli*:

$$\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{-1}{12n-1}} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\ e^{\frac{-1}{12n+1}}$$

Zpět k šatnářce!

Urči počet $s(n)$ $\overbrace{\text{bijekcí } f : H \to K}^{\text{permutací } \pi}$ takových, že $f(i) \neq i \ \forall \ i = 1, 2, 3, \ldots, n$