# KOMBINATORICKÉ POČÍTÁNÍ 1999

MARTIN KLAZAR

Tento text je poměrně věrným zápisem přednášek, které jsem konal v letním semestru v r. 1999 na MFF UK v Praze. Na řadě příkladů ilustruje použití metody generujících funkcí (GF) v kombinatorické enumeraci. K jeho vylepšení přispěli cennými připomínkami a opravami Jakub Černý, Jan Foniok, Pavel Podbrdský, Pavel Příhoda a Patricie Rexová. Patří jim můj dík. S díky rovněž zmiňuji podporu grantu GAUK 158/99.

Martin Klazar

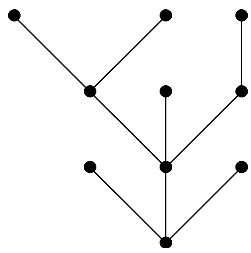
OBSAH

**1. přednáška 3.3.1999**

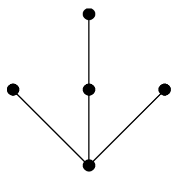
# I. ÚVOD ANEB CATALANOVA ČÍSLA

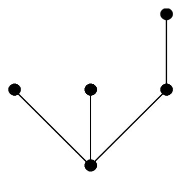
Na příkladu Catalanových čísel si předvedeme hlavní rysy enumerativní kombinatoriky.

1. Kombinatorická struktura. Na počátku stojí enumerativní problém — třída kombinatorických struktur, které chceme spočítat. My se nejprve podíváme na *zakořeněné rovinné stromy* (stručně *zr stromy* nebo jen *stromy*). Zr strom je konečný strom s vytčeným vrcholem, kterému říkáme *kořen*, a lineárním uspořádáním na každé *množině dětí*. (Při orientaci hran směrem od kořene množina dětí sestává z konců hran vycházejících z jednoho vrcholu.) Stromy znázorňujeme obrázkem:

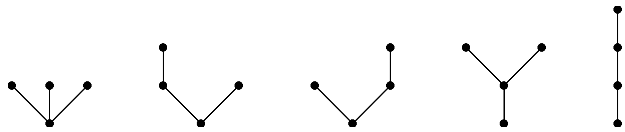


Kořen je nejníže, orientace hran souhlasí se směrem nahoru a lineární uspořádání jsou zachycena směrem zleva doprava. To například znamená, že následující dva stromy jsou různé:

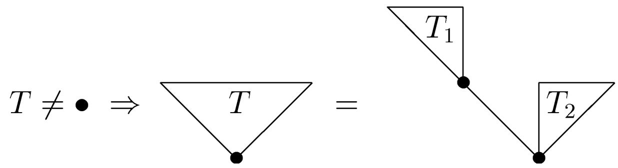




Množinu všech neprázdných stromů označíme $\mathcal{T}$ a pro $n \in \mathbf{N}$, kde $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, definujeme $\mathcal{T}(n) = \{T \in \mathcal{T} : v(T) = n\}$, kde $v(T)$ je počet vrcholů $T$. Chceme spočítat čísla $c_n = |\mathcal{T}(n)|$. Například $c_1 = c_2 = 1, c_3 = 2$ a $c_4 = 5$:



2. Kombinatorický rozklad. Strom $T$ následujícím způsobem rozložíme:




Tedy $T = (T_1, T_2)$, kde $T_1$ je podstrom zakořeněný v prvním dítěti kořene $T$ a $T_2$ je zbytek $T$. Stromy $T_i$ jsou vždy neprázdné a $v(T) = v(T_1) + v(T_2)$. Dostáváme bijekci

$$f : \mathcal{T} \setminus \{\bullet\} \to \mathcal{T} \times \mathcal{T},$$

$f(T) = (T_1, T_2)$, $v(T) = v(T_1) + v(T_2)$.

3. Rekurence. Předchozí rozklad dává rekurenci

$$c_1 = 1 \;\text{ a }\; c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} \;\text{ pro } n > 1.$$

Takže $c_5 = c_1c_4 + c_2c_3 + c_3c_2 + c_4c_1 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 14$.

4. Generující (vytvořující) funkce. Posloupnost $\{c_n\}_{n\geq 1}$ zakódujeme do koeficientů mocninné řady

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{v(T)}.$$

Říká se jí (obyčejná) *generující funkce* posloupnosti $\{c_n\}_{n\geq 1}$. Místo výrazu „generující funkce“ budeme pro jednotné i množné číslo psát zkratku GF. Z 2, popř. 3 plyne — toto je klíčový krok kombinatorické enumerace — relace

$$C(x) - x = C(x) \cdot C(x).$$

Dospíváme k rovnici pro GF.

4A. Rovnice pro GF. Sice, označíme-li $C(x)$ jako $C$,

$$C^2 - C + x = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici. Jindy to může být algebraická rovnice vyššího stupně nebo diferenciální či funkcionální rovnice. Pro GF s více proměnnými dostaneme soustavu rovnic. Naši rovnici umíme vyřešit; často ale takové štěstí nemáme.

4B. Explicitní formule pro GF. Podle středoškolské algebry

$$C = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).$$

Ze znamének $\pm$ jsme zvolili $-$, protože $C$ má nulový absolutní člen. Nás však zajímá hlavně číslo $c_n = [x^n]C$; symbolem $[x^n]$ se označuje koeficient u $x^n$ v následné mocninné řadě. Počítáme dále.

4C. Explicitní formule pro $c_n$. Binomická věta praví, že

$$(1+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} y^k,$$

kde $\alpha \in \mathbf{R}$ je pevné a $\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. Proto pro $n > 0$ máme

$$c_n = [x^n](-\tfrac{1}{2}(1-4x)^{1/2}) = -\tfrac{1}{2}(-4)^n \binom{1/2}{n}.$$

A to se rovná

$$(-1)^{n+1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 4^n \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{-(2n-3)}{2}}{n!} = \frac{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n!}.$$

Tudíž (zlomek rozšíříme $(n-1)!$)

$$c_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Čísla $c_n$ jsou tzv. *Catalanova čísla.*

Ne vždy se nám v kombinatorické enumeraci podaří dopočítat se až k výsledku typu 4c, mnohdy uvízneme ve stadiu 4b nebo už ve stadiu 4a. To však není žádné neštěstí, i tehdy se dá o hledaných počtech zjistit mnoho zajímavých věcí.

5. Nová rekurence. Pomocí GF nyní odvodíme rekurenci pro $c_n$, která je praktičtější než ta v 3. Ze vzorce pro $C = C(x)$ v 4b plyne, že

$$C' = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \text{ a tedy } (1-4x)C' = -2C + 1.$$

To jest,

$$2C + (1-4x)C' - 1 = 0.$$

Vlevo máme mocninnou řadu, která má všechny koeficienty nulové a současně je vyjádřena pomocí $C$. Pro každé $n > 0$ tak dostáváme rovnici

$$2c_n + (n+1)c_{n+1} - 4nc_n = 0.$$

Takže

$$(2-4n)c_n + (n+1)c_{n+1} = 0 \text{ a } c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot c_n.$$

To se samozřejmě dostane snadno i ze vzorce pro $c_n$ v 4c, ale právě předvedený postup funguje, i když takový vzorec nemáme k dispozici. Nepotřebujeme vlastně ani 4b a vystačíme si s 4a! Rovnici $C^2 - C + x = 0$ derivujeme podle $x$ a vyjádříme $C'$,

$$2C \cdot C' - C' + 1 = 0 \text{ a } C' = \frac{1}{1-2C},$$

a výsledek zjednodušíme,

$$C' = \frac{C - 1/2}{(1-2C)(C-1/2)} = \frac{C - 1/2}{-2C^2 + 2C - 1/2} = \frac{C - 1/2}{2x - 1/2}.$$

Při racionalizaci zlomku jsme využili, že $C$ splňuje kvadratickou rovnici. Dospíváme opět k diferenciální rovnici $(1-4x)C' = 1 - 2C$.

Trocha terminologie. Posloupnost komplexních čísel $A = \{a_n\}_{n \geq 0}$ se nazývá *P-rekurzivní*, existuje-li číslo $m \in \mathbf{N}$ a celočíselné polynomy $p_0, p_1, \ldots, p_m$ (ne všechny nulové) takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$p_0(n)a_n + p_1(n)a_{n+1} + \cdots + p_m(n)a_{n+m} = 0.$$

Pokud $m = 1$, je $A$ *hypergeometrická* posloupnost. Podíl sousedních členů pak splňuje $a_{n+1}/a_n \in \mathbf{Z}(n)$, tj. je racionální funkcí v $n$. (Racionální funkce je podíl dvou polynomů.) Catalanova čísla jsou příkladem P-rekurzivní a dokonce hypergeometrické posloupnosti.

Novou rekurencí se Catalanova čísla dobře počítají:

$$c_6 = \frac{18}{6} \cdot 14 = 42, c_7 = \frac{22}{7} \cdot 42 = 132, c_8 = \frac{26}{8} \cdot 132 = 429, \ldots$$

Nenapadá vás něco při pohledu na paritu $c_n$?

6. Kongruenční vlastnosti. Kdy je $c_n$ liché? Odpověď: tehdy a jen tehdy, je-li $n$ mocnina 2. Teď výborně poslouží posmívaná rekurence 3, naopak 5 je pro tuto úlohu příliš těžkopádná. Modulo 2 máme $c_1 \equiv 1$ a, pro $n > 1$,

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i} &\equiv 0 \ \text{ pro } n = 2m+1 \text{ a} \\ &\equiv c_m^2 \ \text{ pro } n = 2m. \end{aligned}$$

Indukcí podle $n$ plyne okamžitě, že $c_n \equiv 1$, právě když $n = 2^m$.

7. Jak rychle $c_n$ rostou? Odhadneme je *Stirlingovou formulí*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \text{ tj. } \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n} \to 1 \ \text{ pro } \ n \to \infty.$$

Formule zahrnuje dvě nejdůležitější matematické konstanty, Eulerovo číslo $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$ a Ludolfovo číslo $\pi = 3.14159\ldots$, a dokážeme ji později. Protože

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n}\frac{n^2}{2n(2n-1)} \sim \frac{1}{4n}\binom{2n}{n},$$

máme asymptotiku

$$c_n \sim \frac{1}{4n} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot 2\pi n}(2n/\mathrm{e})^{2n}}{(\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n)^2} = \frac{n^{-3/2}}{4\sqrt{\pi}} \cdot 4^n.$$

Vyšli jsme z 4c, metoda GF však umí odvodit asymptotiku, i když známe jen vztah typu 4a.

## 2. přednáška 10.3.1999

8. Jak rozumět pojmu GF? Dvěma vzájemně se doplňujícími způsoby.

8A. FORMÁLNĚ ČILI ALGEBRAICKY. $C(x)$ nebo jinou GF chápeme jako prvek $\mathbf{C}[[x]]$, okruhu mocninných řad v jedné proměnné s komplexními koeficienty. Jeho prvky jsou nekonečné posloupnosti $A = \{a_n\} = \{a_n\}_{n\geq 0}$ komplexních čísel, s nimiž počítáme formálně podle „zřejmých" pravidel. Pro $A = \{a_n\}$ a $B = \{b_n\}$ z $\mathbf{C}[[x]]$ mají součet $A + B$, součin $AB$, derivace $A$ a integrál $A$ $n$-tou složku postupně $a_n + b_n$, $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $(n+1)a_{n+1}$ a $\frac{1}{n}a_{n-1}$ (0-tá složka se zde definuje jako 0). Prakticky používáme samozřejmě raději zápis $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Posloupnost mocninných řad $A_1, A_2, \ldots$ *formálně konverguje* k $A$, je-li pro každé pevné $n \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ posloupnost komplexních čísel $[x^n]A_1, [x^n]A_2, \ldots$ až na konečně mnoho členů rovna $[x^n]A$. Jinými slovy, posloupnost koeficientů $n$-té mocniny $x$ se stabilizuje po konečně mnoha krocích na $[x^n]A$. Nekonečné součty a součiny se v $\mathbf{C}[[x]]$ definují jako formální limity posloupností částečných součtů a součinů.

Důležitou operací je *substituce* neboli dosazení jedné mocninné řady do druhé. Pro $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a $B = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ položíme

$$A(B) = \sum_{n\geq 0} a_n B^n.$$

Pro $b_0 = 0$ tento nekonečný součet formálně konverguje a $A(B)$ je definována. Pro $b_0 \neq 0$ nemá obecně formální smysl (může mít smysl analyticky). Je-li jen konečně mnoho koeficientů $a_n$ nenulových, je $A(B)$ definována pro každé $B$. Takže mocninná řada $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$ je dobře definována, ale výrazu $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ z formálního hlediska nerozumíme. Shrnuto: dosadit můžeme jen mocninnou řadu s nulovým absolutním členem.

Pokud $a_0 \neq 0$, definujeme *multiplikativní inverz* $A$ pomocí substituce jako

$$\begin{aligned} A^{-1} = \frac{1}{A} &= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 + ((a_1/a_0)x + (a_2/a_0)x^2 + \cdots)} \\ &= \frac{1}{a_0} \sum_{n\geq 0} (-1)^n ((a_1/a_0)x + (a_2/a_0)x^2 + \cdots)^n. \end{aligned}$$

Dělit v $\mathbf{C}[[x]]$ tedy můžeme jen řadami s nenulovým absolutním členem.

Podobně, je-li $a_0 = 0$ a $a_1 \neq 0$, existuje jednoznačný *funkcionální inverz* $A$ značený $A^{\langle -1 \rangle}$ a je to řada $B$ splňující vztah

$$A(B) = x.$$

Odtud pro koeficienty $B = A^{\langle -1 \rangle}$ dostáváme rovnice vyjadřující jednoznačně $\{b_n\}$ z $\{a_n\}$. Například, podle 4a, $(x - x^2)^{\langle -1 \rangle} = C(x)$. K tomuto příkladu se vrátíme v přednášce o Lagrangeově inverzní formuli.

Popsané operace splňují spoustu identit známých z analýzy. Platí například Leibnizova formule pro derivaci součinu nebo identita $\log(\mathrm{e}^x) = \log(1 + (\mathrm{e}^x - 1)) = x$. (Formálně $\mathrm{e}^x = \sum_{n \ge 0} x^n/n!$ a $\log(1 + x) = \sum_{n \ge 1} (-1)^{n-1} x^n/n$; $\mathrm{e}^{\log x}$ nemá smysl, protože funkce $\log x$ není definována jako mocninná řada.) Nebudeme se jimi podrobně zabývat. Formální hledisko je podrobně popsáno v úvodu Gouldena a Jacksona [7] a trochu v Stanleym [21]. Algebře mocninných řad se věnuje Ruizova kniha [18].

8B. Analyticky, to jest komplexně analyticky. Prvky $\mathbf{C}[[x]]$ se pak chápou ve smyslu komplexní analýzy. V pár odstavcích nelze pochopitelně ani zhruba přiblížit tuto rozsáhlou a podivuhodnou disciplínu. Chceme spíše čtenářku i čtenáře nasměrovat a motivovat k jejímu studiu. Význam komplexní analýzy pro odvozování asymptotik v enumeraci je nezastupitelný a její moc je občas skoro zázračná.

Jak plyne z 7, řada

$$C(x) = \sum_{n \ge 1} c_n x^n = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

konverguje všude uvnitř kruhu $|x| \le 1/4$ (i na hranici) a diverguje všude mimo něj, proto má poloměr konvergence $1/4$. Podle jedné ze základních vět komplexní analýzy splňuje poloměr konvergence $R$ řady $\sum_{n \ge 0} a_n x^n$ vztah

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Koeficienty tedy rostou velmi zhruba jako $(1/R)^n$. Na druhé straně je $R$ roven absolutní hodnotě *dominantní* singularity funkce definované příslušnou řadou. Dominantní singularita je singularita nejbližší počátku. Rychlost růstu absolutních hodnot koeficientů je určena chováním funkce v okolí dominantních singularit. A toto chování se pozná již z výsledků typu 4b nebo 4a. To je v kostce princip analytických metod v kombinatorické enumeraci.

Například $\sum_{n \ge 1} c_n x^n$ definuje funkci

$$C(x) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x}),$$

která je holomorfní v kruhu $|x| < 1/4$, ale v $1/4$ má singularitu ($\sqrt{0}$). Proto $R = 1/4$ a i bez 4c je nabíledni, že ze všech exponenciel popisuje rychlost růstu čísel $c_n$ nejlépe $4^n$.

V kombinatorické enumeraci $a_n$ ovšem nejsou obecná komplexní čísla, ale nezáporná celá čísla. Podle Pringsheimovy věty má řada s *nezápornými reálnými* koeficienty v poloměru konvergence vždy singularitu. Mezi dominantními singularitami se proto vždy musí vyskytovat kladné reálné číslo. V enumeraci nám proto jako GF nikdy nemůže vyjít třeba funkce

$$\frac{1}{x^4 - 3x + 3},$$

protože ta nemá dokonce vůbec žádnou reálnou singularitu.

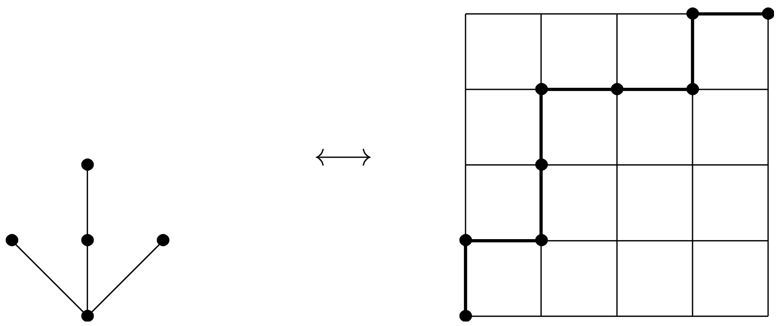
9. Nedá se vzorec pro Catalanova čísla odvodit bez GF? Existuje řada takových důkazů. Ukážeme si dva.

9a. Důkaz pomocí mřížových cest. Jako $\mathbf{Z}^2$ označíme množinu mřížových bodů $\{(a, b) : \ a, b \in \mathbf{Z}\}$, přičemž $\mathbf{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$. *Cestou* budeme rozumět posloupnost $v = v_0 v_1 \ldots v_n$ bodů z $\mathbf{Z}^2$, kde $v_{i+1} - v_i$ je $(0, 1)$ (krok na sever) nebo $(1, 0)$ (krok na východ); cesta tedy sebe samu nikdy neprotne.

Nechť $\mathcal{B}(n)$ je množina všech cest z $(0, 0)$ do $(n, n)$ a $\mathcal{A}(n) \subset \mathcal{B}(n)$ podmnožina těch z nich, které se nikdy nedostanou pod diagonálu $y = x$.

**Pozorování.** Máme bijekci mezi $\mathcal{T}(n)$ a $\mathcal{A}(n - 1)$.

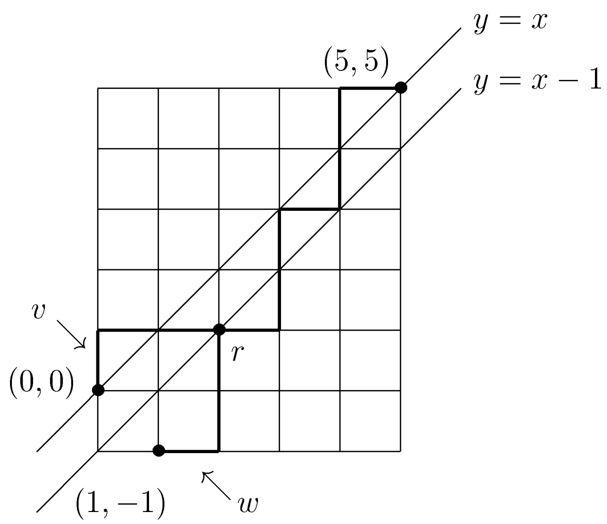
**Důkaz.** Obraz stromu $T \in \mathcal{T}(n)$ získáme tak, že $T$ obcházíme dokola ve směru hodinových ručiček. Začneme od kořene a za krok vzhůru (dolů) uděláme v cestě krok na sever (východ). Inverzní zobrazení postupuje stejně opačným směrem. Příklad:



Nyní je pozorování zřejmé. □

Takže $|\mathcal{T}(n)| = |\mathcal{A}(n-1)|$. Potřebovali bychom spočítat $|\mathcal{C}(n)|$, kde $\mathcal{C}(n)$ je množina cest z $(0,0)$ do $(n,n)$, které se pod diagonálu dostanou. Pak už $|\mathcal{A}(n)|$ spočteme snadno: $|\mathcal{A}(n)| = |\mathcal{B}(n)| - |\mathcal{C}(n)|$ a $|\mathcal{B}(n)| = \binom{2n}{n}$. (Cesty v $\mathcal{B}(n)$ odpovídají $n$-prvkovým podmnožinám $2n$-prvkové množiny.)

Každá cesta $v \in \mathcal{C}(n)$ má alespoň jeden společný bod s přímkou $y = x-1$. První z nich buď $r$. Počáteční úsek $v$ od $(0,0)$ do $r$ zobrazíme zrcadlením $(x,y) \to (y+1, x-1)$ podle přímky $y = x-1$, zbytek $v$ ponecháme nezměněný. Dostaneme cestu $w$ z $(1,-1)$ do $(n,n)$. Příklad:




**Pozorování.** Zobrazení $v \to w$ je bijekce mezi $\mathcal{C}(n)$ a množinou všech cest z $(1,-1)$ do $(n,n)$.

**Důkaz.** Je zřejmé, že jde o zobrazení do a že je prosté. Každá cesta $w$ z druhé množiny má vzor v $\mathcal{C}(n)$: počátek a konec $w$ leží na různých stranách od $y = x-1$, $w$ tudíž protíná $y = x-1$ a vzor se dostane zrcadlením počátečního úseku. □

Druhá množina cest z předešlého pozorování má zjevně $\binom{2n}{n-1}$ prvků $(n+1$

kroků na sever a $n-1$ kroků na východ). Podle hořejší diskuse dostáváme

$$c_n = |\mathcal{T}(n)| = |\mathcal{B}(n-1)| - |\mathcal{C}(n-1)| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2},$$

což je

$$\frac{(2n-2)! - (2n-2)!\frac{n-1}{n}}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

## 3. přednáška 17.3.1999

Trik se zrcadlením se nazývá *Andrého princip odrazu*. Pochází od D. Andrého (1840–1917) ([1]), který ho použil při řešení následujícího *hlasovacího problému* (ballot problem). Ve volbách soupeří dva kandidáti. Kandidát $P$ dostal celkem $p$ hlasů a kandidát $Q$ celkem $q$ hlasů. Platí $q > p$, takže $Q$ vyhrál a porazil $P$. Jaká je pravděpodobnost, že $Q$ neustále vedl před $P$ v každém okamžiku hlasování? Všechny průběhy hlasování považujeme za stejně pravděpodobné. Zkuste si to spočítat jako DOM CV.

9B. Důkaz pomocí uzávorkování. Druhý důkaz publikoval Rubenstein v r. 1994 v [17]. *Uzávorkováním* rozumíme posloupnost $u = a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, kde $a_i = [$ nebo $a_i = ]$ a máme celkem $n$ levých a $n$ pravých závorek. *Dobré uzávorkování* je uzávorkování, jehož každý počáteční úsek obsahuje alespoň tolik levých závorek jako pravých. Nechť $\mathcal{B}(n)$ je množina všech uzávorkování s $2n$ závorkami a $\mathcal{A}(n) \subset \mathcal{B}(n)$ je podmnožina dobrých uzávorkování.

**Pozorování.** Máme bijekci mezi $\mathcal{T}(n)$ a $\mathcal{A}(n-1)$.
**Důkaz.** Prakticky stejný jako pro mřížové cesty. Krok vzhůru (dolů) při obcházení stromu nyní odpovídá levé (pravé) závorce. □

Zatím to jsou mřížové cesty v trochu jiném hávu. Využijeme vlastnosti uzávorkování, která nám je důvěrně známa již ze základní školy.

**Pozorování.** Uzávorkování $u = a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ je dobré, právě když můžeme $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ spárovat do $n$ dvojic $i_1 < j_1, \ldots, i_n < j_n$ tak, že $a_{i_k} = [$, $a_{j_k} = ]$ a nikdy nenastane $i_a < i_b < j_a < j_b$. Toto spárování je navíc jednoznačné. Dvojicím $a_{i_k}$ a $a_{j_k}$ budeme říkat *páry* (závorek).

**Důkaz.** Není-li $u$ dobré, pak jeho některý počáteční úsek obsahuje více ] než [. Pak ale popsané spárování zjevně nemůže existovat. Naopak, nechť $u$ je dobré. Indukcí podle $n$ dokážeme existenci a jednoznačnost spárování. Zřejmě $a_i =$ [ a $a_{i+1} =$] pro některé $i$. Pak $i$ a $i+1$ musejí být spolu v každém spárování. Z $u$ vyhodíme $a_i$ a $a_{i+1}$, čímž dostaneme zase dobré uzávorkování. Nyní užijeme indukční předpoklad. □

**Tvrzení.** Pro obecné uzávorkování $u$ máme rozklad

$$u = u_1]u_2]\ldots]u_k]v[v_k[\ldots[v_2[v_1,$$

kde $k \geq 0$ a $u_i, v_i$ a $v$ jsou dobrá uzávorkování. Tento rozklad je jednoznačný.

**Důkaz.** Jednoznačnost plyne hned z definice dobrého uzávorkování: počáteční dobré úseky $u_1$ a $u_1'$ musejí být v obou případných rozkladech stejné, takže $u_1 = u_1'$, a stejně tak dále. Oba rozklady splývají.

Ukážeme existenci. Pro dobré $u$ rozklad triviálně existuje ($k = 0$ a $u = v$). Nechť $u$ není dobré. Pak můžeme psát $u = u_1]r$, kde $u_1$ je dobré (a $r$ není vůbec uzávorkování). Ze symetrie máme, že též $u = s[v_1$, kde $v_1$ je dobré (a $s$ není uzávorkování). Počáteční úsek $u_1[$ a koncový úsek $]v_1$ se nepřekrývají, jinak by totiž celé $u$ bylo dobré. Takže máme rozklad $u = u_1]v[v_1$, kde $u_1$ a $v_1$ jsou dobrá a $v$ nyní je uzávorkování (možná prázdné). Na $v$ užijeme indukční předpoklad a máme hledaný rozklad. □

Uvažme nyní následující zobrazení $F : \mathcal{B}(n) \to \mathcal{A}(n)$. Dané $u \in \mathcal{B}(n)$ rozložíme jako $u = u_1]u_2]\ldots]u_k]v[v_k[\ldots[v_2[v_1$ podle posledního tvrzení a definujeme

$$F(u) = u_1[u_2[\ldots[u_k[v]v_k]\ldots]v_2]v_1,$$

tj. otočíme nespárované závorky. Je jasné, že $F(u)$ je dobré a že otočené závorky se spárují spolu: závorka $u_1[u_2$ se závorkou $v_2]v_1$ atd.

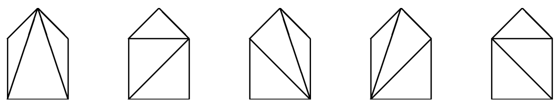
**Tvrzení.** V zobrazení $F$ má každé $w \in \mathcal{A}(n)$ právě $n+1$ vzorů.

**Důkaz.** Nechť $w \in \mathcal{A}(n)$. *Hnízdo* ve $w$ je takový systém do sebe vnořených párů $-[-[\ldots[-]\ldots]-]-$ ze spárování $w$, že sousední páry $\ldots[-[\ldots]-]\ldots$ už neodděluje žádný jiný pár $w$ a že úplně vnější pár není obsažen v žádném páru $w$ (úplně vnitřní pár může obsahovat jiné páry $w$). Snadno se vidí, že $F(u) = w$, právě když $u$ vznikne z $w$ otočením závorek v některém (i případně prázdném) hnízdě $w$. Po chvilkové meditaci je stejně tak jasné, že $w$ obsahuje přesně $n+1$ hnízd: každý pár $w$ je úplně vnitřním párem právě jednoho hnízda a pak máme ještě prázdné hnízdo. □

Zřejmě $|\mathcal{B}(n)| = \binom{2n}{n}$ a podle posledního tvrzení $|\mathcal{A}(n)| = \frac{1}{n+1}|\mathcal{B}(n)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = c_{n+1}$. Podle hořejší bijekce $|\mathcal{T}(n)| = |\mathcal{A}(n-1)| = c_n$.

10. Další kombinatorické struktury počítané Catalanovými čísly. Stanley [22] jich uvádí 66. My jich uvedeme jen pár. Struktury ilustrujeme vždy příkladem pro $c_4 = 5$.

Triangulace $n$-úhelníku:



Posloupnosti přirozených čísel $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ splňující $a_i \leq i$:

$$111, 112, 113, 122, 123.$$

Posloupnosti přirozených čísel $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ splňující $a_i \leq 2i$:

$$12, 13, 14, 23, 24.$$

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahující rostoucí podposloupnost délky 3:

$$132, 213, 231, 312, 321.$$

(Jen jedna permutace je zakázána.)

Permutace množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahující podposloupnost typu 312, tj. ty $a_1 a_2 \ldots a_n$, že neexistují tři indexy $i_1 < i_2 < i_3$, že $a_{i_1} > a_{i_3} > a_{i_2}$:

$$132, 213, 231, 123, 321.$$

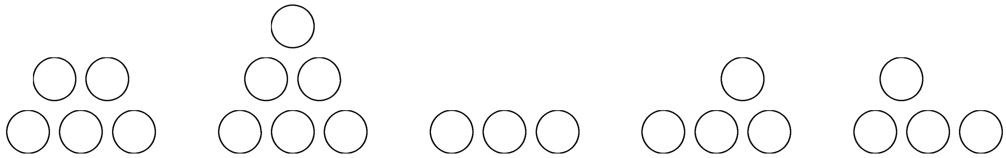
(I zde je zakázána jen jedna permutace.)

Nekřížící se rozklady $\{1, 2, \ldots, n\}$. To jest rozklady $\{1, 2, \ldots, n\} = P_1 \cup P_2 \cup \cdots P_k$, pro něž neexistují $1 \leq a < b < c < d \leq n$ tak, že $a, c \in P_i$ a $b, d \in P_j$ pro nějaké $i \neq j$. Pro $n = 3$ jich máme pět:

$$1|2|3,\ 12|3,\ 13|2,\ 23|1, 123.$$

Je to ovšem trochu nejapný příklad.

Hromádky mincí v rovině s $n$ mincemi v dolní řadě:



Nakonec zmíníme zajímavý výsledek kolegy P. Valtra ([24] a [25]). Nějakých $n$ bodů v rovině tvoří *konvexní řetězec*, pokud — uspořádáme-li je podle vzrůstajících hodnot $x$-ových souřadnic jako $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — jsou směrové vektory $b_{i+1} - b_i$ uspořádány monotóně proti směru hodinových ručiček. Nechť $A_n$ je jev, že $n$ bodů vybraných náhodně a nezávisle v jednotkovém čtverci tvoří konvexní řetězec. Nechť $B_n$ je jev, že tyto body tvoří vrcholy konvexního $n$-úhelníku. Je jasné, že když nastane $A_n$, nastane i $B_n$: $\Pr(A_n B_n) = \Pr(A_n)$.

Platí ([25]):

$$\Pr(A_n|B_n) = \frac{\Pr(A_n B_n)}{\Pr(B_n)} = \frac{\Pr(A_n)}{\Pr(B_n)} = \frac{1}{c_n}.$$

Pravděpodobnost jevu $A_n$ podmíněná jevem $B_n$ je rovna převrácené hodnotě Catalanova čísla!

11. Zjemnění Catalanových čísel. Nechť $n(a,b)$ je počet stromů s $a$ vrcholy a $b$ listy, kde list je vrchol bez dítěte. Položíme $n(1,1) = 1$. Například $n(4,2) = 3$ a $n(4,1) = n(4,3) = 1$. Zřejmě $n(a,b) > 0$, právě když $1 \leq b \leq a-1$ (kromě $a = 1$). Dále je jasné, že

$$\sum_{b=1}^{a-1} n(a,b) = c_a = \frac{1}{a}\binom{2a-2}{a-1}.$$

Co se dá o číslech $n(a,b)$ říci? Nasadíme na ně GF a uvidíme. Připomínáme, že pro $T \in \mathcal{T}$ počítá $v(T)$ počet vrcholů stromu $T$. Zavedeme ještě funkci $l(T)$, která počítá počet listů $T$. Definujeme GF o dvou proměnných

$$C(x,y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} x^{v(T)} y^{l(T)} = \sum_{a,b \geq 1} n(a,b) x^a y^b.$$

**4. přednáška 24.3.1999**

Kombinatorický rozklad 2 z 1. přednášky nám dává vztah

$$C(x,y) - xy = C(x,y) \cdot (C(x,y) - xy + x).$$

Nezapomněli jsme na to, že jednovrcholový $T_2$ nepřispívá žádným listem. Takže, označíme-li na chvíli $C(x,y)$ jako $C$,

$$C^2 - C \cdot (1 - x + xy) + xy = 0$$

a

$$C = \tfrac{1}{2}(1 - x + xy - \sqrt{(1 - x + xy)^2 - 4xy}\,).$$

Je jasné, že substituce $y = 1$ (kterou můžeme provést, protože $C(x,y)$ je mocninná řada v $x$, jejímiž koeficienty jsou polynomy v $y$, nikoli mocninné řady v $y$) vymazává informaci o listech. To jest, $C(x,1) = C(x)$ a substituce $y = 1$ v posledním vzorci dává formuli 4b z 1. přednášky.

Čísla $n(a,b)$ jsou tzv. *Narayanova čísla*. Platí pro ně vzorec

$$n(a,b) = \frac{1}{a-1}\binom{a-1}{b}\binom{a-1}{b-1}.$$

Máme $n(a,b) = [x^a y^b]C(x,y)$, ale neznám žádný efektní výpočet, kterým bych vám poslední vzorec odvodil z formule pro $C(x,y)$. Pomocí Lagrangeovy inverzní formule (LIF) se dá odvodit z kvadratické rovnice pro $C(x,y)$, ale k LIF se dostaneme až později.

Symetrie binomických koeficientů $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ je již téměř naší druhou přirozeností. Je pozoruhodné, že Narayanova čísla mají tuto vlastnost také:

$$n(a,b) = n(a, a-b).$$

Můžeme to dokázat z explicitního vzorce pro $n(a,b)$, kombinatoricky pomocí bijekce nebo pomocí GF. Ovšemže volíme poslední možnost. Substituce $x := xy, y := 1/y$ převádí $C(x,y)$ na mocninnou řadu $D = D(x,y) = C(xy, 1/y)$, přičemž pro $a > 1$ platí $[x^a y^b]D = [x^a y^{a-b}]C$. Stačí tedy ukázat, že $D - x = C - xy$. To je ale téměř očividné, protože pro $D$ dostáváme vzorec

$$D = \tfrac{1}{2}(1 - xy + x - \sqrt{(1 - xy + x)^2 - 4x}\,)$$

a, jak se snadno přesvědčíme,

$$(1 - x + xy)^2 - 4xy = (1 - xy + x)^2 - 4x.$$

# II. STIRLINGOVA FORMULE

Nyní slíbený důkaz Stirlingovy formule. Pro $n \to \infty$ platí

$$n! = (1 + O(n^{-1}))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

**Lemma.** Pro $m \to \infty$ platí

$$\log m = \int_{m-1/2}^{m+1/2} \log x \; dx + O(m^{-2}).$$

**Důkaz.** Jak známo, $\int \log x = x \log x - x$ a $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$. Takže

$$\begin{aligned}
(x \log x - x)|_{m-1/2}^{m+1/2} &= m \log \frac{m+1/2}{m-1/2} + \frac{\log(m^2 - 1/4)}{2} - 1 \\
&= m \log\left(1 + \frac{1}{m-1/2}\right) + \frac{\log(1 - 1/(4m^2))}{2} \\
&\quad + \log m - 1 \\
&= \frac{m}{m-1/2} - \frac{m}{2(m-1/2)^2} - 1 + O(m^{-2}) + \log m \\
&= \frac{-1}{2(m-1/2)^2} + O(m^{-2}) + \log m \\
&= \log m + O(m^{-2}).
\end{aligned}$$

□

S použitím lemmatu a Taylorova rozvoje pro logaritmus máme, že

$$\begin{aligned}
\log n! = \sum_{m=2}^{n} \log m &= \sum_{m=2}^{n} \left(\int_{m-1/2}^{m+1/2} \log x \cdot dx + O(m^{-2})\right) \\
&= c_1 + O(n^{-1}) + \int_{3/2}^{n+1/2} \log x \cdot dx \\
&= (n+1/2)\log(n+1/2) - (n+1/2) + c_2 + O(n^{-1}) \\
&= n \log n - n + \tfrac{1}{2}\log n + c + O(n^{-1}).
\end{aligned}$$

Odlogaritmování nám dává vztah

$$n! = (1 + O(n^{-1}))\sqrt{dn}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

kde $d > 0$ je neznámá konstanta. Spočítáme, že $d = 2\pi$. (Postupujeme podle cvičení v Tenenbaumovi [23].)

Použijeme tzv. *Wallisův integrál*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx.$$

Je nabíledni, že $W_0 = \pi/2$ a $W_1 = 1$. Integrace per partes dává

$$\begin{aligned} W_n &= \sin x \cdot (\cos x)^{n-1}|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot (\cos x)^{n-2} \cdot dx. \\ &= 0 + (n-1)(W_{n-2} - W_n). \end{aligned}$$

(Použili jsme rovnost $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.) Takže, pro $n > 1$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} \cdot W_{n-2}.$$

Pomocí této rekurence a již dokázané neúplné Stirlingovy formule dostáváme

$$W_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 1}{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{dn}}.$$

Podobně

$$W_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 1} \cdot 1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\frac{d}{8n}}.$$

Z definice $W_n$ plyne bez trápení, že

$$W_n < W_{n-1} < W_{n-2}.$$

Proto, podle rekurence,

$$1 < \frac{W_{n-1}}{W_n} < \frac{W_{n-2}}{W_n} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Tedy $W_{n-1}/W_n \to 1$ pro $n \to \infty$. Nutně

$$\frac{(\pi/2)\cdot\sqrt{2/dn}}{\sqrt{d/8n}} \to 1.$$

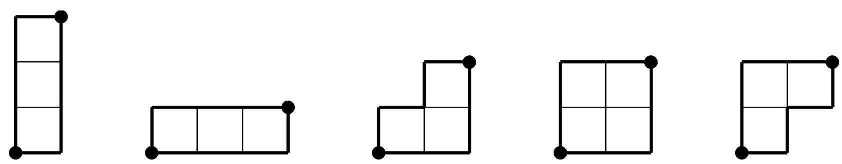
To je ovšem možné, jen když $d = 2\pi$.

## III. DVAKRÁT O ZÁHADNÉ MOCNINĚ $4^n$

Obrazce. Postupujeme podle článku Woana, Shapira a Rogerse [28]. *Obrazec velikosti* $n$ je dvojice mřížových cest (typu sever-východ, známe je z druhé přednášky) délky $n$, které mají společný počáteční a koncový bod, ale jinak se neprotínají. Množinu obrazců velikosti $n$ označíme jako $\mathcal{A}(n)$.

**Větička.** Pro každé $n$ platí $|\mathcal{A}(n)| = c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Poprvé to dokázal v r. 1959 Levine [11] a pak o deset let později jinak Pólya [15]. Jako příklad uvádíme prvky množiny $\mathcal{A}(4)$:



Nás ale více zajímá

**Věta.** Pro každé $n$ platí

$$P_n := \sum_{X\in\mathcal{A}(n)} \text{Plocha}(X) = 4^{n-2}.$$

To objevil a dokázal někdy před rokem 1985 Schwarzler. Například v posledním obrázku máme čtyři obrazce s plochou 3 a jeden obrazec s plochou 4, což dohromady dává 16.

Woan, Shapiro a Rogers uvádějí, že není známo, zda se pro každé $n$ dá beze zbytku a bez překrývání pomocí $c_n$ obrazců velikosti $n$ (můžeme je otáčet) pokrýt šachovnice $2^{n-2} \times 2^{n-2}$. Případ $n = 5$ se čtrnácti obrazci a standardní šachovnicí $8 \times 8$ je prý „amusing puzzle“. Vyzkoušejte si puzzle za DOM CV.

## 5. přednáška 31.3.1999

**Důkaz větičky.** Odvodíme explicitní vzorec pro obecnější veličinu $b(n,k)$ rovnající se počtu *$k$-otevřených obrazců velikosti $n$*, jimiž rozumíme dvojice mřížových cest délky $n$ se společným počátečním vrcholem, které se jinak neprotínají a jejichž koncové vrcholy mají vzdálenost $k\sqrt{2}$. Platí rekurence ($k \geq 1$, $b(n,0)=0$)

$$b(n,k) = b(n-1,k-1) + 2b(n-1,k) + b(n-1,k+1).$$

Jsou totiž dvě možnosti, jak obě cesty po jednom kroku zůstanou stejně daleko, ale jen jedna možnost, jak se po jednom kroku rozejdou nebo sejdou o $\sqrt{2}$.

Indukcí podle $n$ dokážeme vzorec

$$b(n,k) = \frac{k}{n}\binom{2n}{n-k}.$$

Pro $n = 1$ platí: $b(1,0) = 0$ a $b(1,1) = 1$. Dále jde jen o manipulaci s binomickými koeficienty. Protože $2k = (k-1)+(k+1)$, můžeme po dosazení vzorce do pravé strany rekurence zjednodušovat:

$$\begin{aligned} & b(n,k-1) + 2b(n,k) + b(n,k+1) \\ = \ & \frac{k-1}{n}\binom{2n}{n-k+1} + \frac{2k}{n}\binom{2n}{n-k} + \frac{k+1}{n}\binom{2n}{n-k-1} \\ = \ & \frac{k-1}{n}\binom{2n+1}{n-k+1} + \frac{k+1}{n}\binom{2n+1}{n-k}. \end{aligned}$$

(Použili jsme základní rekurenci $\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}$.) Rozepíšeme-li $\frac{k-1}{n} = \frac{k-1}{n} - \frac{k}{n+1} + \frac{k}{n+1}$ a stejně tak i $\frac{k+1}{n}$, dostaneme, znovu s použitím základní binomické rekurence, že se poslední výraz rovná

$$\begin{aligned} & \frac{k}{n+1}\binom{2n+2}{n-k+1} \\ & + \frac{1}{n(n+1)}\left((n+k+1)\binom{2n+1}{n-k} - (n+1-k)\binom{2n+1}{n-k+1}\right). \end{aligned}$$

Rozdíl v závorce je roven nule a tak

$$b(n+1,k) = b(n,k-1) + 2b(n,k) + b(n,k+1) = \frac{k}{n+1}\binom{2n+2}{n-k+1}.$$

Tím jsme vyřídili i $|\mathcal{A}(n)|$, neboť

$$|\mathcal{A}(n)| = b(n-1,1) = \frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n-2} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = c_n.$$

$\square$

**Důkaz věty.** GF pro čísla $b(n,1)$ již máme:

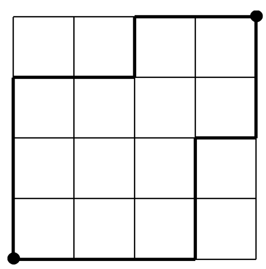
$$D(x) := \sum_{n\geq 1} b(n,1)x^n = \sum_{n\geq 1} c_{n+1}x^n = \frac{C(x)}{x} - 1.$$

($C(x)$ je GF Catalanových čísel.) Tvrdíme, že GF pro čísla $b(n,k)$ je rovna

$$\sum_{n\geq 1} b(n,k)x^n = \left(\sum_{n\geq 1} b(n,1)x^n\right)^k = D(x)^k.$$

Abychom to nahlédli, v $k$-otevřeném obrazci velikosti $n$ rozdělíme obě cesty na úseky délky $l_1, l_2, \ldots, l_k$, kde $l_1$ je jednoznačně určený počet kroků od počátku do okamžiku, kdy jsou obě cesty *naposledy* daleko $\sqrt{2}$, $l_2$ je jednoznačně určený počet kroků od této chvíle do okamžiku, kdy jsou obě cesty *naposledy* daleko $2\sqrt{2}$ a tak dále. Jistě $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$. Počet možností pro $i$-tý úsek obou cest je ale stále $b(l_i, 1)$, protože šikmým posunutím úseku dolní cesty o $(i-1)\sqrt{2}$ ztotožníme počáteční vrcholy a obdržíme 1-otevřený obrazec velikosti $l_i$. Tudíž $b(n,k) = \sum b(l_1,1)b(l_2,1)\cdots b(l_k,1)$, kde sčítáme přes všechny $k$-tice přirozených čísel $l_i$ splňující $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n$. To je přesně koeficient u $x^n$ v $D(x)^k$.

Pro přirozené $m$ rozumíme $m$-*diagonálou* diagonální (severozápadní směr) posloupnost $m$ jednotkových čtverečků. Dále, $B(n,m)$ označuje celkový počet všech $m$-diagonál ve všech obrazcích $X \in \mathcal{A}(n)$. Například obrazec



přispívá 3 do $B(8,1)$, 3 do $B(8,2)$, 1 do $B(8,3)$ a 0 do $B(8,m)$ pro $m>3$.

Je jasné, že hledaná plocha $P_n$ se rovná

$$\sum_{m\geq 1} mB(n,m).$$

Tvrdíme, že GF pro čísla $B(n,m)$ je

$$B_m(x) := \sum_{n\geq 1} B(n,m)x^n = \left(\sum_{n\geq 1} b(n,m)x^n\right)^2 = D(x)^{2m}.$$

Vskutku, $m$-diagonála rozděluje obrazec $X \in \mathcal{A}(n)$ na dva $m$-otevřené obrazce velikosti $l_1$ a $l_2$, kde $l_1+l_2=n$. Proto $B(n,m)=\sum b(l_1,m)b(l_2,m)$, kde sčítáme přes dvojice přirozených čísel splňující $l_1+l_2=n$.

Pro GF celkové plochy dostáváme formuli

$$\begin{aligned}
P(x) &:= \sum_{n\geq 1} P_n x^n = \sum_{n\geq 1} x^n \sum_{m\geq 1} mB(n,m)\\
&= \sum_{m\geq 1} m \sum_{n\geq 1} B(n,m)x^n = \sum_{m\geq 1} mB_m(x)\\
&= \sum_{m\geq 1} mD(x)^{2m}.
\end{aligned}$$

Binomická věta pro exponent $-2$ praví, že

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Proto

$$P(x) = \frac{D(x)^2}{(1-D(x)^2)^2}.$$

Protože $D(x) = C(x)/x - 1$ a $C(x)^2 - C(x) + x = 0$, máme $D = C^2/x$. Takže

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{C^4/x^2}{(1-D)^2(1+D)^2} = \frac{C^4/x^2}{(2-C/x)^2C^2/x^2} = \frac{C^2}{(2-C/x)^2}\\
&= \frac{x^2C^2}{(2x-C)^2} = \frac{x^2C^2}{4x^2-4xC+C^2} = \frac{x^2C^2}{4x^2-4xC+C-x}\\
&= \frac{x^2C^2}{(1-4x)(C-x)} = \frac{x^2}{1-4x}.
\end{aligned}$$

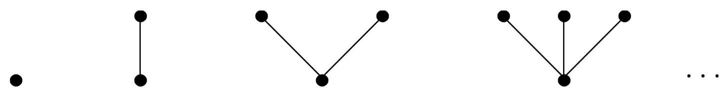
Tudíž $P_n = [x^n]P(x) = [x^n]x^2/(1-4x) = 4^{n-2}$. $\square$

Stromy. Náš druhý příklad pracuje se (zakořeněnými a rovinnými) stromy. Postupujeme podle článku Klazara [9]. Je-li $v \in V(T)$ vrchol stromu $T \in \mathcal{T}$, označuje $d(T,v)$ počet jeho dětí.

**Věta.** Platí

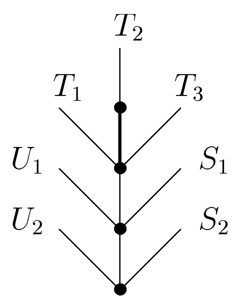
$$k_n := \sum_{T\in\mathcal{T}(n)} \sum_{v\in V(T)} 2^{d(T,v)} = \frac{1}{2}\left(4^{n-1} + \binom{2n-2}{n-1}\right).$$

**Důkaz.** Nejprve $k_n$ vyložíme trochu jinak. *Košťata* jsou tyto stromy:



(Stromy výšky 1.) Koště $K$ je *obsaženo* ve stromu $T$ tehdy, když se $K$ objevuje v $T$ jako orientovaný podgraf. Očividně $k_n$ počítá všechna košťata obsažená ve všech stromech $T \in \mathcal{T}(n)$, protože $2^{d(T,v)}$ je počet těch košťat obsažených v $T$, jejichž kořen splývá s $v$.

Na záležitost s košťaty se nyní podíváme z jejich hlediska. Zřejmě je $k_n$ rovno také počtu rozšíření nějakého koštěte $K$ na nějaký strom $T \in \mathcal{T}(n)$. Generické rozšíření $K$ na $T$ vypadá takto:




$K$ je vyznačeno tučně, v našem příkladu má $k = 2$ vrcholy. Do mezer mezi sousedními hranami $K$ vkládáme libovolně a nezávisle $2k-1$ stromů $T_i \in \mathcal{T}$. Z kořene $K$ spustíme cestu s $l \geq 0$ vrcholy (v našem příkladu je $l = 2$), do nichž zakořeníme libovolně a nezávisle $2l$ stromů $U_i$ a $S_i$. Jediné omezení je, že celkový počet vrcholů musí být $n$.

Po chvilkové meditaci nad obrázkem vidíme rovnost

$$K(x) := \sum_{n\geq 1} k_n x^n = \sum_{l\geq 0} \left(\frac{C(x)^2}{x}\right)^l \cdot \sum_{k\geq 1} x^k \left(\frac{C(x)}{x}\right)^{2k-1}.$$

Takže

$$\begin{aligned}
K(x) &= \frac{1}{1-C^2/x} \cdot \frac{x}{C} \cdot \frac{C^2/x}{1-C^2/x} = \frac{x^2 C}{(x-C^2)^2} \\
&= \frac{x^2 C}{(2x-C)^2} = \frac{x^2 C}{4x^2 - 4xC + C - x} = \frac{x^2 C}{(1-4x)(C-x)} \\
&= \frac{x}{1-4x} \cdot \frac{x}{C} = \frac{x}{1-4x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-4x} + \frac{x}{\sqrt{1-4x}}\right).
\end{aligned}$$

Pomocí binomické formule s exponentem $-1/2$ dostáváme

$$\begin{aligned}
k_n &= [x^n]K(x) = \tfrac{1}{2}[x^{n-1}]((1-4x)^{-1} + (1-4x)^{-1/2}) \\
&= \frac{1}{2}\left(4^{n-1} + \binom{2n-2}{n-1}\right).
\end{aligned}$$

□

**6. přednáška 7.4.1999**

V celém počítání jsme ale o košťatech potřebovali vědět jen to, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ máme právě jedno koště s $n$ vrcholy. (Tomu odpovídá koeficient 1 u $x^k$ v první formuli pro $K(x)$.) Dál již nic nezávisí na tvaru koštěte. Dokázali jsme více:

**Pozorování.** Nechť $\mathcal{S}, \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ je třída stromů, v níž je pro každé $n \in \mathbf{N}$ právě jeden strom s $n$ vrcholy. Nechť, pro $T \in \mathcal{T}$, funkce $w_{\mathcal{S}}(T)$ počítá celkový počet způsobů, jak se nějaký strom z $\mathcal{S}$ objevuje ve stromu $T$ jako orientovaný podgraf. Pak

$$w_{\mathcal{S}}(n) := \sum_{T\in\mathcal{T}(n)} w_{\mathcal{S}}(T) = \frac{1}{2}\left(4^{n-1} + \binom{2n-2}{n-1}\right).$$

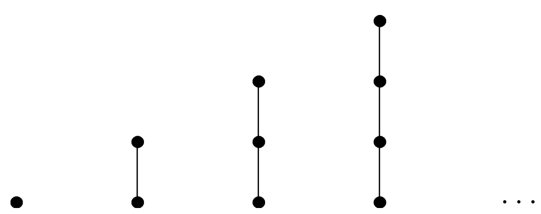
**Důkaz.** Stejný jako pro třídu košťat. □

Pomocí pozorování odvodíme další výsledek, v němž se „záhadně“ objevuje mocnina čtyř. Připomínáme, že každý strom $T \in \mathcal{T}$ je též částečně uspořádaná množina: pro dva vrcholy $u$ a $v$ položíme $u \leq_T v$, právě když $u$ leží na cestě spojující kořen a $v$. Řekneme, že vrcholy $u$ a $v$ jsou ve stromu $T$ *porovnatelné*, pokud $u \leq_T v$ nebo $v \leq_T u$.

**Věta.** Platí

$$\sum_{T \in \mathcal{T}(n)} \#\{(u,v) \in V(T) \times V(T) : \ u \text{ a } v \text{ jsou v } T \text{ porovnatelné}\} = 4^{n-1}.$$

**Důkaz.** Pozorování použijeme pro třídu stromů $\mathcal{S}$ rovnou cestám:



Nyní $w_{\mathcal{S}}(n)$ počítá všechny dvojice vrcholů $(u,v)$ ve všech stromech $T \in \mathcal{T}(n)$, že $u \leq_T v$. Hledaná hodnota se proto rovná dvojnásobku $w_{\mathcal{S}}(n)$ minus počet diagonálních dvojic $(u,u)$ (bez odečtení bychom je započetli dvakrát):

$$2w_{\mathcal{S}}(n) - \sum_{T \in \mathcal{T}(n)} \sum_{u \in V(T)} 1 = 4^{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} - n \cdot c_n = 4^{n-1}.$$

□

## IV. LAGRANGEOVA INVERZNÍ FORMULE

Lagrangeova inverzní formule (LIF) je velmi užitečný klasický výsledek o mocninných řadách.

**Věta (LIF).** Nechť $\varphi(u) \in \mathbf{C}[[u]]$ je mocninná řada splňující $\varphi(0) = 1$ a $w = w(u) \in \mathbf{C}[[u]]$ je jednoznačně určené řešení funkcionální rovnice

$$w = u \cdot \varphi(w).$$

Pak
$$[u^n]w = \tfrac{1}{n}[u^{n-1}]\varphi(u)^n.$$
Je-li $f(u) \in \mathbf{C}[[u]]$ další mocninná řada, platí obecněji
$$[u^n]f(w) = \tfrac{1}{n}[u^{n-1}]f'(u)\varphi(u)^n.$$

**Důkaz.** Později. □

**Ekvivalentní důsledek.** Nechť $\varphi(u) \in \mathbf{C}[[u]]$, přičemž $[u^0]\varphi = 0$ a $[u^1]\varphi = 1$. Pak
$$[u^n]\varphi^{\langle -1\rangle} = \tfrac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{\varphi(u)}\right)^n.$$

**Důkaz.** Řada $w = w(u) = \varphi^{\langle -1\rangle}(u)$ je řešením rovnice $u = \varphi(w)$, kterou přepíšeme jako $w = u \cdot (w/\varphi(w))$. Zbytek plyne pomocí LIF. Obdobně se naopak odvodí LIF z výsledku o funkcionálním inverzu. □

Předvedeme si několik klasických použití LIF. Nejprve spočítáme stromy $T \in \mathcal{T}$ s daným počtem vrcholů, jejichž každý vrchol má stupeň (tj. počet dětí) rovný 0 nebo 3. Hledaný počet označíme jako $a_n$ — například $a_1 = 1, a_2 = 0$ a $a_7 = 3$ — a definujeme GF
$$A = A(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n.$$

Má-li strom $T$ více vrcholů než jeden, má jeho kořen tři děti a v nich jsou zakořeněné tři stromy téhož typu. Dostáváme rovnici
$$A = x + xA^3 = x(1 + A^3),$$
která je šitá na míru LIF. Podle ní
$$\begin{aligned} a_n &= [x^n]A = \tfrac{1}{n}[x^{n-1}](1+x^3)^n \\ &= \tfrac{1}{n}[x^{n-1}]\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{3k} \\ &= \frac{1}{n}\binom{n}{(n-1)/3} \end{aligned}$$
pro $n-1$ dělitelné třemi a $a_n = 0$ jinak.

Úplně stejně se spočítají stromy, jejichž vrcholy mají stupeň rovný 0 nebo $k$. I vzorec pro Catalanova čísla vyplyne pomocí LIF: rovnice $C^2 - C + x = 0$ se přepíše jako
$$C = \frac{x}{1-C}$$
a podle LIF

$$\begin{aligned}
c_n &= [x^n]C = \tfrac{1}{n}[x^{n-1}](1-x)^{-n} \\
&= \tfrac{1}{n}[x^{n-1}]\sum_{k\geq 0}\binom{-n}{k}(-x)^k = \frac{1}{n}\binom{-n}{n-1}(-1)^{n-1} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{(-n)\cdot(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-2n+2)}{(n-1)!}\cdot(-1)^{n-1} \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Podívejme se, co nám LIF řekne o řešení $w = w(t) \in \mathbf{C}[[t]]$ rovnice
$$w = t\cdot \mathrm{e}^w.$$
Říká, že
$$[t^n]w = \tfrac{1}{n}[t^{n-1}]\mathrm{e}^{nt} = \frac{n^{n-1}}{n!}.$$
Takže
$$w(t) = \sum_{n\geq 1}\frac{n^{n-1}t^n}{n!}.$$
Podobnost s Cayleyovou formulí $n^{n-2}$ pro počet všech označených (ne zakořeněných rovinných) stromů na množině $\{1,2,\ldots,n\}$ není náhodná, takto ji později odvodíme. Obecná verze LIF s (například) $f(t) = t^2$ nám dá
$$[t^n]w(t)^2 = \tfrac{1}{n}[t^{n-1}]2t\mathrm{e}^{nt} = \frac{2}{n}\cdot\frac{n^{n-2}}{(n-2)!}.$$
Koeficient $[t^n]w(t)^2$ lze však spočítat přímo z definice, vyjde jistá suma. Porovnáním tak jako vedlejší produkt LIF dostáváme identitu
$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}i^{i-1}(n-i)^{n-i-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

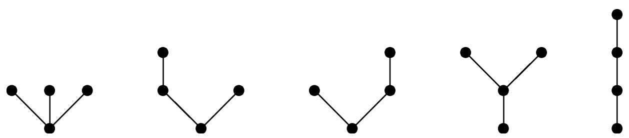
(Vše jsme vynásobili $n!$.) Jde o speciální případ Abelova zobecnění binomické formule.

Nezávislé množiny. Jako poslední příklad užitečnosti LIF nalezneme celkový počet všech nezávislých množin ve všech stromech $T \in \mathcal{T}(n)$. Postupujeme podle Klazara [9]. Množina $X \subset V(T)$ je *nezávislá*, nejsou-li žádné její dva vrcholy spojené hranou. Počet všech (včetně $\emptyset$) nezávislých podmnožin v $T$ označíme $w(T)$ a počet těch z nich (opět včetně $\emptyset$), které neobsahují kořen stromu $T$, jako $z(T)$. Zajímají nás veličiny

$$w(n) := \sum_{T \in \mathcal{T}(n)} w(T) \quad \text{a} \quad z(n) := \sum_{T \in \mathcal{T}(n)} z(T).$$

Pro ilustraci uvádíme hodnoty funkcí $w$ a $z$ na čtyřvrcholových stromech:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $z(T) =$ | 8 | 6 | 6 | 5 | 5 |
| $w(T) =$ | 9 | 8 | 8 | 9 | 8 |



**Věta.** Platí

$$w(n) = \frac{1}{n-1}\binom{3n-3}{n} \quad \text{a} \quad z(n) = \frac{1}{n}\binom{3n-2}{n-1}.$$

**Důkaz.** Jak počítat $w(T)$ a $z(T)$ pro daný strom $T$? Je-li $T$ jednovrcholový, máme $z(T) = 1$ a $w(T) = 2$. Má-li $T$ více vrcholů, označíme jako $T_1, T_2, \ldots, T_k$ podstromy zakořeněné v dětech kořene $T$. Lehce se nahlédnou rekurence

$$z(T) = \prod_{i=1}^{k} w(T_i) \quad \text{a} \quad w(T) = \prod_{i=1}^{k} w(T_i) + \prod_{i=1}^{k} z(T_i).$$

První je jasná, nezávislou množinu ve stromu $T$ neobsahující kořen dostaneme tak, že v každém podstromu $T_i$ zvolíme libovolně nezávislou množinu. V druhé rekurenci ještě připočteme nezávislé množiny, které kořen obsahují.

Definujeme GF

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} w(n)x^n = \sum_{T\in\mathcal{T}} w(T)x^{v(T)} \quad \text{a} \quad G(x) = \sum_{n\geq 1} z(n)x^n = \sum_{T\in\mathcal{T}} z(T)x^{v(T)}$$

($v(T)$ počítá vrcholy stromu $T$). Rekurence se překládají do rovnic

$$\begin{aligned} G(x) &= x\sum_{k\geq 0} F(x)^k = \frac{x}{1-F(x)} \\ F(x) &= x\sum_{k\geq 0} G(x)^k + x\sum_{k\geq 0} F(x)^k = \frac{x}{1-G(x)} + \frac{x}{1-F(x)}. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu

$$F = \frac{x}{1-G} + \frac{x}{1-F} \quad \text{a} \quad G = \frac{x}{1-F}.$$

## 7. přednáška 14.4.1999

Eliminujeme-li ze soustavy $G$ ($G$ v první rovnici nahradíme $x/(1-F)$), obdržíme po úpravách vztah $F^3 - 2F^2 + (1+2x)F + x^2 - 2x = 0$. To moc nadějně nevypadá. Eliminujeme-li $F$ (z druhé rovnice vyjádříme $F$ jako $F = 1 - x/G$ a dosadíme do první rovnice $F = x/(1-G) + G$), obdržíme po úpravách vztah $G^3 - 2G^2 + G - x = 0$. Jinými slovy,

$$G = \frac{x}{(1-G)^2}.$$

A to je jiná káva. Podle LIF

$$\begin{aligned} z(n) &= [x^n]G(x) = \tfrac{1}{n}[x^{n-1}](1-x)^{-2n} \\ &= \tfrac{1}{n}[x^{n-1}]\sum_{k\geq 0}\binom{-2n}{k}(-x)^k \\ &= \ldots = \frac{1}{n}\binom{3n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Jak ale dopočítat $w(n)$? Ukážeme, že je splněna lineární diferenciální rovnice

$$3xF' - 4xG' - 2(F-G) = 0.$$

Ta pro koeficienty dává relaci $(3n-2)w(n) = (4n-2)z(n)$. Vzorec pro $z(n)$ tak po lehkých úpravách poskytne i vzorec pro $w(n)$:

$$w(n) = \frac{1}{n-1}\binom{3n-3}{n}.$$

Zbývá dokázat onu relaci mezi $xF'$, $xG'$ a $F-G$. Z výchozí soustavy pro $F$ a $G$ je jasné, že

$$F - G = \frac{x}{1-G}.$$

Zderivujeme-li podle $x$ kubickou rovnici pro $G$ a vyjádříme-li $G'$, dostaneme $G' = 1/(3G^2 - 4G + 1)$. Takže

$$xG' = \frac{x}{3G^2 - 4G + 1} = \frac{1}{1-3G} \cdot \frac{x}{1-G}.$$

Konečně, zderivujeme-li podle $x$ rovnici $F = x/(1-G) + G$, dostaneme $F' = G' + 1/(1-G) + xG'/(1-G)^2$. Díky $x/(1-G)^2 = G$ máme $F' = G' + 1/(1-G) + GG'$. Takže

$$xF' = \frac{x}{1-G} + (1+G)xG' = \frac{2-2G}{1-3G} \cdot \frac{x}{1-G}.$$

Z těchto vyjádření $xF'$, $xG'$ a $F-G$ vyplývá, že jejich lineární kombinace s koeficienty $3, -4$ a $-2$ je identicky nulová. □

Důkaz LIF. Postupujeme podle knihy Gouldena a Jacksona [7]. Od $\mathbf{C}[[x]]$ přejdeme k obecnější struktuře

$$\mathbf{C}((x)) = \{\textstyle\sum_{n \geq k} a_n x^n :\ a_n \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{Z}\},$$

to jest k rozvojům s konečným počtem mocnin se záporným exponentem. Říká se jim *Laurentovy řady*. $(\mathbf{C}((x)), +, \cdot)$ je těleso: označíme-li pro $f \in \mathbf{C}((x))$ jako $\mathrm{val}(f)$ nejmenší $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $[x^k]f \neq 0$, máme $f = x^{\mathrm{val}(f)}g$, kde $g \in \mathbf{C}[[x]]$ a $[x^0]g \neq 0$, a $1/f = x^{-\mathrm{val}(f)}g^{-1}$ (jak víme, $g^{-1}$ v $\mathbf{C}[[x]]$ existuje).

*Reziduem* $f \in \mathbf{C}((x))$ rozumíme koeficient $[x^{-1}]f$. Jeho výsadní postavení plyne ze skutečnosti, že $x^{-1}$ jako jediná celočíselná mocnina $x^n, n \in \mathbf{Z}$ není derivací žádné řady $g \in \mathbf{C}((x))$.

**Pozorování.** Pro každé dvě Laurentovy řady $f, g \in \mathbf{C}((x))$ platí identity

$$[x^{-1}]f' = 0 \quad \text{a} \quad [x^{-1}]f'g = -[x^{-1}]fg'.$$

**Důkaz.** První rovnost je ona základní vlastnost rezidua. Druhá plyne z ní a z Leibnizovy formule $(fg)' = f'g + fg'$. □

**Tvrzení (reziduum a substituce).** Nechť $f, r \in \mathbf{C}((x))$ jsou Laurentovy řady, přičemž $k = \mathrm{val}(r) > 0$ (aby substituce $f(r(x))$ byla definovaná). Pak

$$k[x^{-1}]f(x) = [x^{-1}]f(r(x))r'(x).$$

**Důkaz.** Nejprve ověříme speciální případ $f(x) = x^n, n \in \mathbf{Z}$. Pro $n \neq -1$

$$[x^{-1}]r(x)^n r'(x) = \tfrac{1}{n+1}[x^{-1}](r(x)^{n+1})' = 0,$$

podle základní vlastnosti rezidua. Vlevo máme též nulu: $k[x^{-1}]x^n = 0$.

Nechť $n = -1$. Máme $r(x) = bx^k h(x)$, kde $b \neq 0$ a $h \in \mathbf{C}[[x]]$ splňuje $h(0) = 1$. Tedy existují mocninné řady $1/h$ a $\log(h)$. (Jak víme, $\log(h) = \log(1 + (h-1)) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n(h-1)^n/n$.) Podle základní vlastnosti rezidua

$$\begin{aligned}
[x^{-1}]r(x)^{-1}r'(x) &= [x^{-1}]b^{-1}x^{-k}h(x)^{-1} \cdot (bkx^{k-1}h(x) + bx^k h'(x)) \\
&= [x^{-1}](kx^{-1} + h'(x)/h(x)) = k + [x^{-1}](\log h(x))' \\
&= k.
\end{aligned}$$

Vlevo máme taky $k$: $[x^{-1}]kx^{-1} = k$.

Pro obecnou Laurentovu řadu $f(x) = \sum_{n\geq l} a_n x^n$ se $k[x^{-1}]f$ rovná $ka_{-1}$. Což se rovná pravé straně, podle předchozí úvahy totiž

$$[x^{-1}]\sum_{n\geq l} a_n r(x)^n r'(x) = [x^{-1}]a_{-1}r(x)^{-1}r'(x) = a_{-1}k.$$

□

**Vlastní důkaz LIF.** Dokazujeme větu ze strany 26. Řada $w = w(x) \in \mathbf{C}[[x]]$ je řešením rovnice $w = x \cdot \varphi(w)$. Položíme $\Phi(x) = x/\varphi(x)$. Pak, podle předpokladu o $\varphi(x)$, $\mathrm{val}(\Phi) = 1$. Dále $\Phi(w(x)) = x$, a tak $w(x) = \Phi(x)^{\langle -1\rangle}$. Pro libovolnou mocninnou řadu $f$ a číslo $n \in \mathbf{N}$ dostáváme

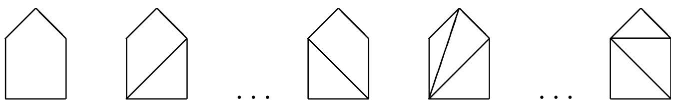
$$\begin{aligned}
[x^n]f(w(x)) &= [x^{-1}]x^{-(n+1)}f(\Phi(x)^{\langle -1\rangle}) \\
&= [x^{-1}]\Phi(x)^{-(n+1)}f(x)\Phi'(x) \\
&= -\tfrac{1}{n}[x^{-1}]f(x)(\Phi(x)^{-n})' \\
&= \tfrac{1}{n}[x^{-1}]f'(x)\Phi(x)^{-n} \\
&= \tfrac{1}{n}[x^{n-1}]f'(x)\varphi(x)^n.
\end{aligned}$$

Na druhý řádek jsme přešli pomocí substituce $x := \Phi(x)$ a posledního tvrzení. Na čtvrtý jsme se dostali pomocí druhé rovnosti z posledního pozorování. Při přechodu na pátý jsme $\Phi(x)$ nahradili $x/\varphi(x)$. $\square$

## V. SCHRÖDEROVA A MOTZKINOVA ČÍSLA

Jsou to blízcí příbuzní Catalanových čísel, protože jejich GF splňují kvadratické rovnice.

SCHRÖDEROVA ČÍSLA. $P$ buď konvexní $n$-úhelník s vrcholy očíslovanými $1, 2, \ldots, n$ proti směru hodinových ručiček. *Rozřezáním* $P$ rozumíme jakýkoli (i prázdný) systém úhlopříček v $P$, v němž se žádné dvě úhlopříčky nekříží. Například pro $n = 5$ máme těchto 11 rozřezání:



Jako $a_n$ označíme počet všech rozřezání $P$ a jako $b_n$ počet těch, v nichž z 1 nevychází žádná úhlopříčka. Takže $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, $a_3 = b_3 = 1$, $a_4 = 3$, $b_4 = 2$ atd. Nalezneme GF

$$F = F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \quad \text{a} \quad G = G(x) = \sum_{n \geq 1} b_n x^n.$$

Uvážíme rozřezání $P$, v nichž z 1 vychází alespoň jedna úhlopříčka. Rozříznutím $P$ podle nejlevější z těchto úhlopříček dostaneme rozřezání $P_1$ a $P_2$, přičemž v prvním z 1 nevychází úhlopříčka, druhé je obecné a mnohoúhelníky $P_1$ a $P_2$ mají celkem $n + 2$ vrcholů. Z tohoto rozkladu plyne rovnice

$$F = G + \frac{GF}{x^2}.$$

### 8. přednáška 21.4.1999

Druhou rovnici

$$G = 2xF + x^3$$

dostaneme tak, že rozřezání $P$ ($n > 3$), v nichž z 1 nevychází žádná úhlopříčka rozdělíme na dvě skupiny podle toho, zda vrcholy $n$ a 2 jsou nebo nejsou spojeny. Oba případy se lehce převedou na obecné rozřezání $(n-1)$-úhelníka, a tak vidíme, že v obou skupinách máme $a_{n-1}$ rozřezání.

Eliminujeme-li ze soustavy $G$, dostaneme pro $F$ rovnici

$$2F^2 + (3x^2 - x)F + x^4 = 0.$$

Pro $F$ tak máme formuli

$$F = F(x) = \tfrac{1}{4}x(1 - 3x - \sqrt{x^2 - 6x + 1}).$$

Zvolili jsme řešení se znaménkem minus, protože $F(x) = x^3 + \cdots$. Víme, že $a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 11$. Odvodíme rekurenci pro počítání $a_n$. Místo $F$ budeme pracovat s $H = \frac{F}{x} = \frac{1}{4}(1 - 3x - \sqrt{1 - 6x + x^2}) = \sum_{n\geq 3} a_n x^{n-1}$. Protože

$$\begin{aligned}(x-3)\cdot H &= \tfrac{1}{4}(-3 + 10x - 3x^2 - (x-3)\sqrt{\ldots})\\ (1 - 6x + x^2)\cdot H' &= \tfrac{1}{4}(-3 + 18x - 3x^2 - (x-3)\sqrt{\ldots}),\end{aligned}$$

splňuje $H$ diferenciální rovnici

$$(1 - 6x + x^2)H' - (x-3)H = 2x.$$

Pro $n > 1$ je tedy koeficient u $x^n$ v mocninné řadě vlevo roven nule, což je vyjádřeno vztahem $a_{n+2}(n+1) - a_{n+1}(6n-3) + a_n(n-2) = 0$. Takže

$$a_{n+2} = \frac{(6n-3)a_{n+1} - (n-2)a_n}{n+1}.$$

Dostáváme hodnoty

$$a_6 = \frac{21\cdot 11 - 2\cdot 3}{5} = 45,\ \ a_7 = \frac{27\cdot 45 - 3\cdot 11}{6} = 197, \ldots$$

Posloupnost

$$\{s_n\}_{n\geq 1} = \{a_n\}_{n\geq 3} = \{1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279, 20793, \ldots\}$$

se nazývá posloupností *Schröderových čísel*. Je pojmenována podle E. Schrödera, který ji zavedl v roce 1870 v [19].

Uvedeme si tři explicitní vzorce pro $s_n$ vyskytující se v literatuře.

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j+1}\binom{2j}{j}\binom{j+n}{2j}\\
s_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j 2^{n-j}\binom{n+1}{j}\binom{2n-j}{n}\\
s_n &= \sum_{j=0}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}(-1)^j\frac{(2n-2j-1)!!}{j!(n+1-2j)!}\cdot\frac{3^{n+1-2j}}{2^{2+j}}\quad (n>1).
\end{aligned}$$

V posledním vzorci $(2m+1)!!$ označuje *lichý faktoriál*, součin $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2m+1)$.

Za DOM CV uhodněte, která ze tří formulí se dá odvodit LIFou, a odvoďte ji tak.

Singularita funkce $\sqrt{1-6x+x^2}$ nejbližší k počátku se dostane z kvadratické rovnice $x^2-6x+1=0$, jejíž řešení jsou $3\pm 2\sqrt{2}$. Schröderova čísla tedy rostou zhruba jako $(3-2\sqrt{2})^{-n}=(3+2\sqrt{2})^n=(5.828\ldots)^n$.

Další struktura počítaná Schröderovými čísly. Pro pevné $n\in\mathbf{N}$ uvažme rozklad množiny $[l]=\{1,2,\ldots,l\}$ ($l$ může být libovolné) na $n$ bloků, přičemž (i) žádná dvě čísla $m$ a $m+1$ nejsou v témže bloku, (ii) jde o nekřížící se rozklad a (iii) 1 a $l$ jsou v tomtéž bloku. Počet takových rozkladů označíme jako $r_n$. Připomínáme, že nekřížící se rozklad je ten, pro nějž neexistují čtyři čísla $1\le a<b<c<d\le l$ a dva různé bloky $A$ a $B$ tak, že $a,c\in A$ a $b,d\in B$.

Tyto struktury se dají přehledněji reprezentovat pomocí posloupností. Místo rozkladu $[l]$ na $n$ bloků vezmeme posloupnost $u=a_1a_2\ldots a_l$, kde $a_i=a_j$ tehdy a jen tehdy, když $i$ a $j$ jsou v témže bloku rozkladu. Přidáme ještě *normalizační požadavek*: $\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}=\{1,2,\ldots,n\}$ a $1\le i<j\le n$ implikuje, že první výskyt $i$ v $u$ přechází první výskyt $j$. Posloupnost $u$ je pak pro daný rozklad určena jednoznačně. Je jasné, jak z ní rozklad zpětně vyčteme. Hořejší podmínka (i) říká, že $a_j\ne a_{j+1}$ pro každé $j$. Podmínka (ii) zakazuje výskyt podposloupnosti typu *abab*. Podmínka (iii) chce, aby $a_l=1$ (vždy $a_1=1$). Například $r_3=3$, jak dosvědčují rozklady

$$1231,\ 12321 \text{ a } 12131.$$

**Tvrzení.** Posloupnost $\{r_n\}_{n\ge 2}$ je posloupnost Schröderových čísel.

**Důkaz.** Odvodíme rovnici pro GF

$$F = \sum_{n \geq 1} r_n x^n = x + x^2 + 3x^3 + \cdots.$$

Vezmeme libovolný rozklad $[l]$ na $n$ bloků vyhovující podmínkám (i)–(iii) a reprezentujeme ho posloupností $u$. Výskyty jedničky rozdělují $u$ na úseky: $u = 1u_1 1u_2 1 \ldots 1u_k 1$. Úseky $u_i$ se mohou nezávisle na sobě (vzhledem k podmínce (ii) nesdílejí symboly) volit jako *neprázdné* rozklady splňující podmínky (i) a (ii). Podmínku (iii) obecně nesplňují ($u_i$ nesplňují ani normalizační požadavek, to je ale jen formální závada). Nečiní to velký problém, snadno se totiž vidí, že počet rozkladů majících $m$ bloků a splňujících (i) a (ii) je pro $m > 1$ roven $2r_m$ (chybějící koncovou jedničku lze vždy přidat); pro $m = 1$ máme jen jeden takový rozklad. Dostáváme rovnici

$$F = x \sum_{k \geq 0} (2F - x)^k = \frac{x}{1 + x - 2F},$$

to jest kvadratickou rovnici

$$2F^2 - (1 + x)F + x = 0.$$

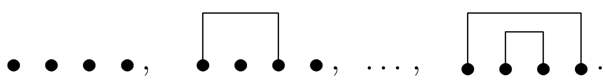
Jejím řešením je mocninná řada

$$F = F(x) = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{4}.$$

Což je, až na nepodstatné odchylky, vzorec pro GF Schröderových čísel. □

Motzkinova čísla. Zavedl je Th. Motzkin v roce 1948 v [13], když zkoumal následující problém. Na kružnici je umístěno $n$ bodů. Kolika způsoby se dají spojit vzájemně disjunktními tětivami? Žádné dvě tětivy nemají společný bod a jejich počet je libovolný, mezi 0 a $n/2$. Počet možností označíme jako $m_n$.

Úlohu mírně přeformulujeme. Máme dáno $n$ bodů nakreslených ve vodorovné řadě. Kolika způsoby je (ne nutně všechny) můžeme spojit oblouky, které všechny leží nad touto řadou a jsou vzájemně disjunktní? Pro $n = 4$ to lze 9 způsoby:



Rovnice pro GF

$$M = \sum_{n\geq 0} m_n x^n = 1 + x + 2x^2 + \cdots$$

se odvodí lehoulinoučce. První z bodů buď není nebo je koncovým bodem oblouku. Není-li, můžeme zbylých $n-1$ bodů propojovat oblouky libovolně. Je-li, určuje druhý konec oblouku dvě skupiny bodů, které mají dohromady $n-2$ členů, a na každé z nich můžeme libovolně a nezávisle na druhé kreslit oblouky (mezi skupinami oblouk vést nemůže). Stručně řečeno,

$$M = 1 + xM + x^2M^2.$$

Kvadratická rovnice $x^2M^2 + (x-1)M + 1 = 0$ dává vzorec

$$M = M(x) = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2} = \frac{1 - x - \sqrt{(1-3x)(1+x)}}{2x^2}.$$

Posloupnost

$$\{m_n\}_{n\geq 1} = \{1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, \ldots\}$$

je posloupnost *Motzkinových čísel*. Je jasné, že rostou zhruba jako $3^n$.

Rekurence pro $m_n$ se odvodí podobně jako pro Schröderova čísla. Ponecháváme to za DOM CV.

Explicitní formule? Jedna plyne přímo ze samé definice:

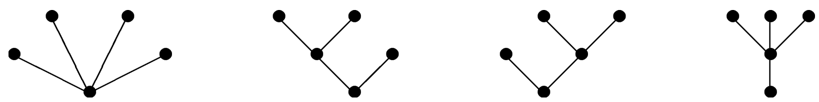
$$\begin{aligned} m_n &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} \cdot \#\text{ dobrých uzávorkování s } k \text{ dvojicemi závorek} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{2k}. \end{aligned}$$

Oblouky totiž vytvářejí dobrá uzávorkování, která jsme spočetli ve třetí přednášce. Jiná možnost je využít binomickou větu a rozvinout podle ní $(1-3x)^{1/2}(1+x)^{1/2}$ v hořejším vzorci. To po menším výpočtu dá vztah

$$m_n = \frac{1}{2 \cdot 4^{n+1}} \sum_{i=0}^{n+2} (-1)^{n+1+i} 3^i c_i c_{n+2-i},$$

kde $c_n = \binom{2n-2}{n-1}/n$ jsou Catalanova čísla a $c_0 = -1/2$.

Další struktura počítaná Motzkinovými čísly. Jsou jí zakořeněné rovinné stromy s $n$ vrcholy, v nichž žádný vrchol s případnou výjimkou kořene nemá jen jedno dítě. (Řadu dalších struktur počítaných $m_n$ uvádějí Donaghey a Shapiro v [4].) Počet těchto stromů označíme $a_n$. Kupříkladu $a_5 = 4$:



Ukážeme, že $a_n$ jsou až na posun indexu Motzkinova čísla. Pomocná GF

$$B = \sum_{n \geq 0} b_n x^n = x + x^3 + \cdots$$

počítá stromy, v nichž vůbec žádný vrchol nemá jen jedno dítě. Pro ni máme — z rozkladu na podstromy zakořeněné v dětech kořene — vztah

$$B = x(1 + B^2 + B^3 + \cdots) = x\left(\frac{1}{1-B} - B\right).$$

Takže

$$(1+x)B = \frac{x}{1-B}.$$

Celkem dostáváme pro $B$ rovnici $(1+x)B^2 - (1+x)B + x = 0$. Hledaná GF $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ splňuje

$$A = x(1 + B + B^2 + \cdots) = \frac{x}{1-B} = (1+x)B.$$

Z rovnice pro $B$ tak dostaneme hned rovnici pro $A$, totiž

$$A^2 - (1+x)A + x(1+x) = 0.$$

Jejím vyřešením dostáváme motzkinovský vzorec

$$A = A(x) = \tfrac{1}{2}(1 + x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2})$$

a vše je jasné.

## 9. přednáška 5.5.1999

Literatura a informace o kombinatorické enumeraci. **1. Knihy.** Comtet: Advanced Combinatorics [2], Goulden a Jackson: Combinatorial Enumeration [7], kapitoly ve van Lintovi a Wilsonovi: A Course in Combinatorics [26], Wilf: Generatingfunctionology [27], kapitola v Lovászovi: Combinatorial Problems and Exercises [12], Stanley: Enumerative Combinatorics Vol I [21] a právě vyšlý Vol II [22], pasáže v Knuthovi: The Art of Computer Programming [10], dvě kapitoly v Handbook of Combinatorics [8] a sice 21. Gessel a Stanley: Algebraic Enumeration a hlavně 22. Odlyzko: Asymptotic Enumeration Methods. Většina toho ovšem v knihovně v Karlíně není. **2. Časopisy.** Například Journal of Combinatorial Theory A, Discrete Mathematics, European Journal of Combinatorics, ... **3. Internet.** Electronic Journal of Combinatorics (EJC) [5], Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science [3], aj. Stránky hyperaktivních kombinatoriků: Flajolet, Gessel, Knuth, Odlyzko, Sloane, Zeilberger, ... (další odkazy viz www stránka EJC). Sloane: Handbook of Integer Sequences na Sloanově www stránce, který vyšel nejprve knižně [20]. Umožňuje testovat, zda vaše oblíbená posloupnost čísel je přítomna v rozsáhlé databázi (tj. zda se tímto nebo ekvivalentním problémem už někdo zabýval), popř. zda tam je přítomna modifikace vaší posloupnosti.

# VI. POUŽITÍ GF V TEORII PRAVDĚPODOBNOSTI

Větvící se náhodný proces. Jedinec zplodí $k$ dětí s pravděpodobností $p_k$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots$, a umírá. Jeho děti mají opět děti se stejnými pravděpodobnostmi, umírají a vše pokračuje stejně dále. Zajímají nás počty jedinců v $n$-té generaci, zejména, co se dá říci o pravděpodobnosti $q_n$, že v $n$-té generaci (tím pádem i v dalších) všichni vymřeli.

Je možný i technicko-budovatelský pohled Rényiho [16], podle jehož knihy zde postupujeme. Na první z mnoha stínítek dopadne elektron, při srážce zanikne, ale vytvoří $k$ nových elektronů s pravděpodobností $p_k$. Vzniklé elektrony dopadnou na druhé stínítko a každý z nich vytvoří podle téhož zákona další elektrony atd. Rozumí se, že události vzniku elektronů v jednotlivých srážkách jsou vzájemně nezávislé.

Důležitým parametrem popisujícím náš proces je

$$M = \sum_{k \geq 0} k p_k,$$

střední (očekávaná) hodnota počtu dětí jedince, popř. počtu elektronů zrozených ve srážce.

**Větička.** Existuje limita $q$ pravděpodobností vymření $q_n$,

$$\lim_{n\to\infty} q_n = q, \text{ a } q \begin{cases} = 1 & \text{pro } M \le 1 \text{ a} \\ < 1 & \text{pro } M > 1. \end{cases}$$

**Důkaz.** Vyloučíme degenerované případy $p_0 = 0, 1$ a předpokládáme, že $0 < p_0 < 1$. Zavedeme GF

$$G(z) = \sum_{k\ge 0} p_k z^k,$$

GF rozdělení pravděpodobnosti, nástroj v teorii pravděpodobnosti hojně užívaný. Podobně definujeme

$$G_n(z) = \sum_{k\ge 0} p_{n,k} z^k,$$

kde $p_{n,k}$ udává pravděpodobnost, že $n$-tá generace obsahuje $k$ jedinců. Klademe $G_1 = G$. Protože $\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} = 1$, máme $G_n(1) = 1$. Je rovněž očividné, že funkce $G_n$ jsou definovány pro každé $|z| < 1$. Platí kruciální vztah

$$G_{n+1}(z) = G_n(G(z)),$$

protože

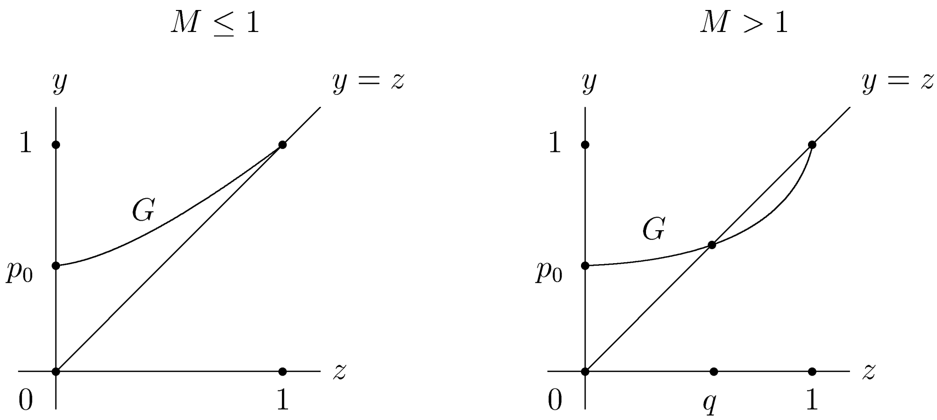
$$[z^l]G_{n+1}(z) = p_{n+1,l} = \sum_{k\ge 0} p_{n,k} \sum_{\cdots} p_{l_1} p_{l_2} \cdots p_{l_k},$$

kde sčítáme přes všechny $k$-tice celých čísel $0 \le l_1, l_2, \ldots, l_k$ splňující $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = l$, a to je přesně $[z^l]G_n(G(z))$. GF $G_n(z)$ je tedy $n$-násobnou složeninou $G(G(\cdots G(z)\cdots))$.

Patrně $q_n = p_{n,0} = G_n(0)$. Pravděpodobnosti $q_n$ tvoří rostoucí posloupnost: $q_{n-1} = G_{n-1}(0) < G_{n-1}(G(0)) = G_n(0) = q_n$. Limita $q = \lim q_n$ tedy existuje. Protože též $q_n = G(G_{n-1}(0)) = G(q_{n-1})$, limitní přechod vede na rovnici

$$q = G(q).$$

Limita $q$ je pevným bodem funkce $G$. Jistě jím je 1, neboť $G(1) = \sum p_k = 1$. Ukážeme, že pro $M \le 1$ jiný pevný bod v $[0, 1]$ není a pro $M > 1$ je právě jeden další.




$G$ má mocninný rozvoj s nezápornými koeficienty. Je proto, stejně jako její všechny derivace, v intervalu $[0, 1]$ nezáporná. $G$ je rostoucí a konvexní. Protože $G(0) > 0$ a $M = G'(1)$, pro $M \leq 1$ se její graf přibližuje k přímce $y = z$ shora a protne ji až v $z = 1$. Tudíž $q_n = G(G(\cdots G(0)\cdots)) \to 1$.

Pro $M > 1$ se v levém okolí 1 přibližuje graf $G$ k přímce $y = z$ zdola a někdy předtím ji v $z = q$ musí protnout. Průsečík je zjevně jen jeden. Z $z < q$ plyne $G(z) < G(q) = q$. Tudíž $q_n = G(G(\cdots G(0)\cdots)) \to q < 1$. $\square$

Střední hodnota $M_n = \sum_{k=0}^{\infty} k p_{n,k}$ počtu potomků v $n$-té generaci splňuje $M_n = M^n$, neboť $M_n = G'_n(1)$ a $G'_n(1) = G'_{n-1}(G(1)) \cdot G'(1) = G'_{n-1}(1) \cdot G'(1) = M_{n-1} \cdot M$ a $M_1 = M$. Shrňme na závěr, co se děje pro jednotlivá $M$.

Nechť $M > 1$. Pak $q_n \to q < 1$ a $M_n$ roste exponenciálně k nekonečnu. Protože $G_n(z) \to q$ pro každé $z \in [0, 1)$, máme $p_{n,k} \to 0$ pro každé pevné $k > 0$ (to platí pro každé $M$), a tak

$$\Pr(\#\text{ potomků v } n\text{-té generaci je} > k \mid \text{ještě nevymřeli}) \to 1$$

pro každé pevné $k$ a $n \to \infty$.

Pro $M < 1$ máme $q_n \to 1$ a $M_n$ jde exponenciálně k nule. Pro $M = 1$ jde pravděpodobnost vymření rovněž k 1, ale střední hodnota počtu potomků je v každé generaci 1.

Házení mincí a čekání na slovo. Postupujeme dle Odlyzka v [8]. $A = a_1 a_2 \ldots a_k \in \{P, O\}^k$ je slovo délky $k, k > 0$, nad abecedou $\{P, O\}$ („panna nebo orel“). Házíme poctivou mincí ($P$ i $O$ padají s pravděpodobností 1/2) a zajímá nás, jak dlouho musíme v průměru čekat, než se v posloupnosti výsledků objeví $A$ jako souvislé podslovo. Odpověď nalezneme pomocí $GF$.

Nechť

$$F_A(z) = \sum_{n\geq 0} f_A(n)z^n = 1 + \cdots,$$

kde $f_A(n)$ je počet slov z $\{P, O\}^n$ neobsahujících $A$, a

$$G_A(z) = \sum_{n\geq 1} g_A(n)z^n,$$

kde $g_A(n)$ počítá slova v $\{P, O\}^n$, která obsahují $A$ na začátku, ale nikde jinde.

Veličinu $c_A(j)$ definujeme jako 1, pokud se počáteční úsek $A$ délky $k - j$ shoduje s koncovým úsekem téže délky, a jako 0 jinak. Takže vždy $c_A(0) = 1$. *Korelační polynom* $C_A(z)$ je definován jako

$$C_A(z) = \sum_{j=0}^{k-1} c_A(j)z^j.$$

Například pro $A_0 = POPOPPOP$ máme $C_{A_0}(z) = 1 + z^5 + z^7$.

Odvodíme, že obě GF splňují soustavu

$$2zF_A = F_A - 1 + G_A \quad \text{a} \quad z^kF_A = C_AG_A.$$

Slovo $v \in \{O, P\}^n, A \not\subset v$, buď libovolné. První rovnice vyplývá z faktu, že po přidání $O$ nebo $P$ před $v$ se $A$ může vytvořit, ale jen na začátku. Druhá rovnice se dostane uvážením slov tvaru $Av$. Každé z nich má jednoznačný rozklad $Av = BAw$, kde $Aw$ obsahuje $A$ jen na začátku. (Vezmeme poslední výskyt $A$ v $Av$.) Patrně je $B$ počátečním úsekem $A$, $A = BC$, a tedy i $A = CD$. $C$ je tedy shodným počátečním i koncovým úsekem $A$. Sumací přes $C$ dostáváme druhou rovnici.

Soustava má řešení

$$F_A(z) = \frac{C_A(z)}{z^k + (1 - 2z)C_A(z)} \quad \text{a} \quad G_A(z) = \frac{z^k}{z^k + (1 - 2z)C_A(z)}.$$

**Tvrzení.** Střední čekací doba na $A$ je $2^kC_A(1/2)$.

**Důkaz.** Jako $p_n$ označíme pravděpodobnost, že se $A$ objeví poprvé po $n$ hodech, a $q_n$ pravděpodobnost, že se $A$ během $n$ hodů neobjeví. Zřejmě

$p_n = q_{n-1} - q_n$ a $q_n = f_A(n)(\frac{1}{2})^n$. Proto

$$
\begin{aligned}
E(\#\text{ hodů, než se } A \text{ objeví}) &= \sum_{n\geq 1} np_n \\
&= \sum_{n\geq 1} n(q_{n-1} - q_n) = \sum_{n\geq 0} q_n \\
&= \sum_{n\geq 0} f_A(n)(1/2)^n = F_A(1/2). \\
&= 2^k C_A(1/2).
\end{aligned}
$$

□

Na $A_0 = POPOPPOP$ nutno v průměru čekat $2^8(1 + (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^7) = 266$ hodů.

**10. přednáška 12.5.1999**

## VII. POUŽITÍ GF V TEORII ČÍSEL

V následujících pěti úlohách postupujeme podle Newmanovy knihy [14].

Rozklad na aritmetické posloupnosti. $X \subset \mathbf{N}$ je (nekonečná) *aritmetická posloupnost*, má-li tvar $X = \{a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\}$, kde $a, d \in \mathbf{N}$. Konstanta $d > 0$ se nazývá *diference* $X$.

**Tvrzení.** Množinu přirozených čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ nelze rozložit na disjunktní sjednocení (alespoň dvou, ale konečně mnoha) aritmetických posloupností se vzájemně různými diferencemi.

**Důkaz.** Řekněme, že to možné je. Tedy

$$\mathbf{N} = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_l,$$

kde $S_i = \{a_i, a_i + d_i, a_i + 2d_i, \ldots\}$, $d_i \neq d_j$ a $S_i \cap S_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a $l \geq 2$. Řečeno GF,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} z^k &= \sum_{k\in S_1} z^k + \sum_{k\in S_2} z^k + \cdots + \sum_{k\in S_l} z^k \\
\frac{z}{1-z} &= \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \cdots + \frac{z^{a_l}}{1-z^{d_l}}.
\end{aligned}
$$

Což je sporná rovnost: je-li $d$ největší $d_i$, jde pro $z \to e^{2\pi i/d}$ právě jeden její člen (v absolutní hodnotě) do nekonečna a ostatní mají konečné limity. $\square$

Dokonalé pravítko. Dokonalé pravítko je $n$-tice $0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ celých čísel vyznačující se tím, že rozdíly $a_i - a_j$, $i > j$, probíhají všech $N = \binom{n}{2}$ hodnot $1, 2, \ldots, N$. Příkladem dokonalého pravítka je čtveřice $(0, 1, 4, 6)$ — na odměření vzdáleností $1, 2, \ldots, 6$ nám stačí jen uvedené čtyři rysky.

**Tvrzení.** Pro $n > 4$ dokonalé pravítko neexistuje.

**Důkaz.** Nechť $0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ je dokonalé pravítko a $n > 4$. Pak GF

$$A(z) = \sum_{k=1}^{n} z^{a_k}$$

splňuje rovnici

$$A(z)A(1/z) = \sum_{k=-N}^{N} z^k + n - 1.$$

(Rozdíly $a_i - a_j$ dávají jednou každé z čísel $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ a $n$ krát číslo 0.) Protože

$$z^{-N} + z^{-N+1} + \cdots + z^N = \frac{z^{-N}(z^{2N+1} - 1)}{z - 1} = \frac{z^{N+1/2} - z^{-(N+1/2)}}{z^{1/2} - z^{-1/2}},$$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ a $A(e^{-i\theta})$ je číslo komplexně sdružené k $A(e^{i\theta})$, dostáváme po dosazení $z = e^{i\theta}$ do hořejší rovnosti nerovnost

$$0 \le |A(e^{i\theta})|^2 = A(e^{i\theta})A(e^{-i\theta}) = \frac{\sin(N + 1/2)\theta}{\sin\theta/2} + n - 1.$$

Pro spor stačí nalézt $\theta$ tak, že poslední zlomek je menší než $-(n-1)$. Položíme $\theta = \frac{3\pi}{n^2-n+1}$. Pak $\sin(N + 1/2)\theta = \sin\frac{n^2-n+1}{2}\theta = -1$, $0 < \sin\theta/2 < \theta/2$ a pro $n \ge 5$ opravdu

$$\frac{\sin(N + 1/2)\theta}{\sin\theta/2} < -\frac{2}{\theta} = -\frac{2n^2 - 2n + 2}{3\pi} < -(n - 1),$$

protože $2n^2 - 2n + 2 - 3\pi(n-1) > 2n^2 - 2n + 2 - 10(n-1) = 2(n-3)^2 - 6 \ge 2 > 0$. $\square$

Eulerova identita. *Číselným rozkladem* $n \in \mathbf{N}$ rozumíme rozklad $n$ na součet přirozených sčítanců, přičemž na pořadí nezáleží. Například číslo 6 má celkem jedenáct rozkladů:

$$\begin{array}{llll} 6 & = 6 & = 3+3 & = 2+2+1+1 \\ & = 5+1 & = 3+2+1 & = 2+1+1+1+1 \\ & = 4+2 & = 3+1+1+1 & = 1+1+1+1+1+1. \\ & = 4+1+1 & = 2+2+2 & \end{array}$$

Z nich čtyři používají vzájemně různé sčítance $(6, 5+1, 4+2$ a $3+2+1)$ a rovněž čtyři používají jen liché sčítance $(5+1, 3+3, 3+1+1+1$ a $1+1+1+1+1+1)$. Euler dokázal, že to není náhoda.

**Tvrzení.** Pro každé $n \in \mathbf{N}$ se počet rozkladů $r_n$ čísla $n$ na různé sčítance rovná počtu rozkladů $l_n$ čísla $n$ na liché sčítance.

**Důkaz.** Dokážeme, že se GF

$$R = \sum_{n\geq 0} r_n x^n = 1 + x + \cdots \quad \text{a} \quad L = \sum_{n\geq 0} l_n x^n = 1 + x + \cdots$$

rovnají. Není složité si uvědomit, že

$$R = (1+x^1)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \quad \text{a} \quad L = \frac{1}{(1-x^1)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

Ovšem $1 + x^i = (1-x^{2i})/(1-x^i)$, a tak opravdu

$$R = \frac{\cancel{(1-x^2)}\cancel{(1-x^4)}\cancel{(1-x^6)}\cancel{(1-x^8)}\ldots}{(1-x^1)\cancel{(1-x^2)}(1-x^3)\cancel{(1-x^4)}\ldots} = L.$$

$\square$

Rozměňování bankovky. Kolika způsoby se dá rozměnit bankovka hodnoty $n$ korun na jedno-, dvou- a tříkorunové mince? Je-li $a_n$ počet všech možných rozměnění, je GF čísel $a_n$ dána formulí

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Po chvilce počítání ověříme identitu

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1/6}{(1-x)^3} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1-x^2} + \frac{1/3}{1-x^3}.$$

Ale

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n \\
\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n
\end{aligned}
$$

a zbývající dva členy jsou geometrické řady. Získáváme formuli

$$
a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{12} + \frac{n+1}{4} + \begin{cases} 1/4 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ 1/3 & \text{pro } n \text{ dělitelné třemi,} \end{cases}
$$

která se kompaktně zapíše jako

$$
a_n = \left\lfloor \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1 \right\rfloor .
$$

SČÍTACÍ FUNKCE NENÍ SKORO KONSTANTNÍ. Pro $A \subset \mathbf{N}$ definujeme *sčítací funkci* $r_A(n)$ jako počet řešení rovnice

$$
n = a + a',\ a \leq a',\ a, a' \in A.
$$

Funkce definovaná na $\mathbf{N}$ je skoro konstantní, pokud je konstantní od určitého $n_0$ dále.

**Tvrzení.** Pro žádnou nekonečnou $A$ není $r_A(n)$ skoro konstantní.
**Důkaz.** Sporem pomocí GF. Z GF

$$
A(z) = \sum_{a\in A} z^a
$$

množiny $A$ snadno odvodíme GF sčítací funkce:

$$
\sum_{n\geq 1} r_A(n) z^n = \tfrac{1}{2}(A(z)^2 + A(z^2)).
$$

Byla-li by $r_A(n)$ skoro konstantní, měli bychom pro nějaké $c \in \mathbf{N}$ a polynom $P$ s celočíselnými koeficienty rovnici

$$
\tfrac{1}{2}(A(z)^2 + A(z^2)) = P(z) + \frac{c}{1-z}.
$$

Ta je pro $z \to -1^+$ sporná. $A(z^2) \to \infty$, $A(z)^2 \geq 0$ a levá strana jde do nekonečna. Pravá však jde ke konečné limitě $P(-1) + c/2$. $\square$

**11. přednáška 19.5.1999**

## VIII. EXPONENCIÁLNÍ GF

V této přednášce postupujeme volně podle Stanleyho [22]. *Exponenciální GF* posloupnosti $\{a_n\}_{n\geq 0}$ je definována jako mocninná řada

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}.$$

Proč jsou EGF užitečné? Protože se dobře chovají ke kombinatorickým konstrukcím.

Součinová formule. Mějme dva typy struktur, $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, které jsou definovány na množině $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Jejich počty označíme jako $f_n$ a $g_n$. Na $[n]$ definujeme novou strukturu $\mathcal{H}$: vezmeme uspořádanou dvojici množin $(A, B)$, kde $A \cap B = \emptyset$ a $A \cup B = [n]$, na $A$ definujeme $\mathcal{F}$-strukturu a na $B$ (nezávisle na předchozí volbě) $\mathcal{G}$-strukturu. Počet těchto složených struktur označíme jako $h_n$. Nechť

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f_n x^n}{n!},\ G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{g_n x^n}{n!} \quad \text{a} \quad H(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{h_n x^n}{n!}$$

jsou příslušné EGF. Pak platí *součinová formule*

$$H(x) = F(x)G(x).$$

Důkaz není složitý. Zřejmě

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k g_{n-k},$$

protože $\binom{n}{k}$ je počet voleb dvojic $(A, B)$ s $|A| = k$ a $f_k g_{n-k}$ je počet voleb $\mathcal{F}$-struktur a $\mathcal{G}$-struktur pro dané $(A, B)$. Rovnici vydělíme $n!$ a máme

$$[x^n]H = \frac{h_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{k!} \cdot \frac{g_{n-k}}{(n-k)!} = [x^n]FG.$$

Kompoziční formule. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $f_n$ a $g_n$ buďte jako výše. Z $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ opět budujeme složenou strukturu $\mathcal{H}$: vezmeme neuspořádaný rozklad $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ množiny $[n]$, to jest $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ a $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = [n]$, na $\{1, 2, \ldots, k\}$ definujeme $\mathcal{F}$-strukturu a na každé množině $A_i$ definujeme $\mathcal{G}$-strukturu (všechny volby jsou nezávislé). Pomocí $h_n$ opět označíme počet složených struktur. Jsou-li $F(x), G(x)$ a $H(x)$ příslušné EGF, platí *kompoziční formule*

$$H(x) = F(G(x)).$$

Pozor: nyní nutně $G(0) = g_0 = 0$. Důkaz je zase přímočarý. Zřejmě

$$h_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k!} \sum_{\ldots} \binom{n}{m_1\ m_2\ \ldots\ m_k} g_{m_1} g_{m_2} \cdots g_{m_k},$$

kde ve vnitřní sumě sčítáme přes všechny $k$-tice přirozených čísel $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ splňující $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Multinomický koeficient udává počet uspořádaných rozkladů $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ množiny $[n]$ na části s předepsanými mohutnostmi $|A_i| = m_i$. Musíme ho ještě vydělit $k!$, abychom dostali počet neuspořádaných rozkladů. Zbylé členy $f_k$ a $g_{m_1} g_{m_2} \ldots g_{m_k}$ udávají počty voleb $\mathcal{F}$-struktur a $\mathcal{G}$-struktur. Po vydělení $n!$ máme

$$[x^n]H = \frac{h_n}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{k!} \sum_{\ldots} \frac{g_{m_1}}{m_1!} \cdot \ldots \cdot \frac{g_{m_k}}{m_k!} = [x^n]F(G(x)).$$

Bellova čísla. Kolik je všech neuspořádaných rozkladů $[n]$ na neprázdné podmnožiny? Nechť jich je $b_n$. Například $b_3 = 5$:

$$123,\ 1|23,\ 2|13,\ 3|12 \text{ a } 1|2|3.$$

Pro nalezení EGF čísel $b_n$ provedeme triviální kompoziční konstrukci. $\mathcal{F}$-strukturu definujeme jako „být množinou“, EGF pak je $\sum_{n \geq 0} 1x^n/n! = \mathrm{e}^x$ a $\mathcal{G}$-strukturu jako „být neprázdnou množinou“, její EGF je $\sum_{n \geq 1} 1x^n/n! = \mathrm{e}^x - 1$. Složená $\mathcal{H}$-struktura je zjevně strukturou rozkladů na neprázdné části. Podle kompoziční formule mají $b_n$ EGF

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b_n x^n}{n!} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}.$$

Čísla

$$\{b_n\}_{n \geq 1} = \{1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, \ldots\}$$

se nazývají *Bellovými čísly*. Byla pojmenována podle E. T. Bella (1883–1960), který napsal známý soubor medailonů matematiků *Men of Mathematics*. Pod pseudonymem psal též sci-fi novely.

Cayleyho formule. Známý kombinatorický drahokam: počet $t_n$ označených (tj. izomorfismus nebereme v úvahu) stromů na množině $[n]$ se rovná $n^{n-2}$. Nyní se jedná nikoli o zakořeněné rovinné stromy, ale o všechny neorientované stromy. Místo $t_n$ nalezneme počet $z_n$ *zakořeněných stromů*, to jest stromů s jedním vyznačeným vrcholem; jejich strukturu označíme jako $\mathcal{Z}$. To stačí, neboť $z_n = nt_n$. Odvodíme rovnici pro EGF

$$Z(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{z_n x^n}{n!}.$$

Vyhozením kořene se $\mathcal{Z}$-struktura rozpadne znovu na několik $\mathcal{Z}$-struktur (jejich kořeny jsou sousedé zmizelého kořene). Obecná $\mathcal{Z}$-struktura na $[n]$ se tedy dostane následující rekurzivní konstrukcí: nejprve vezmeme uspořádaný rozklad $(A, B)$ množiny $[n]$. Na $A$ zvolíme strukturu „být jednoprvkovou množinou" (jejíž EGF je zjevně $x$) a na $B$ provedeme kompoziční konstrukci s vnější strukturou „být množinou" (EGF je $\mathrm{e}^x$) a vnitřní strukturou rovnou $\mathcal{Z}$ (EGF je $Z(x)$). Podle součinové a kompoziční formule obdržíme rovnici

$$Z(x) = x\mathrm{e}^{Z(x)}.$$

Podle LIF

$$\frac{z_n}{n!} = [x^n]Z(x) = \tfrac{1}{n}[x^{n-1}](\mathrm{e}^x)^n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

a $z_n = n^{n-1}$. Takže $t_n = n^{n-2}$.

2-regulární grafy. Označme $d_n$ počet všech označených 2-regulárních grafů na $[n]$, to jest neorientovaných grafů bez smyček a paralelních hran, jejichž každý vrchol má stupeň 2; izomorfismus nebereme v úvahu (jakou úlohu dostaneme v opačném případě?). Pro kontrolu, $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 = 1$ a $d_4 = 3$. EGF pro $d_n$ získáme pomocí kompoziční formule. Vnější struktura je struktura „být množinou" s EGF $\mathrm{e}^x$ a vnitřní struktura je struktura *souvislých* 2-regulárních grafů čili cyklů. Má EGF

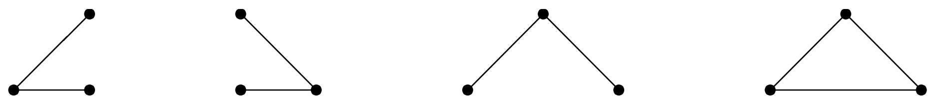
$$G(x) = \sum_{n\geq 3} \frac{(n-1)!}{2} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{1-x} - x - \frac{x^2}{2}\right),$$

neboť z $n!$ permutací $a_1a_2\dots a_n$ množiny $[n]$ jich vždy $2n$ určuje týž cyklus. (Liší-li se jen cyklickým pořadím nebo obrácením.) Dostáváme vzorec

$$\sum_{n\geq 3}\frac{d_n x^n}{n!}=\exp(G(x))=\frac{\mathrm{e}^{-x/2-x^2/4}}{\sqrt{1-x}}.$$

Odtud se dá získat asymptotika. Za DOM CV odtud odvoďte rekurenci pro $d_n$. Použijte logaritmickou derivaci.

Souvislé grafy. Jako $a_n$ označíme počet souvislých označených grafů na množině $[n]$. Například $a_1=a_2=1$ a $a_3=4$:



Čísla $a_n$ neznáme, ale známe počty $b_n$ úplně všech gafů na $[n]$: $b_n=2^{\binom{n}{2}}$. (Odpovídají podmnožinám množiny $\{E : E\subset[n]\ \&\ |E|=2\}$.) Podle kompoziční formule je mezi EGF

$$A(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n x^n}{n!}\quad\text{a}\quad B(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{b_n x^n}{n!}$$

vztah

$$B(x)=\exp(A(x)).$$

Aplikujeme-li na obě strany operátor $x\frac{d}{dx}\log$ (tj. logaritmická derivace násobená $x$), dostaneme vztah

$$xB'=xA'B.$$

Odtud dostáváme po úpravách rekurenci pro $a_n$:

$$a_n=2^{\binom{n}{2}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}ka_k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}.$$

Takže třeba

$$a_4=64-\tfrac{1}{4}(1\cdot 1\cdot 4\cdot 8+2\cdot 1\cdot 6\cdot 2+3\cdot 4\cdot 4\cdot 1)=38.$$

V mateřské školce. Děti, kterých je $n$, se rozdělí do skupinek. V každé z nich se všechny kromě jednoho vezmou za ruce a postaví do kroužku kolem zbylého dítěte. Kroužek se může skládat i jen z jednoho děcka. Kolika způsoby se to dá udělat?

Kroužek s dítětem uprostřed se ze skupinky $i$ dětí dá vytvořit $i(i-2)!$ způsoby (proč?). Pro EGF hledaných počtů $a_n$ dostáváme podle kompoziční formule vzorec

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2}\frac{a_n x^n}{n!} &= \exp\Big(\sum_{i\geq 2}\frac{i(i-2)!}{i!}x^i\Big)\\ &= \exp\Big(\sum_{i\geq 2}\frac{x^i}{i-1}\Big) = \exp(x\log 1/(1-x))\\ &= \left(\frac{1}{1-x}\right)^x.\end{aligned}$$

## 12. přednáška 26.5.1999

Hádanka: čemu se rovná

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}?$$

Každý ví, že $\mathrm{e}^x$. A čemu se rovná

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^x}{n!}?$$

Pro $x \in \mathbf{N}$ se rovná $\mathrm{e}b_x$. Pro Bellova čísla tak platí

$$b_n = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{m\geq 0}\frac{m^n}{m!}.$$

Tuto tzv. Dobinského formuli ponecháme bez důkazu. Lze jej nalézt například v Lovászově cvičebnici [12].

Jiná zajímavá reprezentace $b_n$ pochází od Flajoleta [6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \cfrac{1}{1-x-\cfrac{x^2}{1-2x-\cfrac{2x^2}{1-3x-\cfrac{3x^2}{\cdots}}}}.$$

Ani toto vyjádření GF Bellových čísel řetězovým zlomkem nebudeme dokazovat.

Není však těžké nahlédnout rekurenci ($n > 0$)

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} b_{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k.$$

V rozkladech $[n]$ uvážíme blok $X$ obsahující číslo 1. Množinu $X \backslash \{1\}$ s $|X| = k+1$ můžeme volit $\binom{n-1}{k}$ způsoby a nezávisle na nich $b_{n-1-k}$ způsoby rozklad $\{2, 3, \ldots, n\} \backslash X$.

**Větička.** GF Bellových čísel splňuje vztahy

$$\begin{aligned} B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n &= 1 + \tfrac{x}{1-x} B(\tfrac{x}{1-x}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}. \end{aligned}$$

**Důkaz.** Obě formulace jsou jednoduše ekvivalentní. Sčítanec

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$$

totiž substitucí $x := x/(1-x)$ přejde na $x^k/(1-2x)(1-3x)\cdots(1-(k+1)x)$. Substitucí, vynásobením $x/(1-x)$ a přičtením 1 se proto nekonečný součet nemění a $B(x)$ splňuje funkcionální rovnici. Na druhou stranu jejím iterováním dostáváme pro $B(x)$ náš nekonečný součet.

**1. Důkaz pomocí GF.** Využijeme poslední rekurenci a binomickou větu pro záporný celočíselný exponent.

$$\begin{aligned} B(x) - 1 = \sum_{n \geq 1} b_n x^n &= \sum_{n \geq 1} x^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k \\ &= \sum_{k \geq 0} b_k \sum_{n > k} \binom{n-1}{k} x^n \\ &= \sum_{k \geq 0} b_k x^{k+1} \sum_{n > k} \binom{n-1}{n-k-1} x^{n-k-1} \\ &= \sum_{k \geq 0} b_k x^{k+1} \sum_{m \geq 0} \binom{k+1+m-1}{m} x^m \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\geq 0} b_k x^{k+1}(1-x)^{-k-1} \\
&= \frac{x}{1-x}\sum_{k\geq 0} b_k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\
&= \tfrac{x}{1-x}B(\tfrac{x}{1-x}).
\end{aligned}
$$

**2. Bijektivní důkaz.** Písmenem $\mathcal{N}$ označíme množinu všech *normálních* slov, to jest konečných slov $u$ nad abecedou $\mathbf{N}=\{1,2,\ldots\}$, která mají tyto dvě vlastnosti : (i) v $u$ jsou použita právě čísla $1,2,\ldots,n$ pro nějaké $n\in\mathbf{N}$ a (ii) pro každá dvě čísla $1\leq i<j\leq n$ první výskyt $i$ v $u$ předchází první výskyt $j$. (Normální slova by nám měla být povědomá z přednášky o Schröderových číslech.) Množina všech rozkladů $[l]$, kde $l$ probíhá $\mathbf{N}$, je zjevně v bijekci s $\mathcal{N}$. Normální slovo $u=a_1a_2\ldots a_l$ kóduje rozklad $[l]/\sim$, kde relace ekvivalence $\sim$ je dána vztahem $i\sim j\Leftrightarrow a_i=a_j$, a každý rozklad $[l]$ je kódován právě jedním normálním slovem délky $l$. Proto, označuje-li $|u|$ délku $u$, platí

$$B(x)=\sum_{n\geq 0} b_n x^n=\sum_{u\in\mathcal{N}} x^{|u|}.$$

Je-li $u=a_1a_2\ldots a_l$ normální slovo, *nafouknutím* $u$ rozumíme každé slovo tvaru

$$00\ldots 0a_1 0\ldots 0a_2 0\ldots 0a_3\ldots a_l 0\ldots 0,$$

kde první úsek nul před $a_1$ obsahuje alespoň jednu nulu a ostatní úseky nul mohou být i prázdné. Slova, která takto z $u$ vzniknou, počítá podle délek GF

$$\frac{x}{1-x}\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^l\cdot x^l.$$

Pro množinu $\mathcal{N}'$ všech nafouknutí všech slov $u\in\mathcal{N}$ tak platí

$$\sum_{u\in\mathcal{N}'} x^{|u|}=\frac{x}{1-x}\sum_{u\in\mathcal{N}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{|u|}=\tfrac{x}{1-x}B(\tfrac{x}{1-x}).$$

Na druhou stranu se ale nafouknutím vlastně skoro nic nezměnilo,

$$\sum_{u\in\mathcal{N}'} x^{|u|}=\sum_{u\in\mathcal{N}} x^{|u|}-1=B(x)-1,$$

protože $\mathcal{N}'$ se skládá z neprázdných normálních slov nad abecedou $\{0,1,2,\ldots\}$. Takže $B(x)-1=\frac{x}{1-x}B(\frac{x}{1-x})$. □

Nechť $S(n,k)$ označuje počet rozkladů $[n]$ na právě $k$ neprázdných bloků. Číslům $S(n,k)$ se říká *Stirlingova čísla druhého druhu.* (Stirlingova čísla prvního druhu střídají znaménko a počítají permutace $[n]$ s daným počtem cyklů.)

**Pozorování.**

$$\sum_{n\geq 0} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

**Důkaz.** Plyne po chvilce zamyšlení nad strukturou normálních slov. $S(n,k)$ je právě počet $u \in \mathcal{N}$ délky $n$ s $k$ symboly. Takové $u$ se dá rozložit na

$$u = 1u_1 2u_2 \ldots ku_k,$$

kde $u_i$ je slovo (i prázdné a ne nutně normální) nad abecedou $\{1,2,\ldots,i\}$. Slova $u_i$ můžeme takto volit libovolně a nezávisle na sobě. Počet $u_i$ délky $l$ je $i^l$. Podle délek je počítá GF

$$\frac{1}{1-ix}.$$

Normální slova s $k$ symboly tak podle délek počítá GF

$$x^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-ix} = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

□

Formule vyjadřující $B(x)$ nekonečným součtem tak pouze zachycuje rozdělení třídy všech rozkladů na podtřídy podle počtu bloků.

Přestože má $B(x)$ nulový poloměr konvergence a je pouze mocninnou řadou, leckdy se hodí. Ukážeme si dvě její použití.

Řídké rozklady. *Řídkými* rozklady $[n]$ rozumíme rozklady, v nichž žádná dvě po sobě jdoucí čísla $i, i+1$ neleží ve stejném bloku. Jejich počet označíme $r_n$. Například $r_4 = 5$:

$$1|2|3|4,\ 13|24,\ 1|3|24,\ 13|2|4 \text{ a } 14|2|3.$$

Následující výsledek (i zesílení, které neuvádíme) dokázal Yang [29].

**Větička.** Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $r_n = b_{n-1}$.

**Důkaz.** Uvažme množinu $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}$ normálních slov kódujících řídké rozklady. Normální slovo $u$ padne do $\mathcal{R}$, právě když v něm není žádné bezprostřední opakování. *Nadutím* $u = a_1 a_2 \dots a_l \in \mathcal{R}$ rozumíme každé slovo tvaru

$$a_1 a_1 \dots a_1 a_2 a_2 \dots a_2 \dots a_l a_l \dots a_l,$$

kde $a_i a_i \dots a_i$ je libovolné slovo nad $\{a_i\}$ délky alespoň jedna. Množina všech nadutí všech $u \in \mathcal{R}$ je právě $\mathcal{N}$. Slova vzniklá nadutím pevného $u \in \mathcal{R}$ délky $l$ jsou podle délek počítána GF

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^l.$$

Takže

$$B(x) = \sum_{u \in \mathcal{N}} x^{|u|} = \sum_{u \in \mathcal{R}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{|u|} = \sum_{n \geq 0} r_n \left(\frac{x}{1-x}\right)^n.$$

Označíme-li GF čísel $r_n$ jako $R(x)$, dostáváme odtud s pomocí identity pro $B(x)$ vztah

$$1 + \tfrac{x}{1-x} B(\tfrac{x}{1-x}) = B(x) = R(\tfrac{x}{1-x}).$$

Substitucí $x := x/(1+x))$ ho převedeme na $1 + xB(x) = R(x)$. Opravdu $r_n = b_{n-1}$. $\square$

Periodičnost zbytků Bellových čísel. V první přednášce jsme prozkoumali paritu Catalanových čísel a zjistili jsme, že jejich zbytky modulo 2 netvoří periodickou posloupnost. (Periodickou posloupností rozumíme posloupnost, v níž se od jistého členu opakuje jeden konečný úsek.) Bellova čísla se na rozdíl od Catalanových chovají v tomto ohledu spořádaně.

**Tvrzení.** Pro každé $m \in \mathbf{N}$ je posloupnost $\{b_n \bmod m\}_{n \geq 0}$ periodická.

**Důkaz.** Pro $m \in \mathbf{N}$ a mocninné řady $S, T \in \mathbf{Z}[[x]]$ pomocí $S \equiv T \bmod m$ označíme kongruenci po koeficientech, to jest $[x^n]S \equiv [x^n]T \bmod m$ pro každé $n \in \mathbf{N}_0$. Je očividné, že z $S_1 \equiv T_1$ a $S_2 \equiv T_2$ plyne $S_1 S_2 \equiv T_1 T_2$ a $S_1 + S_2 \equiv T_1 + T_2$. Takže (kongruence jsou vždy modulo $m$) se $B(x)$ rovná

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$$
$$\equiv \sum_{l=0}^{m-1} \frac{x^l}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-lx)} \sum_{r \geq 0} \left(\frac{x^m}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)}\right)^r$$

$$= \quad \frac{1}{1-x^m/Q(x)} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{Q_l(x)},$$

kde $Q_l(x) = (1-x)(1-2x)\cdots(1-lx)$ a $Q(x) = (1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)$. Celkově

$$B(x) \equiv \frac{S(x)}{T(x)},$$

kde $S(x), T(x) \in \mathbf{Z}[x]$ a $T(0) = 1$. Existuje tedy posloupnost celých čísel $\{v_n\}_{n\geq 0}$ taková, že $b_n \equiv v_n$ a $\{v_n\}_{n\geq 0}$ má racionální GF $\frac{S(x)}{T(x)}$. Nechť $T(x) = t_k x^k + t_{k-1}x^{k-1} + \cdots + 1$, $t_i \in \mathbf{Z}$. Ze vztahu

$$T(x) \sum_{n\geq 0} v_n x^n = S(x)$$

plyne pro $n > \deg S(x)$ rekurence

$$v_n + t_1 v_{n-1} + \cdots + t_k v_{n-k} = 0.$$

Čísla $v_n$ splňují lineární rekurenci s konstantními koeficienty a posloupnost jejich zbytků modulo $m$ (vlastně modulo jakékoli číslo) je nutně periodická (proč přesně?). Díky $b_n \equiv v_n$ totéž platí i pro Bellova čísla. □

# Reference


[1] D. André, Solution directe de problème résolu par M. Bertrand, *C. R. Acad. Sci. Paris* **105** (1887), 436–437.

[2] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, 1974.

[3] Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, `http://dmtcs.loria.fr/`

[4] R. Donaghey and L.W. Shapiro, Motzkin numbers, *Journal of Combinatorial Theory A* **23** (1977), 291–301.

[5] The Elektronic Journal of Combinatorics, `http://www.combinatorics.org/ejc-wce.html`

[6] P. Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Mathematics* **32** (1980), 125–161.

[7] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[8] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász (eds.), *Handbook of Combinatorics*, Elsevier, Amsterdam, 1995.

[9] M. Klazar, Twelve countings with rooted plane trees, *European Journal of Combinatorics* **18** (1997), 195–210.

[10] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volumes 1–3*, Addison-Wesley, Reading, 1997, 1998, 1998. [Poslední vydání.]

[11] J. Levine, Note on the number of pairs of non-intersecting routes, *Scripta Mathematica* **24** (1959), 335–338.

[12] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, North Holland, Amsterdam, 1993. [Poslední vydání.]

[13] Th. Motzkin, Relations between hypersurfaces cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for a permanent preponderance and for nonassociative products, *Bulletin American Mathematical Society* **54** (1948), 352–360.

[14] D. J. Newman, *Analytic Number Theory*, Springer Verlag, New York, 1998.

[15] G. Pólya, On the number of certain lattice polygons, *Journal of Combinatorial Theory* **6** (1969), 102–105.

[16] A. Rényi, *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1972.

[17] D. Rubenstein, Catalan numbers revisited, *Journal of Combinatorial Theory A* **68** (1994), 486–490.

[18] J. M. Ruiz, *The Basic Theory of Power Series*, Friedr. Viewegh & Sohn, Braunschweig, 1993.

[19] E. Schröder, Vier combinatorische Probleme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **15** (1870), 361–376.

[20] N. J. A. Sloane, *A Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, New York and London, 1973.

[21] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 1*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey CA, 1986.

[22] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 2*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1999.

[23] G. Tenenbaum, *Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1995.

[24] P. Valtr, Probability that $n$ random points are in a convex position, *Discrete and Computational Geometry* **13** (1995), 637–643.

[25] P. Valtr, Catalan numbers via random planar point sets, 441–443. In: I. Bárány (ed.), *Intuitive Geometry*, Bolyai Society Mathematical Studies 6 (1997).

[26] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1992.

[27] H. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, San Diego CA, 1994.

[28] W.-J. Woan, L. Shapiro and D. G. Rogers, The Catalan numbers, the Lebesgue integral, and $4^{n-2}$, *American Mathematical Monthly* **104** (1997), 926–931.

[29] W. Yang, Bell numbers and $k$-trees, *Discrete Mathematics* **156** (1996), 247–252.