Učební text k přednášce Matematická analýza II (MAI055)

Martin Klazar

20. června 2007

Přednáška pokrývá v letním semestru následující látku:

1. Riemannův integrál.

2. Posloupnosti a řady funkcí, mocninné řady a Fourierovy řady.

3. Metrické prostory.

1 Riemannův integrál

Výpočet plochy a dvě základní věty analýzy. V první kapitole přednášky se seznámíme se základy integrálu, který vymyslel Bernhard Riemann (1826–1866). Integrály slouží k počítání ploch, objemů, energie a práce a dalších fyzikálních veličin, pro odhadování konečných i nekonečných součtů, definují se pomocí nich nové funkce s pozoruhodnými vlastnostmi atd.

- Už v antice, ale jistě i dříve, lidé uměli počítat plochy i objemy. Například Archimedes se proslavil výpočtem plochy parabolické úseče.

- Ale až kolem roku 1670 Newton a Leibniz nezávisle na sobě objevili úzkou souvislost mezi plochou a derivací.

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a,b]$ nezáporná a spojitá (to teď předpokládáme pro jednoduchost, aby se dal namalovat hezký obrázek; později uvidíme, že po f stačí požadovat méně). Uvažme rovinný útvar

$$U(a,b,f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

—je to část roviny ležící mezi intervalem $[a,b]$ na ose x a grafem funkce f.

Zde bude časem obrázek.

Plochu útvaru $U(a,b,f)$ (ať je to cokoli) označíme jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \ \text{ nebo stručněji jako } \int_a^b f.$$

Funkce f je *integrand*, x je *integrační proměnná* (může být označená libovolně, třeba $t, y, \ldots$). Je to tzv. *Riemannův integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$. Jeho přesnou definici podáme za chvíli.

Uvedeme dva hlavní výsledky spojující integrál s derivací, ke kterým budeme směřovat. Uvažme funkci

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt} = \text{plocha}(U(a,x,f)).$$

První základní věta analýzy říká, zhruba řečeno, že $F'(x) = f(x)$ na $[a,b]$, to jest

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}\right)' = f(x).$$

Podle *Druhé základní věty analýzy* pro každou funkci g, která je na $[a,b]$ primitivní k f (čili $g'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$) platí

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

V dalších přednáškách dokážeme přesné verze obou vět.

Jaké jsou aplikace integrálu? Můžeme pomocí něj (pomocí 1. ZVA) vyrábět primitivní funkce. Ukážeme například, že každá funkce spojitá na intervalu na něm má primitivní funkci. Dále, pomocí 2. ZVA, když známe primitivní funkci (a spoustu jich už ze ZS známe), můžeme počítat plochy rovinných útvarů (jakož i spoustu dalších matematických i fyzikálních veličin). Například plocha útvaru $U(0,1,x^2)$ neboli

Zde bude časem obrázek

je podle 2. ZVA rovna $\frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$, protože $(\frac{1}{3}x^3)' = x^2$.

Ale co to tedy je ta plocha? Riemann navrhl rozdělit útvar $U(a,b,f)$ na úzké pásky $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ s přibližně obdélníkovým tvarem (horní okraj pásku není typicky rovný, ale je zakřivený podle grafu funkce f). Součet ploch pásků je plocha útvaru $U(a,b,f)$. Plochu pásku P_i navrhl aproximovat plochou obdélníku, jehož šířka je rovna šířce P_i a výška je rovna výšce některého z bodů ležícího na horním okraji pásku.

Zde bude časem obrázek

Riemann tedy navrhl approximovat plochu útvaru $U(a,b,f)$ součtem ploch těchto obdélníků:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \doteq \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)f(c_i),$$

kde $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ a $c_i \in [a_i, a_{i+1}]$. Označíme-li jako λ největší šířku obdélníka, to jest $\lambda = \max_{0\le i\le k-1}(a_{i+1} - a_i)$, dostaneme podle Riemanna plochu útvaru $U(a,b,f)$ přesně jako limitu těchto součtů pro λ jdoucí k nule,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)f(c_i).$$

Trochu jiný přístup k integrálu navrhl v r. 1875 Gaston Darboux (1842–1917). Navrhl odhadnout plochu pásku P_i zdola a shora pomocí ploch dvou obdélníků s šířkou rovnou šířce pásku P_i a s výškou rovnou největšímu dolnímu a nejmenšímu hornímu odhadu výšek bodů ležících na horním okraji pásku. Tyto obdélníky mají výšky

$$m_i := \inf_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x) \ \text{ a } \ M_i := \sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} f(x).$$

Protože první z nich je celý obsažen v P_i a druhý obsahuje celý pásek P_i, určitě (ať je plocha pásku P_i cokoli) platí

$$m_i(a_{i+1} - a_i) \le \mathrm{plocha}(P_i) \le M_i(a_{i+1} - a_i).$$

Sečtením dostaneme horní a dolní odhad plochy celého útvaru $U(a,b,f)$:

$$\sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)m_i \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \le \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)M_i.$$

To je výhoda Darbouxovy definice ve srovnání s Riemannovou—pro plochu dostáváme vždy dolní a horní odhad, kdežto Riemannovy sumy ji jen nějak aproximují. Pokud pro $\lambda \to 0$ oba odhady splynou, definujeme $\int_a^b f$ jako jejich společnou hodnotu. Později dokážeme, že obě definice, Riemannova i Darbouxova, vedou ke stejnému pojmu integrálu a dávají pro něj tutéž hodnotu.

Nyní uvedeme přesné definice. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ jsou dvě reálná čísla a $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce (nemusí být ani spojitá ani omezená). Konečná $k+1$-tice bodů $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ z intervalu $[a,b]$ je jeho *dělením*, pokud

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b.$$

Tyto body dělí interval $[a,b]$ na intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$. Délku intervalu označíme pomocí absolutní hodnoty, takže $|I_i| = a_{i+1} - a_i$ a $|[a,b]| = b - a$. Je jasné, že

$$\sum_{i=0}^{k-1} |I_i| = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) = b - a = |[a,b]|.$$

Normou dělení λ rozumíme největší délku intervalů dělení:

$$\lambda = \lambda(D) = \max_{0 \le i \le k-1} |I_i|.$$

Dělením intervalu $[a,b]$ *s body* rozumíme dvojici (D, C), kde $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení tohoto intervalu a k-tice $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{k-1})$ se skládá z nějakých bodů $c_i \in I_i$ (tj. $a_i \le c_i \le a_{i+1}$). *Riemannovu sumu* odpovídající funkci f a dělení s body (D, C) definujeme jako

$$R(f, D, C) := \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| f(c_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) f(c_i).$$

První definice Riemannova integrálu (Riemannova). Řekneme, že funkce $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a,b]$ *Riemannův integrál* $I \in \mathbb{R}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení intervalu $[a,b]$ s body (D, C) platí, že

$$\lambda(D) < \delta \Rightarrow |I - R(f, D, C)| < \varepsilon.$$

Požadujeme tedy $I \in \mathbb{R}$, nevlastní hodnoty $\pm\infty$ nejsou povoleny (později ale zavedeme i nevlastní integrály, podobně jako nevlastní limity). Pokud takové číslo I existuje, píšeme

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f$$

a řekneme, že f je *riemannovsky integrovatelná* na intervalu $[a, b]$. Budeme pracovat s třídou všech riemannovsky integrovatelných funkcí

$$\mathcal{R}[a, b] := \{f :\ f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [a, b]\}.$$

První definici Riemannova integrálu tedy můžeme shrnout vzorcem

$$\int_a^b f = \lim_{\lambda(D)\to 0} R(f, D, C) \in \mathbb{R}.$$

Pro druhou definici integrálu budeme potřebovat pár dalších pojmů. Pro funkci $f :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní Riemannovu sumu* (budeme jim tak říkat, i když by se měly jmenovat po Darbouxovi) jako

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \quad \text{respektive} \quad S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i.$$

Připomínáme, že

$$m_i = \inf_{x\in I_i} f(x) \ \text{ a } \ M_i = \sup_{x\in I_i} f(x), \quad \text{kde} \quad I_i = [a_i, a_{i+1}].$$

Tyto součty jsou vždy definované, $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Dolní*, respektive *horní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme jako

$$\int_{\underline{a}}^b f(x)\,\mathrm{dx} := \sup(\{s(f, D) :\ D \text{ je dělení } [a, b]\})$$

a

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{dx} := \inf(\{S(f, D) :\ D \text{ je dělení } [a, b]\}).$$

Jsou opět vždy definované, pro každou funkci f máme $\underline{\int_a^b} f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a $\overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Druhá definice Riemannova integrálu (Darbouxova). Řekneme, že funkce $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ má na intervalu $[a, b]$ *Riemannův integrál*, pokud

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{dx} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{dx} \in \mathbb{R}.$$

Tuto společnou hodnotu, když existuje, značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f$$

a nazýváme *Riemannovým integrálem* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Za chvíli dokážeme, že vždy

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Dokážeme také, že obě definice jsou ekvivalentní (dávají stejné třídy riemannovsky integrovatelných funkcí) a dávají stejnou hodnotu Riemannova integrálu.

Tvrzení 1.1 (neomezené funkce nejsou integrovatelné)
Když funkce $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ není omezená, potom nemá na $[a, b]$ Riemannův integrál (ani podle jedné definice).

Důkaz.

Cvičení 1

□

Když $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ a $D' = (b_0, b_1, \ldots, b_l)$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a $D \subset D'$, to jest pro každé $i = 0, 1, \ldots, k$ existuje j, že $a_i = b_j$, řekneme, že *D' je zjemnění D* nebo že *D' zjemňuje D*.

Tvrzení 1.2 (nerovnosti pro $s(f, D)$ a $S(f, D)$)
Nechť $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce, D' a D jsou dělení intervalu $[a, b]$, $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ a $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

1. *Když D' zjemňuje D, pak $s(f,D) \le s(f,D')$ a $S(f,D) \ge S(f,D')$.*

2. *Platí nerovnost $s(f,D) \le S(f,D')$ (každá dolní suma je menší nebo rovna každé horní sumě).*

3. *Platí nerovnost*

$$m(b-a) \le s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f,D') \le M(b-a).$$

Důkaz. 1. Nechť $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ a $D' = (b_0, b_1, \dots, b_l)$ jsou dvě dělení $[a,b]$, přičemž D' zjemňuje D. Existuje tedy posloupnost $j_0 = 0 < j_1 < j_2 < \dots < j_k = l$ taková, že $a_0 = b_{j_0}$ $(= b_0 = a)$, $a_1 = b_{j_1}, \dots, a_k = b_{j_k}$ $(= b_l = b)$. Každý interval $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ dělení D je rozdělen body dělení D' na intervaly

$$J_{i,r} = [b_{j_i+r}, b_{j_i+r+1}],\ r = 0, 1, \dots, j_{i+1} - j_i - 1.$$

Intervaly $J_{i,r}$ vyčerpávají všechny intervaly $J_j = [b_j, b_{j+1}]$ dělení D'. Patrně

$$|I_i| = |J_{i,0}| + |J_{i,1}| + \dots + |J_{i,j_{i+1}-j_i-1}|.$$

Dokážeme první nerovnost $s(f,D) \le s(f,D')$, druhá se dokazuje podobně. Máme

$$\inf_{x\in I_i} f(x) \le \inf_{x\in J_{i,r}} f(x),\ r = 0, 1, \dots, j_{i+1} - 1,$$

protože $J_{i,r} \subset I_i$ a po zmenšení množiny se její infimum nezmění nebo vzroste. Proto

$$\begin{aligned}
s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{x\in I_i} f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{r=0}^{j_{i+1}-j_i-1} |J_{i,r}| \right) \inf_{x\in I_i} f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{j_{i+1}-j_i-1} |J_{i,r}| \inf_{x\in I_i} f(x) \\
&\le \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{j_{i+1}-j_i-1} |J_{i,r}| \inf_{x\in J_{i,r}} f(x) \\
&= s(f,D').
\end{aligned}$$

2. D a D' buďte dvě libovolná dělení intervalu $[a,b]$. Jejich sjednocení $E = D \cup D'$ (body obou dělení sjednotíme dohromady a uspořádáme podle

velikosti) je zjemněním jak D tak D'. Podle první části a triviální nerovnosti $s(f,E) \le S(f,E)$ máme

$$s(f,D) \le s(f,E) \le S(f,E) \le S(f,D'),$$

takže $s(f,D) \le S(f,D')$.

3. První a pátá nerovnost jsou zvláštní případy nerovnosti v první části (pro zjemnění dělení sestávajícího se pouze z intervalu $[a,b]$). Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního integrálu. Třetí, nejzajímavější nerovnost plyne z nerovnosti v druhé části—dolní integrál je supremum množiny čísel, jejíž každý prvek je menší nebo roven každému číslu z druhé množiny, jejímž infimem je horní integrál. □

Příklad 1. Spočteme podle Darbouxovy definice plochu útvaru $U(0,1,x)$, tj. plochu trojúhelníka

Zde bude časem obrázek.

to jest integrál $\int_0^1 x\,\mathrm{dx}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ vezmeme dělení intervalu $[0,1]$ rovné $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, , \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Pak

$$\begin{aligned} s(f,D_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} |I_i| \inf_{x \in I_i} x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ S(f,D_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} |I_i| \sup_{x \in I_i} x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{i+1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

protože $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$. Pro $n \to \infty$ dolní i horní suma jdou k $1/2$, takže podle části 3 posledního tvrzení máme

$$\int_0^1 x\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 2. *Dirichletova funkce* definovaná na $\mathbb{R}$ jako $f(x) = 0$ pro iracionální x a $f(x) = 1$ pro racionální x nemá na $[0,1]$ Riemannův integrál, protože

$$\int_{\underline{0}}^{1} f = 0 \quad \text{a} \quad \int_{0}^{\overline{1}} f = 1.$$

Platí totiž $s(f,D) = 0$ a $S(f,D) = 1$ pro každé dělení D intervalu $[0,1]$. *Riemannova funkce* definovaná na $\mathbb{R}$ jako $f(x) = 0$ pro iracionální x a $f(m/n) = 1/n$ pro zlomek m/n v základním tvaru má na $[0,1]$ ze stejného důvodu dolní integrál rovný nule,

$$\underline{\int_0^1} f = 0.$$

A co horní integrál? S trochou šikovnosti se pro každé $\varepsilon > 0$ dá nalézt dělení D intervalu $[0,1]$ takové, že $S(f,D) < \varepsilon$. (Rozmyslete si jak.) Takže

$$\int_0^{\overline{1}} f = 0 \ \text{ a celkem } \ \int_0^1 f = 0.$$

Cvičení 2
Spočítejte horní a dolní integrál na $[0,1]$ pro funkci definovanou jako $f(x) = 1/x$ pro $x \in (0,1]$ a $f(0) = 0$.

Cvičení 3
Nechť se hodnoty funkcí $f, g :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ liší jen v konečně mnoha bodech. Dokažte, že pak

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff g \in \mathcal{R}[a,b] \ \text{ a } \int_a^b f = \int_a^b g \ \text{ (existují-li).}$$

Následující nerovnost ukazuje, že pro pevné dělení D a omezenou funkci f každé dostatečně jemné dělení D' dává skoro stejně dobrou (tj. jen o málo menší) dolní sumu jako D a podobně pro horní sumy.

Tvrzení 1.3 (rafinovaná nerovnost pro $s(f,D)$ a $S(f,D)$)
Nechť je funkce $f :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená, $|f(x)| < c$ pro každé $x \in [a,b]$ pro nějakou konstantu $c > 0$. Nechť D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$, přičemž $|D| = k+1$, tj. D má k intervalků, a $\lambda(D') < \delta$. Pak

$$s(f,D') \ge s(f,D) - 3kc\delta \ \text{ a } \ S(f,D') \le S(f,D) + 3kc\delta.$$

Důkaz. Dokážeme jen první nerovnost, důkaz druhé je podobný. Na dělení intervalu $[a,b]$ se teď budeme dívat jako na množiny jejich intervalků a D' si vyjádříme jako

$$\begin{aligned} D' &= \{I' \in D' :\ I' \subset J \text{ pro nějaký } J \in D\} \cup \{\text{zbylé intervaly } D'\} \\ &= E \cup F. \end{aligned}$$

Všimněte si, že v F je méně než k intervalů, protože každý $I' \in F$ ve svém vnitřku obsahuje některý krajní bod některého intervalu $J \in D$, tyto body jsou pro různé intervaly $I' \in F$ různé a není mezi nimi ani a ani b. Máme

$$s(f, D') = \sum_{I' \in D'} |I'| \inf_{I'} f = \sum_{I' \in E} |I'| \inf_{I'} f + \sum_{I' \in F} |I'| \inf_{I'} f.$$

První sumu rozdělíme na podsumy podle intervalů J:

$$\sum_{I' \in E} |I'| \inf_{I'} f = \sum_{J \in D} \sum_{\substack{I' \in D' \\ I' \subset J}} |I'| \inf_{I'} f.$$

Jak víme, $\inf_{I'} f \geq \inf_J f$ pro $I' \subset J$. Takže první suma splňuje

$$\sum_{I' \in E} |I'| \inf_{I'} f \geq \sum_{J \in D} \inf_J f \sum_{\substack{I' \in D' \\ I' \subset J}} |I'| \geq \sum_{J \in D} \inf_J f(|J| - 2\delta),$$

protože pro pevný interval $J \in D$ intervaly $I' \in D'$ v něm obsažené pokrývají celý J až snad na počáteční a koncový úsek o délce méně než δ (v úseku s délkou δ a více by už musel být obsažen nějaký $I' \in D'$). První suma je tedy veliká alespoň jako

$$\sum_{J \in D} |J| \inf_J f - 2\delta \sum_{J \in D} \inf_J f \geq s(f, D) - 2k\delta c,$$

protože poslední suma má k sčítanců a $|\inf_J f| \leq \sup_J |f| \leq c$. Druhá suma přes F má méně než k sčítanců, $|I'| < \delta$ pro každý $I' \in D'$ a $|\inf_{I'} f| \leq \sup_{I'} |f| \leq c$, tudíž je malá:

$$\left| \sum_{I' \in F} |I'| \inf_{I'} f \right| \leq \sum_{F} |I'| \cdot |\inf_{I'} f| < k\delta c.$$

Celkem

$$s(f, D') = \sum_{I' \in E} \cdots + \sum_{I' \in F} \cdots \geq s(f, D) - 2k\delta c - k\delta c = s(f, D) - 3k\delta c.$$

□

Věta 1.4 (kritéria integrovatelnosti)
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak*

1. *$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D:\ 0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.*

2. *$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \delta$ platí $0 \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$.*

Důkaz. 1. Implikace $\Leftarrow$. Pro $\varepsilon > 0$ vezmeme dělení D takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Z definice dolního a horního integrálu dostáváme nerovnost.

$$\int_a^{\overline{b}} f - \int_{\underline{a}}^b f \leq S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

To platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tak

$$\int_a^{\overline{b}} f - \int_{\underline{a}}^b f \leq 0, \text{ tedy } \int_a^{\overline{b}} f \leq \int_{\underline{a}}^b f.$$

Z části 3 Tvrzení 1.2 víme, že současně platí opačná nerovnost. Dolní a horní integrál si jsou rovny a $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\int_a^{\overline{b}} f = \int_{\underline{a}}^b f = I$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice dolního a horního integrálu jako infima, respektive suprema, nalezneme dvě dělení D_1 a D_2 taková, že

$$I - \varepsilon < s(f,D_1) \leq I \leq S(f,D_2) < I + \varepsilon.$$

Pro jejich společné zjemnění $E = D_1 \cup D_2$ podle části 1 Tvrzení 1.2 platí $s(f,D_1) \leq s(f,E) \leq S(f,E) \leq S(f,D_2)$. Takže

$$0 \leq S(f,E) - s(f,E) \leq S(f,D_2) - s(f,D_1) < 2\varepsilon.$$

2. Implikace $\Leftarrow$ platí podle první části, protože tato silnější podmínka implikuje splnění podmínky v první části, a tak $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Bud dáno $\varepsilon > 0$. Podle první části existuje dělení D takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon/2$. Počet intervalků v D označíme k. Protože $f \in \mathcal{R}[a,b]$, je funkce f omezená (Tvrzení 1.1) a $|f(x)| < c$ pro každé $x \in [a,b]$ pro nějakou konstantu $c > 0$. Zvolíme $\delta > 0$ tak malé, že $6k\delta c < \varepsilon/2$. Nechť D' je libovolné dělení s $\lambda(D') < \delta$. Podle Tvrzení 1.3 máme

$$\begin{aligned} S(f,D') - s(f,D') &\leq S(f,D) + 3k\delta c - (s(f,D) - 3k\delta c) \\ &= S(f,D) - s(f,D) + 6k\delta c \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $S(f, D') - s(f, D') < \varepsilon$. $\square$

Nyní dokážeme ekvivalenci obou definic Riemannova integrálu. Připomeňme si jednoduché nerovnosti

$$s(f, D) \leq R(f, D, C) \leq S(f, D)$$

a rovnosti

$$s(f, D) = \inf_C R(f, D, C), \ S(f, D) = \sup_C R(f, D, C).$$

Věta 1.5 (ekvivalence Riemannovy a Darbouxovy definice)
Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní a dávají pro něj tutéž hodnotu.

Důkaz. Buď dána funkce $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Nechť

$$\int_a^b f = I \in \mathbb{R} \text{ podle druhé definice, tedy } I = \int_a^{\overline{b}} f = \int_{\underline{a}}^b f.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme pro něj $\delta > 0$ zajištěné podle části 2 předchozí věty. Každé dělení D s $\lambda(D) < \delta$ pak splňuje $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Dále máme

$$s(f, D) \leq I \leq S(f, D) \text{ a } s(f, D) \leq R(f, D, C) \leq S(f, D).$$

Tudíž

$$|I - R(f, D, C)| < \varepsilon.$$

Takže

$$\int_a^b f = I \ \text{ i podle první definice.}$$

Nechť

$$\int_a^b f = I \in \mathbb{R} \text{ podle první definice, tedy}$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (D, C): \ \lambda(D) < \delta \Rightarrow |I - R(f, D, C)| < \varepsilon.$$

Pro dané $\varepsilon/2 > 0$ nyní vezmeme odpovídající $\delta > 0$ a libovolné dělení D s $\lambda(D) < \delta$. Protože $s(f, D) = \inf_C R(f, D, C)$ a podobně pro horní součet, máme

$$\begin{aligned} |I - s(f, D)| &= |I - \inf_C R(f, D, C)| \leq \varepsilon/2 \\ |I - S(f, D)| &= |I - \sup_C R(f, D, C)| \leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$S(f,D) - s(f,D) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To platí pro každé $\varepsilon > 0$. Podle Věty 1.4 (část 1 nebo 2) máme $f \in \mathcal{R}[a,b]$ podle druhé definice. Z posledních nerovností dále plyne, že $\sup_D s(f,D) = \inf_D s(f,D) = I$. Takže $I = \int_a^b f$ i podle druhé definice. □

Výhodou druhé definice Riemannova integrálu pomocí dolních a horních sum je její praktičnost, dobře se s ní pracuje. Nevýhodou je, že pro zavedení čísel m_i a M_i, což jsou infima a suprema funkčních hodnot na intervalcích I_i, potřebujeme lineární uspořádání na oboru hodnot funkce. Chceme-li integrovat funkce s hodnotami v množinách bez lineárního uspořádání, jako jsou $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}^n$, přestává druhá definice fungovat. Zde má výhodu první definice Riemannova integrálu, která lineární uspořádání nepotřebuje. (Pro $\mathbb{C}$ či $\mathbb{R}^n$ si můžeme pomoci tím, že obě množiny tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s konečnou dimenzí, v případě $\mathbb{C}$ rovnou dvěma. I pro tyto obory hodnot funkce pak můžeme počítat integrál podle druhé definice rozkladem na složky, např. funkci $f:\ [a,b] \to \mathbb{C}$ rozložíme na $f = f_1 + if_2$, kde $f_1, f_2:\ [a,b] \to \mathbb{R}$, a integrál $\int_a^b f$ počítáme jako $\int_a^b f_1 + i\int_a^b f_2$.)

Věta 1.6 (monotonie ⇒ integrovatelnost)
Když je funkce $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní (je nerostoucí nebo neklesající), potom je na $[a,b]$ riemannovsky integrovatelná.

Důkaz. Předpokládejme, že $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající, pro nerostoucí f se postupuje podobně. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme δ tak, že $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ (pokud $f(b) = f(a)$, tj. f je konstantní, vezmeme $\delta > 0$ libovolně), a vezmeme libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \delta$. Potom

$$\begin{aligned}
S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)(f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&< \delta\sum_{i=0}^{k-1}(f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\
&= \delta(f(a_k) - f(a_0)) = \delta(f(b) - f(a)) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Podle Věty 1.4 tedy $f \in \mathcal{R}[a,b]$. □

Dokážeme, že také spojitost f je postačující podmínkou pro integrovatelnost.

Věta 1.7 (spojitost ⇒ integrovatelnost)
Když je funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, potom je na $[a,b]$ riemannovsky integrovatelná.

Pro důkaz budeme potřebovat pojem stejnoměrné spojitosti. Jak víme, $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J, když

$$\forall x \in J\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ x' \in J, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Řekneme, že $f : J \to \mathbb{R}$ (J je interval nebo i libovolná množina reálných čísel) je na J *stejnoměrně spojitá*, když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ x, x' \in J, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

U spojité f může δ záviset ne jenom na ε, ale také na bodu x. U stejnoměrně spojité f jedno δ musí fungovat pro všechny body x z J (srovnej s pozdější definicí stejnoměrné konvergence). Je-li f stejnoměrně spojitá, je i spojitá, ale naopak to obecně (pro špatné intervaly J) neplatí. Například funkce $f(x) = 1/x : (0,1] \to \mathbb{R}$ je na $(0,1]$ spojitá, ale není tam stejnoměrně spojitá: pro pevné $\delta > 0$ pro každé $x, x + \delta \in (0,1]$ máme

$$|f(x+\delta) - f(x)| = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} = \frac{\delta}{x(x+\delta)} \to +\infty,\ x \to 0^+.$$

Nicméně pro dobré (kompaktní) intervaly J jsou spojitost a stejnoměrná spojitost ekvivalentní pojmy.

Tvrzení 1.7$\frac{1}{2}$ (na kompaktním intervalu: spojitost ⇒ stejnoměrná spojitost)
Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a,b]$ spojitá, je na $[a,b]$ i stejnoměrně spojitá.

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že f je na kompaktním intervalu $[a,b]$ spojitá, ale není na něm stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ máme dva body $x, x' \in [a,b]$ splňující $|x - x'| < \delta$ a $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Máme tedy dvě posloupnosti (x_n) a (x'_n) bodů z $[a,b]$ takové, že $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Protože každá posloupnost bodů v kompaktním intervalu má podposloupnost konvergující k nějakému bodu intervalu (věta ze ZS), můžeme vzít nekonečnou posloupnost $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots$ přirozených čísel takovou, že podposloupnosti (x_{k_n}) a (x'_{k_n}) konvergují k bodu $x_0 \in [a,b]$, respektive $x'_0 \in [a,b]$. Protože $|x_{k_n} - x'_{k_n}| < 1/k_n$ pro všechny $n \in \mathbb{N}$, nutně $x_0 = x'_0$. Takže $x_{k_n} \to x_0$ i $x'_{k_n} \to x_0$ pro $n \to \infty$. Ale pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme i $|f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \geq \varepsilon$. V každém okolí x_0 tedy leží dva body, v nichž se funkční hodnoty f liší alespoň o ε. To znamená, že f není v x_0 spojitá, což je spor s předpokladem. □

Cvičení 4
Nalezněte funkci $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, která je omezená a spojitá, ale není stejnoměrně spojitá.

Důkaz Věty 1.7. Nechť je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá a je dané $\varepsilon > 0$. Podle předchozího tvrzení zvolíme $\delta > 0$ tak malé, že $x, x' \in [a,b], |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Tedy $\sup_I f - \inf_I f \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ pro každý interval I s délkou menší než δ (rozdíl $\sup_I f - \inf_I f$ mohu libovolně přesně aproximovat rozdílem $|f(x) - f(x')|$ pro nějaké $x, x' \in I$). Pak, pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \delta$, platí

$$\begin{aligned} S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{I \in D} |I| \cdot (\sup_I f - \inf_I f) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{I \in D} |I| \\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Takže $f \in \mathcal{R}[a,b]$ podle Věty 1.4. □

Následující větu dokázal Henri Lebesgue (1877–1941), my ji zde dokazovat nebudeme. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *(Lebesgueovu) míru nula*, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů $I_1, I_2, \ldots$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon \ \text{ a } \ M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

M se tedy dá pokrýt intervaly libovolně malé celkové délky.

Věta 1.8 (Lebesgueova, charakterizace integrovatelných funkcí)
Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je riemannovsky integrovatelná, právě když je na* $[a,b]$ *omezená a množina jejích bodů nespojitosti má míru nula.*

Uvedeme několik vlastností množin reálných čísel s nulovou mírou. Důkazy si rozmyslete jako cvičení.

- Každá konečná nebo spočetná množina má nulovou míru.
- Podmnožina množiny s nulovou mírou má také nulovou míru.
- Má-li každá z množin $A_1, A_2, \ldots$ nulovou míru, má i jejich sjednocení
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
nulovou míru.
- Interval s kladnou délkou nemá míru nula.

Například celá množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ má míru nula. Kombinací Vět 1.6 a 1.8 dostáváme, že množina bodů nespojitosti každé monotónní funkce má míru nula. Není těžké dokázat přímo, že množina bodů nespojitosti monotónní funkce je dokonce spočetná.

Cvičení 5
Sestrojte rostoucí funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, která má nekonečnou množinu bodů nespojitosti.*

Cvičení 6
(těžší) Sestrojte rostoucí funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*, jejíž množina bodů nespojitosti je* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Věta 1.9 (lin. kombinace a skládání zachovávají integrovatelnost)

1. *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Pak* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ a
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$
2. *Nechť* $f : [a,b] \to [c,d]$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ *je na intervalu* $[c,d]$ *spojitá. Potom* $f \circ g = g(f(x)) \in \mathcal{R}[a,b]$.

Důkaz. 1. Pro každé dělení (C, D) intervalu $[a, b]$ s body máme rovnost

$$\begin{aligned} R(\alpha f + \beta g, D, C) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\alpha f + \beta g)(c_i) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) f(c_i) + \beta \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) g(c_i) \\ &= \alpha R(f, D, C) + \beta R(g, D, C). \end{aligned}$$

Díky existenci integálů $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$ tak máme

$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g &= \alpha \lim_{\lambda(D)\to 0} R(f, D, C) + \beta \lim_{\lambda(D)\to 0} R(g, D, C) \\ &= \lim_{\lambda(D)\to 0} (\alpha R(f, D, C) + \beta R(g, D, C)) \\ &= \lim_{\lambda(D)\to 0} R(\alpha f + \beta g, D, C) \\ &= \int_a^b (\alpha f + \beta g). \end{aligned}$$

(Rozmyslete si, proč platí druhá rovnost.)

2. Z $f \in \mathcal{R}[a, b]$ podle Věty 1.8 plyne, že f je na $[a, b]$ omezená a má množinu bodů nespojitosti s nulovou mírou. Když je funkce f v bodě $x_0 \in [a, b]$ spojitá, je i složená funkce $f \circ g$ v tomto bodě spojitá (protože vnější funkce g je spojitá v každém bodě). Odtud plyne, že množina bodů nespojitosti funkce $f \circ g$ je obsažená v množině bodů nespojitosti funkce f a má proto také nulovou míru. Vnější funkce g je omezená (je to spojitá funkce na kompaktním intervalu), takže i složená funkce $f \circ g$ je na $[a, b]$ omezená. Podle Věty 1.8 je $f \circ g \in \mathcal{R}[a, b]$. $\square$

Důsledky. Uvedeme několik operací, které zachovávají třídu riemannovsky integrovatelných funkcí. Důkazy si rozmyslete jako cvičení.

- Podle části 2 předchozí věty dostáváme, že pro $f \in \mathcal{R}[a, b]$ i funkce $f^2, |f|$ atd. mají na $[a, b]$ Riemannův integrál.

- Proto z $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ plyne $fg \in \mathcal{R}[a, b]$—díky identitě

$$fg = \frac{(f+g)^2}{4} - \frac{(f-g)^2}{4}.$$

- Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $a \le c \le d \le b$. Zúžení funkce f na interval $[c,d]$ označíme rovněž jako f a jako $\chi_{[c,d]} : [a,b] \to \{0,1\}$ označíme charakteristickou funkci podintervalu $[c,d]$, tj. $\chi_{[c,d]}(x) = 1$ pro $x \in [c,d]$ a $\chi_{[c,d]}(x) = 0$ pro $x \in [a,b] \backslash [c,d]$. Potom i $f \in \mathcal{R}[c,d]$ a

$$\int_c^d f = \int_a^b f \chi_{[c,d]}.$$

Cvičení 7
Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Dokažte, že i $\max(f,g)$ i $\min(f,g)$ jsou riemannovsky integrovatelné na $[a,b]$.

První část Věty 1.9 říká, že množina funkcí $\mathcal{R}[a,b]$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a že zobrazení

$$f \mapsto \int_a^b f$$

je lineární zobrazení z tohoto vektorového prostoru do (vektorového prostoru) $\mathbb{R}$. Říkáme, že $\int_a^b$ je *lineární funkcionál* (tj. funkce na funkcích) na $\mathcal{R}[a,b]$.

Definujeme

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{a} \quad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Věta 1.10 (integrál je aditivní funkce integračního intervalu)
Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $c \in [a,b]$. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c] \,\&\, f \in \mathcal{R}[c,b]$ a, když příslušné integrály existují, máme

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Důkaz. Zúžené funkce označíme $g = f|[a,c]$ a $h = f|[c,b]$. Pro množiny bodů nespojitosti platí $N(f) = N(g) \cup N(h)$ (rozmyslete si proč). Takže $N(f)$ má míru nula, právě když obě množiny $N(g)$ a $N(h)$ mají míru nula. Také je jasné, že f je omezená, právě když jsou obě funkce g a h omezené. Ekvivalence integrovatelnosti tedy plyne z Věty 1.8. (Není těžké ji dokázat bez použití Lebesgueovy věty přímo z definice integrálu.)

Nechť tedy $f \in \mathcal{R}[a,b]$ (nebo, ekvivalentně, obě zúžení f na intervaly $[a,c]$ a $[c,b]$ mají Riemannův integrál). Protože pro každý bod $x \in [a,b]$ až na c platí rovnost $f(x) = f(x)\chi_{[a,c]}(x) + f(x)\chi_{[c,b]}(x)$ a na hodnotě funkce v jediném bodě při integrování nezáleží, podle části 1 Věty 1.9 a hořejšího důsledku máme

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \int_a^b (f\chi_{[a,c]} + f\chi_{[c,b]}) = \int_a^b f\chi_{[a,c]} + \int_a^b f\chi_{[c,b]} \\ &= \int_a^c f + \int_c^b f.\end{aligned}$$

□

Důsledek. *Nechť a, b, c jsou tři libovolná reálná čísla, $d = \min(a, b, c)$, $e = \max(a, b, c)$ a $f \in \mathcal{R}[d, e]$. Pak*

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0.$$

Důkaz. Víme, že f má Riemannův integrál na libovolném podintervalu intervalu $[d, e]$, takže tyto tři integrály existují. Nechť například $a \le b \le c$, pak (podle rozšířené definice integrálu a Věty 1.10)

$$\begin{aligned}\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f &= \int_a^b f + \int_b^c f - \int_a^c f \\ &= \int_a^b f + \int_b^c f - \left(\int_a^b f + \int_b^c f\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Podobně postupujeme při jiném uspořádání bodů a, b, c. □

Věta 1.11 (První základní věta analýzy)
Pro $f \in \mathcal{R}[a, b]$ definujeme funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ pomocí

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Funkce F je spojitá na $[a, b]$ a pro každý bod spojitosti $x_0 \in [a, b]$ funkce f platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $F(x) := \int_a^x f$ pro $x \in [a,b]$ a $x_0 \in [a,b]$. Funkce f je na $[a,b]$ omezená (protože je integrovatelná), takže pro nějakou konstantu $c > 0$ platí $|f(x)| < c$ pro každé $x \in [a,b]$. Bud dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $\delta > 0$ tak malé, že $c\delta < \varepsilon$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \delta$ pak máme

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| \quad &= \quad \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \\ &= \text{(důsledek V. 1.10)} \quad \left| \int_x^{x_0} f \right| \\ &\leq \text{(část 3 V. 1.2)} \quad |x - x_0| \sup_{x \in I} |f(x)| \\ &< \quad \delta c, \end{aligned}$$

kde I je interval s krajními body x a x_0. Tedy

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \delta c < \varepsilon,$$

takže F je spojitá v x_0.

Nechť je navíc f spojitá v x_0. Pro dané $\varepsilon > 0$ pak existuje $\delta > 0$ takové, že $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, tedy i $\inf_I f \geq f(x_0) - \varepsilon$ a $\sup_I f \leq f(x_0) + \varepsilon$. Pro $x \in [a,b]$, $x > x_0$ (případ $x < x_0$ je analogický) máme

$$\frac{(x - x_0)\inf_I f}{x - x_0} \leq \underbrace{\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f}_{= \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}} \leq \frac{(x - x_0)\sup_I f}{x - x_0}$$

(I je interval s krajními body x a x_0). Takže, pro $x \in P(x_0, \delta)$,

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \inf_I f \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \sup_I f \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Tedy

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

Důsledek. *Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá na $[a,b]$, má na $[a,b]$ primitivní funkci a každá primitivní funkce F k f je tvaru*

$$F(x) = c + \int_a^x f,$$

kde c je konstanta.

Důkaz. Podle Věty 1.7 je spojitá funkce riemannovsky integrovatelná, takže funkce $F(x) = \int_a^x f$ je dobře definovaná a podle Věty 1.11 je na intervalu $[a, b]$ primitivní k f. Ze ZS víme, že každé dvě funkce, primitivní k dané funkci na intervalu, se liší o konstantu. $\square$

Věta 1.12 (Druhá základní věta analýzy)
Nechť má funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál a primitivní funkci F (tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$). Potom, pro každou primitivní funkci F, platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Důkaz. $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, buď dělení intervalu $[a, b]$ a F buď primitivní funkce k f na $[a, b]$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě na každém intervalu $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ máme

$$F(a_{i+1}) - F(a_i) = F'(c_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = f(c_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)$$

pro nějaké $c_i \in (a_i, a_{i+1})$. Tedy

$$(a_{i+1} - a_i) \inf_{I_i} f \leq F(a_{i+1}) - F(a_i) \leq (a_{i+1} - a_i) \sup_{I_i} f.$$

Sečtením přes $i = 0, 1, \dots, k - 1$ dostaneme nerovnosti

$$s(f, D) \leq \sum_{i=0}^{k-1} F(a_{i+1}) - F(a_i) = F(b) - F(a) \leq S(f, D),$$

které platí pro každé dělení D. Protože $f \in \mathcal{R}[a, b]$, máme $\sup_D s(f, D) = \inf_D S(f, D) = \int_a^b f$, tedy i

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

$\square$

Rozdíl funkčních hodnot, respektive rozdíl jednostranných limit budeme označovat symbolem $[F]_a^b$:

$$[F]_a^b := F(b) - F(a), \text{ respektive } [F]_a^b := \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Řekneme, že $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *zobecněná primitivní funkce* k funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, když je F na $[a,b]$ spojitá a s možnou výjimkou konečně mnoha bodů intervalu $[a,b]$ platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Zobecněná primitivní funkce je opět určena jednoznačně až na aditivní konstantu (rozmyslete si proč a také, že to přestává platit, nepožaduje-li se spojitost F).

Věta 1.12' (jiná forma 2. ZVA)
1. Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ spojitá, má na $[a,b]$ Riemannův integrál a primitivní funkci a pro každou primitivní funkci F platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

2. Je-li funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$ omezená a spojitá až na konečně mnoho bodů, má na $[a,b]$ Riemannův integrál a zobecněnou primitivní funkci a pro každou zobecněnou primitivní funkci F platí

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Důkaz. 1. To plyne hned z Věty 1.7, z důsledku Věty 1.11 a z Věty 1.12.

2. Integrovatelnost f plyne z Lebesgueovy věty. Z Věty 1.11 plyne, že $F_0(x) = \int_a^x f$ je zobecněnou primitivní funkcí k f na $[a,b]$. Triviálně,

$$F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f - 0 = \int_a^b f.$$

Protože každá zobecněná primitivní funkce F k f se od F_0 liší jen o aditivní konstantu, to jest $F(x) = F_0(x) + c$ pro každé $x \in [a,b]$, platí tato rovnost i pro F. $\square$

Newtonův integrál. Funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, když má na (a,b) primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity

$$L = \lim_{x \to b^-} F(x) \ \text{ a } \ K = \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Tento integrál pak definujeme jako

$$(N) \int_a^b f := [F]_a^b = L - K = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Protože každé dvě funkce primitivní k f na (a, b) se liší jen o aditivní konstantu, rozdíl limit $L-K$ na volbě F nezávisí a definice Newtonova integrálu je korektní.

Porovnáme množinu newtonovsky integrovatelných funkcí

$$\mathcal{N}(a, b) = \{f : f \text{ má na } (a, b) \text{ Newtonův integrál}\}$$

s množinou riemannovsky integrovatelných funkcí $\mathcal{R}[a, b]$ a s množinou spojitých funkcí

$$C[a, b] = \{f : f \text{ je na } [a, b] \text{ spojitá}\},$$

a porovnáme hodnoty příslušných integrálů.

- Platí, že $C[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b] \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

  $$f \in C[a, b] \Rightarrow (R) \int_a^b f = (N) \int_a^b f,$$

  to jest každá funkce spojitá na $[a, b]$ má na tomto intervalu Riemannův a (na (a, b)) Newtonův integrál a ty se rovnají.

- Má-li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na $[a, b]$ Riemannův integrál a na (a, b) Newtonův integrál, mají oba integrály stejnou hodnotu.

- Množiny $\mathcal{N}(a, b) \backslash \mathcal{R}[a, b]$ a $\mathcal{R}[a, b] \backslash \mathcal{N}(a, b)$ jsou neprázdné.

První tvrzení plyne z části 1 Věty 1.12'. Co se týče druhého tvrzení, z $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a existence primitivní funkce F k f na (a, b) díky Větě 1.12 plyne, že pro každé $\delta > 0$ platí rovnost

$$(R) \int_{a+\delta}^{b-\delta} f = F(b - \delta) - F(a + \delta).$$

Pro $\delta \to 0$ levá strana jde k $(R) \int_a^b f$ a pravá jde podle definice k $(N) \int_a^b f$. Třetí tvrzení říká, že existují funkce definované na $[a, b]$, které mají jeden integrál, ale ne druhý. Např. funkce $\mathrm{sgn}(x) : [-1, 1] \to \{-1, 0, 1\}$ má na $[-1, 1]$ jen jeden bod nespojitosti a je omezená, takže má Riemannův integrál. Na intervalu $(-1, 1)$ ale nemá primitivní funkci (jak jsme viděli v ZS, protože nemá Darbouxovu vlastnost, nenabývá všech mezihodnot), takže nemá ani

Newtonův integrál. Naopak funkce $x^{-1/2} : (0,1] \to \mathbb{R}$ (v nule libovolně dodefinovaná) má na $(0,1)$ Newtonův integrál

$$(N)\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{dx} = [2x^{1/2}]_0^1 = 2,$$

ale nemá na $[0,1]$ Riemannův integrál, protože není omezená. Lze sestrojit i omezenou funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takovou, že $f \in \mathcal{N}(a,b)\backslash\mathcal{R}[a,b]$.

V dalším už budeme opět termínem „integrál" a symbolem $\int$ rozumět výhradně Riemannův integrál.

Věta 1.13 (integrace per partes a substitucí)
(integrace per partes). Nechť funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mají na $[a,b]$ spojité derivace (v krajních bodech jednostranně). Potom

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

(integrace substitucí). Nechť $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, přičemž $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ nebo $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$.

1. *Nechť má φ na $[\alpha,\beta]$ spojitou derivaci φ' a funkce f je spojitá na $[a,b]$. Potom*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} \int_a^b f \\ \int_b^a f. \end{cases}$$

2. *Nechť je φ na $[\alpha,\beta]$ rostoucí nebo klesající, má na $[\alpha,\beta]$ spojitou derivaci φ' a $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pak opět platí rovnost integrálů v části 1.*

Důkaz. Dokážeme vzorec pro integraci per partes. Podle předpokladů jsou všechny čtyři funkce f, g, f', g' na $[a,b]$ spojité, takže funkce $f'g, fg'$ a $(fg)' = f'g + fg'$ (Leibnizova formule pro derivaci součinu) jsou rovněž spojité a tedy integrovatelné. Podle Věty 1.12 máme

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b,$$

což je vzorec pro integraci per partes v jiné podobě.

Dokážeme vzorec pro integraci substitucí. 1. Protože je f na $[a,b]$ spojitá, má na tomto intervalu primitivní funkci F. Podle formule pro derivaci složené funkce máme na intervalu $[\alpha,\beta]$ rovnost

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Dvojím použitím Věty 1.12 dostáváme

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi) \cdot \varphi' = [F(\varphi)]_\alpha^\beta = [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Část 2 lze dokázat z definice Riemannova integrálu pomocí Riemannových sum $R(f(\varphi) \cdot \varphi', D, C)$, nebudeme to podrobně dělat. □

Aplikace Riemannova integrálu. Nejdříve se podíváme, jak se pomocí integrálu dají odhadovat nekonečné i konečné součty. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ má Riemannův integrál na každém intervalu $[a,b]$ pro $b > a$, budeme stručně psát $f \in \mathcal{R}[a,+\infty)$. *Nevlastní (Riemannův) integrál* funkce f na intervalu $[a,+\infty)$ definujeme jako limitu

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f.$$

Tvrzení 1.14 (integrální kritérium konvergence řad)
Nechť $a \in \mathbb{N}$ a funkce $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a,+\infty)$ nezáporná a nerostoucí, tedy i $f \in \mathcal{R}[a,+\infty)$ (podle Věty 1.6). Pak

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^{\infty} f(n) \quad &= \quad f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots \text{ konverguje} \\ &\iff \quad \int_a^{+\infty} f < +\infty. \end{aligned}$$

Důkaz. Nechť $b \in \mathbb{N}$, $b \ge a$. Dolní a horní suma funkce f pro dělení $D = (a, a+1, a+2, \dots, b)$ dávají nerovnosti

$$s(f,D) = \sum_{i=a}^{b-1} 1 \cdot \inf_{[i,i+1]} f = f(a+1) + f(a+2) + \cdots + f(b) \le \int_a^b f$$

a

$$S(f,D) = \sum_{i=a}^{b-1} 1 \cdot \sup_{[i,i+1]} f = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b-1) \ge \int_a^b f.$$

Dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Protože řada $\sum_{n\geq a} f(n)$ konverguje, jsou částečné součty $\sum_{n=a}^{b} f(n)$ shora omezené a tedy, podle druhé nerovnosti, je i funkce

$$F(b) := \int_a^b f$$

shora omezená pro $b \in [a, +\infty)$. Funkce F je dále na tomto intervalu neklesající (protože je f nezáporná). Proto existuje vlastní limita $\lim_{b\to+\infty} F(b)$.

Implikace $\Leftarrow$ (dokážeme kontrapozici implikace). Když $\sum_{n\geq a} f(n)$ diverguje, to jest $\lim_{b\to+\infty} \sum_{n=a}^{b} f(n) = +\infty$, ukazuje první nerovnost, že i

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = +\infty.$$

$\square$

Příklady. Uvažme nekonečné číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ (s > 0) \ \text{ a } \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}.$$

Máme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x^s} = \begin{cases} [\log x]_1^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty & \text{pro } s = 1 \\ \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^{+\infty} & \text{pro } s \neq 1. \end{cases}$$

Ovšem

$$\left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^{+\infty} = \begin{cases} +\infty - 1 = +\infty & \text{pro } 0 < s < 1 \\ 0 - \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1} & \text{pro } s > 1. \end{cases}$$

Podle integrálního kritéria tedy první řada konverguje pro $s > 1$ a diverguje pro $0 < s \leq 1$.

Druhá řada podle integrálního kritéria diverguje, protože

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{dx}}{x \log x} = [\log(\log x)]_2^{+\infty} = +\infty - \log(\log 2) = +\infty.$$

Cvičení 8

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^s}, \ s > 0.$$

Odhady konečných sum pomocí integrálů. Ukážeme, jak se pomocí integrálů dají odhadnout součty

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

a

$$L_n := \sum_{k=2}^{n} \log k = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n.$$

První z nich—tzv. harmonické číslo—je částečný součet divergentní harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Odhad druhého použijeme pro odhad růstu funkce faktoriál.

Začneme s H_n. Sčítanec $1/k$ aproximujeme integrálem a využijeme toho, že integrál je aditivní funkce integračního intervalu. Podle Taylorova rozvoje logaritmu máme

$$\frac{1}{k} \doteq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{dx}}{x} = [\log x]_k^{k+1} = \log(1 + 1/k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \ldots$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ tak platí nerovnosti

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} < I_k := \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{dx}}{x} < \frac{1}{k}$$

(I_k je součtem leibnizovské střídavé řady) a

$$I_k < \frac{1}{k} < I_k + \frac{1}{2k^2}.$$

Podle Věty 1.10 máme

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{dx}}{x} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{dx}}{x} = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1).$$

Sečtením posledních nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$ tak dostáváme

$$\log(n+1) < H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Protože podle první nerovnosti v důkazu Tvrzení 1.14

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{dx}}{x^2} = 1 + [-1/x]_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

dostáváme odhad harmonických čísel

$$\boxed{\log(n+1) < H_n < 1 + \log(n+1) \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\ .}$$

Stejnou metodou odhadneme součet L_n. Podle Taylorova rozvoje logaritmu opět máme ($k \geq 2$)

$$\begin{aligned}
\log k &\doteq \int_{k-1}^{k} \log x \,\mathrm{dx} = [x \log x - x]_{k-1}^{k} \\
&= k \log k - k - (k-1)\log(k-1) + (k-1) \\
&= (k-1)\log(1 + 1/(k-1)) + \log k - 1 \\
&= (k-1)\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} + \frac{1}{3(k-1)^3} - \dots\right) + \log k - 1 \\
&= \log k - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{3(k-1)^2} - \dots .
\end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tak platí nerovnosti

$$\log k - \frac{1}{2(k-1)} < I_k := \int_{k-1}^{k} \log x \,\mathrm{dx} < \log k - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{3(k-1)^2}$$

a

$$I_k + \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{3(k-1)^2} < \log k < I_k + \frac{1}{2(k-1)}.$$

Protože (Věta 1.10)

$$\sum_{k=2}^{n} I_k = \int_1^n \log x \,\mathrm{dx} = [x \log x - x]_1^n = n \log n - n + 1,$$

sečtením posledních nerovností pro $k = 2, 3, \dots, n$ dostáváme

$$n \log n - n + 1 + \frac{H_{n-1}}{2} - \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} < L_n < n \log n - n + 1 + \frac{H_{n-1}}{2}.$$

Dále, podle hořejšího odhadu harmonických čísel,

$$\frac{1}{2}\log n < \frac{H_{n-1}}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log n$$

a, podle hořejšího odhadu součtu převrácených čtverců,

$$\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)^2} < \frac{2}{3}.$$

Celkem máme

$$\boxed{n\log n - n + \tfrac{1}{2}\log n + \tfrac{1}{3} < L_n < n\log n - n + \tfrac{1}{2}\log n + \tfrac{3}{2}\ \forall n \geq 2.}$$

Protože

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = \mathrm{e}^{\log 2+\log 3+\cdots+\log n} = \mathrm{e}^{L_n},$$

po odlogaritmování dostáváme pro každé $n \geq 2$ odhad faktoriálu

$$\mathrm{e}^{1/3}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}^{3/2}\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,$$

tedy

$$\boxed{1.39\sqrt{n}\left(\tfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < 4.49\sqrt{n}\left(\tfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\ \ \forall n \geq 2.}$$

Odlogaritmováním se chyba dosti zvětšila—zatímco dolní a horní odhad pro H_n se liší o méně než 1 a pro L_n o méně než 1.3, horní odhad pro $n!$ je něco mezi troj- až čtyřnásobkem dolního. Důmyslnějším počítáním s integrály se dá odvodit mnohem přesnější odhad, tzv. *Stirlingova formule*: pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\boxed{n! = (1+\Theta_n)\sqrt{2\pi n}\left(\tfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\ 0 \leq \Theta_n \leq \tfrac{1}{12n}.}$$

Definování funkcí pomocí integrálů. Funkci $\log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jsme zavedli jako inverzní funkci k exponenciále $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, kterou jsme definovali pomocí limity

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{nebo řadou} \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Je ale možný a pro některé účely výhodný i opačný postup, od logaritmu k exponenciále. Logaritmus má přirozenou definici pomocí integrálu: můžeme ho definovat také vzorcem

$$\log x := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t},\ x > 0.$$

Odvoďme pro zajímavost z integrální definice logaritmu jeho základní vlastnosti: rovnost $\log 1 = 0$, limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ a identitu $\log(xy) = \log x + \log y$. Rovnost je zřejmá, protože integrál každé funkce přes degenerovaný jednoprvkový interval je nula. Limita plyne z odhadů integrálu (část 3 Tvrzení 1.2)

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} < x \quad \text{pro} \quad x > 0$$

a

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_{1+x}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < x \quad \text{pro} \quad -1 < x < 0.$$

Identitu dokážeme pomocí substituce (Věta 1.13) a aditivity integrálu (Věta 1.10). Pro $x, y > 0$ máme

$$\begin{aligned}
\log(xy) &= \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \log x + \underbrace{\int_1^{y} \frac{x\,\mathrm{d}u}{xu}}_{\text{substituce } t = xu} = \log x + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \log x + \log y.
\end{aligned}$$

Ukážeme, jak se pomocí integrálu dá rozšířit funkce faktoriál z $\mathbb{N}_0$ na $[0, +\infty)$. Chceme definovat funkci $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ s vlastností, že $f(0) = 1$

a pro každé *reálné* $x \geq 1$ platí identita $f(x) = xf(x-1)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ bude platit $f(n) = n!$. Tuto vlastnost má funkce

$$f(x) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{dt}.$$

Pro $x = 0$ skutečně $f(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{dt} = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$. Pro každé pevné $x > 0$ tento nevlastní integrál konverguje (např. díky nerovnosti $0 < t^x\mathrm{e}^{-t} < \mathrm{e}^{-t/2}$ platné pro každé $t > t_0 = t_0(x)$) a funkce f je definovaná. Integrace per partes (Věta 1.13) pro $x \geq 1$ dává

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} t^x \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)'\,\mathrm{dt} \\ &= \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (t^x)' \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{dt} \\ &= 0 - 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{dt} \\ &= xf(x-1). \end{aligned}$$

Tato funkce je tzv. *gama funkce* zavedená Eulerem,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{dt}$$

(posun argumentu o -1 je z historických důvodů).

Plocha, délka křivky a objem rotačního tělesa. Vraťme se k rovinnému útvaru

$$U = U(a, b, f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

kde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkce. Pro $f \in \mathcal{R}[a, b]$ je rozumné definovat

$$\mathrm{plocha}(U) = \int_a^b f.$$

Horní hranici útvaru U tvoří křivka

$$k = k(a, b, f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\}.$$

Jaká je její délka? Předpokládejme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci f'. Pro $x \in [a, b]$ a $\Delta > 0$, pro něž $x + \Delta \in [a, b]$, má úsečka spojující body $(x, f(x))$ a $(x + \Delta, f(x + \Delta))$ délku

$$\sqrt{\Delta^2 + (f(x + \Delta) - f(x))^2} = \Delta\sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}\right)^2}.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě se poslední výraz rovná

$$\Delta\sqrt{1 + (f'(c))^2},$$

kde bod c ležící mezi x a $x + \Delta$. Odtud se dá odvodit, že rozumná definice délky křivky k je

$$\text{délka}(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{dt}.$$

Integrand je funkce spojitá na $[a, b]$ (předpokládáme spojitost první derivace), takže integrál je dobře definován.

Cvičení 9
Co se stane, když takto budeme počítat délku půlkružnice

$$k = \{(x, \sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\} \ ?$$

Pro nezápornou a integrovatelnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uvažme rotační těleso

$$T = T(a, b, f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\},$$

které vznikne rotací rovinného útvaru $U(a, b, f)$ v $\mathbb{R}^3$ kolem osy x. Objem T aproximujeme součtem objemů plochých válců o poloměru $f(x)$ a tloušťce dx. Objem takového válce je $\pi f(x)^2\,\mathrm{dx}$. Takže je rozumné definovat

$$\text{objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{dx}.$$

2 Posloupnosti a řady funkcí

V dalším f a f_n, kde $n = 1, 2, \ldots$, jsou nějaké funkce definované na (neprázdné) množině $M \subset \mathbb{R}$. Co to znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \ \text{ nebo, že } \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \ ?$$

Zavedeme tři druhy konvergence posloupností a řad funkcí. Začneme s posloupnostmi a k řadám přejdeme později.

- **bodová konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *bodově konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \to f \text{ na } M,$$

  když pro každé $x \in M$ máme rovnost $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Explicitně,

  $$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in M \, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \; n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- **stejnoměrná konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *stejnoměrně konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M,$$

  když

  $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \; n > n_0, \; x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- **lokálně stejnoměrná konvergence.** Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) *lokálně stejnoměrně konverguje* k funkci f na množině M, symbolicky

  $$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M,$$

  když každé $x \in M$ má okolí $U = (x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$ může záviset na x, že $f_n \rightrightarrows f$ na $M \cap U$.

Všimněte si rozdílu mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí. V bodové konvergenci pro dané $\varepsilon > 0$ může n_0 záviset na bodu x, v němž konvergenci posloupnosti funkčních hodnot $(f_n(x))$ uvažujeme. Ve stejnoměrné konvergenci však pro dané $\varepsilon > 0$ index n_0 na x záviset nesmí, jediné n_0 musí fungovat pro všechny body $x \in M$.

Nejsilnější z těchto pojmů je stejnoměrná konvergence, lokálně stejnoměrná konvergence je prostřední a bodová konvergence je nejslabší: z definic plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \;\Rightarrow\; f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } M \;\Rightarrow\; f_n \to f \text{ na } M.$$

Příklady. 1. Nechť $M = [0,1]$ a $f_n = x^n$. Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na intervalu $[0,1]$ bodově k funkci f splňující

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0,1), \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Je to stejnoměrná konvergence? Není. Pomocí Bernoulliovy nerovnosti snadno ukážeme, že

$$\frac{f_{n+1}(1-1/(n+1))}{f_n(1-1/n)} > 1 \quad \text{pro} \quad n \geq 2.$$

Posloupnost funkčních hodnot $(f_n(1-1/n))$ je tedy rostoucí a pro každé $n \geq 2$ máme

$$f_n(1-1/n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq f_2(1-1/2) = \frac{1}{4}.$$

Pro každé $n \geq 2$ jsme nalezli v množině M „špatný" bod $x_n = 1 - 1/n$, který splňuje

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) \geq 1/4,$$

což vylučuje stejnoměrnou konvergenci. Konvergence není ani lokálně stejnoměrná. Body x_n zleva konvergují k 1, a bod $x = 1$ tak nemá okolí U, na němž by $f_n \rightrightarrows f$.

Všimněte si, že funkce f není zleva spojitá v $x = 1$, ačkoli každá funkce f_n je spojitá na celém intervalu $[0,1]$. Bodová limita spojitých funkcí tedy může být nespojitá. Jak se konvergence této posloupnosti funkcí změní, když interval $M = [0,1]$ zmenšíme, třeba na $M = [0, 1-\delta]$ pro pevné $\delta > 0$? Pro každé $x \in [0, 1-\delta]$ máme $0 \leq f_n(x) = x^n \leq (1-\delta)^n$. Protože $(1-\delta)^n \to 0$ pro $n \to \infty$, dostáváme horní odhad $|f_n(x) - f(x)|$, který jde k nule pro $n \to \infty$ a nezávisí na $x \in [0, 1-\delta]$. Takže

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad M = [0, 1-\delta].$$

Pro $M = [0,1)$ konvergence stejnoměrná není, kvůli bodům x_n, ale je lokálně stejnoměrná, protože každý bod $a \in [0,1)$ je obsažen v intervalu typu $M = [0, 1-\delta]$ s $\delta > 0$, totiž v $[0,a]$.

2. Posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

na množině $M = \mathbb{R}$ bodově konverguje k identicky nulové funkci $f \equiv 0$. Špatné body $x_n = 1/n$, v nichž $f_n(x_n) = f_n(1/n) = 1/2$, jdou v limitě k nule. Konvergence není proto ani lokálně stejnoměrná. Je lokálně stejnoměrná na každé množině M, která neobsahuje nulu. Rozmyslete si, že na každé množině $M \subset \mathbb{R}$, která neobsahuje nějaké okolí nuly, je konvergence stejnoměrná.

3. Platí, že

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows 0 \ \text{ na } M = \mathbb{R},$$

protože $|f_n(x)| \leq 1/n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pro funkci $f:\ M \to \mathbb{R}$ definujeme označení

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)|$$

(„el-nekonečno norma"). Z definice plyne, že $\|cf\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$ pro každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ a že platí trojúhelníková nerovnost $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Z definice stejnoměrné spojitosti a z předchozích příkladů by mělo být jasné, že

$$f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ M \iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Tvrzení 2.1 (Bolzanova–Cauchyova (stejnoměrná) podmínka) *Posloupnost funkcí (f_n) konverguje na množině M stejnoměrně k nějaké funkci f, právě když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0:\ m, n > n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy máme n_0, že $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0$ a každé $x \in M$. Pro každé $m, n > n_0$ a $x \in M$ tak (díky trojúhelníkové nerovnosti) máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Je tedy splněna B.–C. podmínka.

Naopak, nechť posloupnost funkcí (f_n) splňuje B.–C. podmínku. Pro každé pevné číslo $a \in M$ to znamená, že posloupnost čísel $(f_n(a))$ je cauchyovská. Podle věty ze zimního semestru má tato posloupnost vlastní limitu, kterou si označíme $f(a)$: $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$. Dostali jsme funkci f, k níž funkce f_n na M bodově konvergují. Zbývá dokázat, že k f konvergují stejnoměrně. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle B.–C. podmínky existuje n_0, že pro každé

$m, n > n_0$ a každé $x \in M$ máme $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Číslo $a \in M$ buď libovolné. Vezmeme $N \in \mathbb{N}$ tak, že $N > n_0$ a $|f_N(a) - f(a)| < \varepsilon$ (to lze díky $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$). B.–C. podmínka dává, že pro pro $n > n_0$ platí $|f_n(a) - f_N(a)| < \varepsilon$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pro každé $n > n_0$ máme

$$|f_n(a) - f(a)| \le |f_n(a) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Protože n_0 nezávisí na a, máme $f_n \rightrightarrows f$ na M. □

Bolzanova–Cauchyova podmínka nám umožňuje testovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti (f_n) bez přítomnosti (a znalosti) limitní funkce f. Když je splněna, můžeme a budeme psát $f_n \rightrightarrows$ na M, resp. $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na M. Poznamenejme ještě, že limitní funkce je samozřejmě určena jednoznačně. Když tedy odněkud víme, že $f_n \to f$ na M a současně podle Bolzanovy–Cauchyovy podmínky víme, že $f_n \rightrightarrows$ na M, automaticky dostáváme $f_n \rightrightarrows f$ na M, a podobně pro lokálně stejnoměrnou konvergenci.

Řekneme, že bodová konvergence $f_n \to f$ na M je *monotónní*, když pro každý bod $a \in M$ je posloupnost čísel $(f_n(a))$ neklesající nebo když pro každý bod $a \in M$ je tato posloupnost nerostoucí.

Tvrzení 2.2 (situace, kdy $\overset{loc}{\rightrightarrows} \Rightarrow \rightrightarrows$, respektive $\to \Rightarrow \rightrightarrows$)
Platí následující tvrzení.

1. *Když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), kde $-\infty \le a < b \le +\infty$, potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ pro každý kompaktní podinterval $[c, d] \subset (a, b)$.*
2. *(Diniho věta) Nechť $f_n \to f$ na kompaktním intervalu I, funkce f_n i f jsou spojité a konvergence je monotónní. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na I.*

Důkaz. Nebudeme dělat. □

V následujících třech větách zjistíme, v jakých situacích můžeme zaměňovat pořadí operace limity posloupnosti funkcí s operací limity funkce v bodě, respektive integrování, respektive derivování, to jest, kdy platí rovnosti

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) &= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\
\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \\
\lim_{n\to\infty} f_n'(x) &= \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'.
\end{aligned}$$

V případě prvních dvou rovností věty říkají, že když jsou vnitřní výrazy ($\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, resp. $\int_a^b f_n$ a $\lim_{n\to\infty} f_n$) definované a konvergence posloupnosti funkcí v nich je stejnoměrná, jsou i vnější výrazy definované a mají stejnou hodnotu. Třetí rovnost takto nefunguje (a jak na příkladech uvidíme, ani fungovat nemůže). Třetí věta o derivování zhruba říká (pomineme teď technické detaily), že když je celá levá strana definovaná a konvergence posloupnosti derivací v ní je stejnoměrná, je i pravá strana definovaná, konvergence posloupnosti funkcí v ní je stejnoměrná a rovná se levé straně.

Věta 2.3 (Mooreova–Osgoodova, záměna pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a $\lim_{x\to x_0}$) *Nechť jsou funkce f_n a f definované na nějakém prstencovém okolí $M = P(x_0,\delta)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který může být i nevlastní, existují vlastní limity*

$$a_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x) \ \text{ a dále } \ f_n \rightrightarrows f \ \text{ na } \ P(x_0,\delta).$$

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a rovnají se.

Důkaz. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, splňuje podle Tvrzení 2.1 posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku: pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ platí pro každé $x \in M$ a každé $m, n > n_0$. Pro pevné indexy $m, n > n_0$ limitní přechod $x \to x_0$ dává nerovnost

$$|a_m - a_n| \le \varepsilon.$$

Posloupnost čísel (a_n) je tedy cauchyovská a podle věty ze ZS má vlastní limitu $A \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Zbývá ukázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Vzdálenost $|f(x) - A|$ pro x blízké k x_0 odhadneme pomocí trojúhelníkové nerovnosti jako

$$|f(x) - A| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n - A|}_{V_3},$$

což platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$.

Buď nyní dáno $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \to A$ pro $n \to \infty$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $V_3 < \varepsilon/3$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, existuje n_1, že $n > n_1, x \in M \Rightarrow V_1 < \varepsilon/3$. Vezmeme $N \in \mathbb{N}$ větší než n_0 i n_1. Protože $\lim_{x\to x_0} f_N(x) = a_N$, existuje $\delta_0 > 0$ takové, že

$$x \in P(x_0,\delta_0) \Rightarrow |f_N(x) - a_N| < \varepsilon/3, \quad \text{to jest } \ V_2 < \varepsilon/3.$$

Pro toto δ_0 a $n = N$ nám hořejší nerovnost dává

$$x \in P(x_0, \delta_0) \Rightarrow |f(x) - A| \le V_1 + V_2 + V_3 < \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Takže $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$. □

Není-li konvergence stejnoměrná, záměnu pořadí limit $\lim_{n\to\infty}$ a $\lim_{x\to x_0}$ nelze obecně provést (beze změny výsledku), jak jsme už vlastně viděli v příkladu s funkcemi $f_n(x) = x^n$:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \text{ale} \quad \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0.$$

Důsledek. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na I, přičemž funkce f_n jsou na I spojité. Potom i limitní funkce f je na I spojitá.*

Důkaz. Nechť $x_0 \in I$ je libovolný bod intervalu I, řekněme vnitřní (pro krajní body je postup s jednostrannými limitami prakticky stejný). Podle předchozí věty záměna pořadí limit nemění výsledek a máme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

takže f je spojitá v bodě x_0. (Rozmyslete si přesně, proč platí každá z předchozích čtyřech rovností.) □

Lokálně stejnoměrná (a tím spíše stejnoměrná) konvergence tedy zachovává spojitost funkce.

Cvičení 10
Zjistěte, jak se bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí chovají k omezenosti funkce.

Věta 2.4 (záměna pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a integrování)
Funkce f_n, $n = 1, 2, \dots$, a f buďte definované na (omezeném) intervalu $[a, b]$, $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Pak i $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$, existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ a každé $x \in [a, b]$ máme

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon.$$

Nechť $D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$, je libovolné dělení intervalu $[a, b]$ a $n > n_0$ je pevné. Na interválcích $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ pak máme nerovnosti

$$m_i - \varepsilon = \inf_{I_i} f_n - \varepsilon \le \inf_{I_i} f \quad \text{a} \quad \sup_{I_i} f \le \sup_{I_i} f_n + \varepsilon = M_i + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon(|I_0| + |I_1| + \cdots + |I_{k-1}|) = \varepsilon(b - a)$, pro dolní Riemannovy součty funkcí f_n a f dostáváme nerovnost

$$\begin{aligned} s(f_n, D) - \varepsilon(b - a) &= \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i - \varepsilon(b - a) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i|(m_i - \varepsilon) \\ &\le \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{I_i} f \\ &= s(f, D), \end{aligned}$$

čili $s(f_n, D) - \varepsilon(b - a) \le s(f, D)$. Stejně se dokáže nerovnost $S(f, D) \le S(f_n, D) + \varepsilon(b - a)$ pro horní součty. Dokázali jsme tedy, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ a každé dělení D intervalu $[a, b]$ platí nerovnosti

$$s(f_n, D) - \varepsilon < s(f, D) \le S(f, D) < S(f_n, D) + \varepsilon.$$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme odpovídající n_0. Nechť $n > n_0$ je libovolné, ale pevné. Protože f_n má na $[a, b]$ Riemannův integrál, můžeme vzít takové dělení D_0, že $0 \le S(f_n, D_0) - s(f_n, D_0) < \varepsilon$. Pro toto dělení pak

$$\begin{aligned} 0 \le S(f, D_0) - s(f, D_0) &\le S(f_n, D_0) + \varepsilon - (s(f_n, D_0) - \varepsilon) \\ &= S(f_n, D_0) - s(f_n, D_0) + 2\varepsilon \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Proto má podle Věty 1.4 funkce f na $[a, b]$ Riemannův integrál. Protože $\int_a^b f$ leží v intervalu $[s(f, D_0), S(f, D_0)]$ obsaženém v intervalu $[s(f_n, D_0) -$

$\varepsilon, S(f_n, D_0) + \varepsilon]$ o délce 3ε a $\int_a^b f_n$ leží v intervalu $[s(f_n, D_0), S(f_n, D_0)]$ také obsaženém v $[s(f_n, D_0) - \varepsilon, S(f_n, D_0) + \varepsilon]$, máme

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| < 3\varepsilon.$$

Dokázali jsme tedy, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n > n_0$

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| < \varepsilon.$$

Tudíž

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

□

Než se pustíme do záměny $\lim_{n\to\infty}$ a derivování, podíváme se na tři příklady.

Příklad 1. Pro posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

a $M = \mathbb{R}$ máme $f_n \rightrightarrows 0$ na M. Posloupnost derivací $f_n'(x) = \cos(nx)$ však nekonverguje na M ani bodově, například pro $x = (2k+1)\pi$ je posloupnost jejich hodnot $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

Příklad 2. Posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

na množině $M = \mathbb{R}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$; pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost

$$\sqrt{x^2} \le f_n(x) \le \sqrt{x^2} + \frac{1}{n}.$$

Každá funkce f_n má na M vlastní derivaci (rovnou $x(x^2 + 1/n^2)^{-1/2}$), ale limitní funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci v bodě nula.

Příklad 3. Nechť $f_n(x) = n$ a $M = \mathbb{R}$. Pak $f_n' = 0 \rightrightarrows 0$ na M, ale posloupnost (f_n) nekonverguje bodově pro žádné $x \in M$.

Vidíme, že stejnoměrná konvergence posloupnosti (f_n) neříká nic o konvergenci derivací (f_n') ani o možnosti záměny pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a derivování—posloupnost derivací nemusí konvergovat ani bodově nebo limitní funkce f nemusí mít vůbec derivaci. Naopak, třetí příklad ukazuje, že stejnoměrná konvergence derivací také nezaručuje konvergenci původní posloupnosti funkcí (to se však spraví, když (f_n) konverguje alespoň v jednom bodě).

Věta 2.5 (záměna pořadí $\lim_{n\to\infty}$ a derivování)
Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu. Předpokládáme, že každá funkce f_n má na (a,b) vlastní derivaci, že $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b) a že posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje pro alespoň jeden bod $x_0 \in (a,b)$. Potom $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro nějakou funkci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a,b).

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Pak pomocí Věty 2.3 spočteme, že limitní funkce f má derivaci a ta se rovná g. Nakonec ověříme předpoklady užití Věty 2.3 v tomto výpočtu. Důkaz bude trochu delší.

Nechť $x_1 \in (a,b)$ je libovolný bod. Máme nalézt jeho okolí U takové, že $f_n \rightrightarrows$ na $(a,b)\cap U$. Stačí dokázat, že $f_n \rightrightarrows$ na $[c,d]$ pro libovolný (kompaktní) interval $[c,d] \subset (a,b)$ obsahující „záchytný" bod x_0—takový interval lze totiž zvolit tak, že oba body x_0 a x_1 leží v (c,d), a pak $U = (c,d)$.

Nechť tedy interval $[c,d] \subset (a,b)$ splňuje, že $x_0, x_1 \in (c,d)$. Ověříme, že posloupnost (f_n) splňuje na $[c,d]$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku (viz Tvrzení 2.1). Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a $x \in [c,d]$ máme nerovnost

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \underbrace{|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))|}_{V_1} + \underbrace{|f_m(x_0) - f_n(x_0)|}_{V_2}.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože posloupnost čísel $(f_n(x_0))$ konverguje, existuje n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow V_2 < \varepsilon$. Výraz V_1 odhadneme Lagrangeovou větou o střední hodnotě, použitou na funkci $f_m - f_n$ na intervalu s krajními body x_0 a x:

$$V_1 = |(x - x_0) \cdot (f_m - f_n)'(\zeta)| = |x - x_0| \cdot |f_m'(\zeta) - f_n'(\zeta)|,$$

kde ζ leží mezi body x_0 a x (bod ζ obecně závisí na m, n i na x, ale díky $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ nám to nevadí). Protože $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b), máme $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$ (podle části

1 Tvrzení 2.2). Existuje tedy n_1, že pro každé $m, n > n_1$ a každé $x \in [c, d]$ platí $|f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$. Tedy

$$m, n > n_1,\ x \in [c, d] \Rightarrow V_1 < (d - c)\varepsilon < (b - a)\varepsilon.$$

Celkem pro $m, n > \max(n_0, n_1)$ a každé $x \in [c, d]$ máme

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq V_1 + V_2 < (b - a)\varepsilon + \varepsilon = (b - a + 1)\varepsilon.$$

Posloupnost (f_n) tak na $[c, d]$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a $f_n \rightrightarrows$ na $[c, d]$. Limitní funkci označíme jako f, máme $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$ a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b).

Nyní spočteme derivaci funkce f v libovolném bodě $x_1 \in (a, b)$ a ukážeme, že $f'(x_1) = g(x_1)$. Vskutku, podle Věty 2.3 máme

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{x \to x_1} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_1} \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{n \to \infty} f'_n(x_1) \\ &= g(x_1). \end{aligned}$$

Větu 2.3 jsme použili při záměně pořadí limit ve třetí rovnosti. Musíme však ještě ověřit, že jsou splněné její předpoklady. Aplikujeme ji na posloupnost funkcí (h_n) (a na bod x_1), kde

$$h_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}.$$

Funkce h_n jsou definované na nějakém prstencovém okolí $P(x_1, \delta)$ bodu x_1 a vlastní limity $\lim_{x \to x_1} h_n(x)$ existují podle předpokladu a rovnají se $f'_n(x_1)$. Zbývá ukázat, že pro nějaké $\delta_0 > 0$ máme $h_n \rightrightarrows h$ na $P(x_1, \delta_0)$, kde

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Je jasné, že $h_n \to h$ na $P(x_1, \delta)$ (protože $f_n \to f$ na $U(x_1, \delta)$). Stačí ukázat, že na nějakém $P(x_1, \delta_0)$ posloupnost (h_n) splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Zvolme $\delta_0 > 0$ tak malé, že $\delta_0 < \delta$ a že $f_n' \rightrightarrows$ na $U(x_1, \delta_0)$ (což lze podle části 1 Tvrzení 2.2, protože $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b)). Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro každé $x \in P(x_1, \delta_0)$ a každé $m, n \in \mathbb{N}$ existuje bod λ ležící mezi x_1 a x takový, že

$$\begin{aligned} |h_m(x) - h_n(x)| &= \left| \frac{f_m(x) - f_n(x) - (f_m(x_1) - f_n(x_1))}{x - x_1} \right| \\ &= |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)|. \end{aligned}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n' \rightrightarrows$ na $U(x_1, \delta_0)$, existuje n_0, že

$$m, n > n_0,\ x \in P(x_1, \delta_0) \Rightarrow |h_m(x) - h_n(x)| = |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)| < \varepsilon.$$

Bolzanova–Cauchyova podmínka je tedy pro posloupnost (h_n) na prstencovém okolí $P(x_1, \delta_0)$ splněna. □

Poznamenejme, že při silnějším předpokladu $f_n' \rightrightarrows g$ na (a, b) můžeme místo na $[c, d]$ pracovat na celém intervalu (a, b) a dostáváme silnější závěr, že i $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b).

Věta 2.6 (Weierstrassova věta o aproximaci polynomy)
Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na kompaktním intervalu. Pak $p_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ pro nějakou posloupnost polynomů (p_n). Jinak řečeno,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \text{polynom } p\ \forall x \in [a, b] :\ |p(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Nebudeme dělat. □

Cvičení 11
Dokažte Weierstrassovu větu místo pro polynomy pro třídu po částech lineárních a spojitých funkcí. To jest, dokažte, že graf každé spojité funkce na kompaktním intervalu se dá libovolně přesně aproximovat lomenou čarou (která se ve svislém směru nikdy od grafu funkce neodchyluje o více než ε).

Řady funkcí. Pro funkce $f_n : M \to \mathbb{R}$ symbol nekonečné řady (nekonačného součtu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

chápeme, stejně jako v případě číselných řad, jako způsob zápisu posloupnosti částečných součtů $(s_n) = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots)$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \quad \text{na} \quad M$$

chápeme jako $s_n = f_1 + \cdots + f_n \rightrightarrows f$ na M. Podobně pro bodovou a lokální konvergenci a pro zápisy typu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$.

Následující tři věty pro řady funkcí jsou důsledky odpovídajících vět pro posloupnosti funkcí.

Věta 2.3' (záměna pořadí sumace a limity v bodě)
Rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)$$

platí za těchto předpokladů: pro nějaké $\delta > 0$ *máme* $f_n : \ P(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$, *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní limita* $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na* $P(x_0, \delta)$.

Věta 2.4' (záměna pořadí sumace a integrování)
Rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)$$

platí za těchto předpokladů: pro každé $n \in \mathbb{N}$ *máme* $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na* $[a, b]$.

Věta 2.5' (záměna pořadí sumace a derivování)
Nechť $f_n : \ (a, b) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, *je posloupnost funkcí definovaná na omezeném otevřeném intervalu. Předpokládáme, že každá funkce* f_n *má na* (a, b) *vlastní derivaci, že* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ *na* (a, b) *a že řada čísel* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *konverguje pro alespoň jeden bod* $x_0 \in (a, b)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ *na* (a, b) *pro nějakou funkci* $f : \ (a, b) \to \mathbb{R}$ *a* $f' = g$ *na* (a, b).

Ze silnějšího předpokladu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows g$ na (a, b) plyne opět i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a, b).

Věta 2.7 (kritéria stejnoměrné konvergence řad)

1. *(Weierstrassovo kritérium) Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, jsou takové funkce, že řada nezáporných čísel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$$

konverguje. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

2. *(Důsledek Diniho věty) Jsou-li funkce $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ na kompaktním intervalu $[a, b]$ spojité a nezáporné a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na $[a, b]$, kde f je též spojitá, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.*

Důkaz. 1. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$ konverguje, splňuje Cauchyovu podmínku pro číselné řady a existuje n_0, že pro každé $n \geq m > n_0$ máme

$$\sum_{i=m+1}^{n} \sup_{x \in M} |f_i(x)| < \varepsilon.$$

Pak ale pro každé $n \geq m > n_0$ a každé $x \in M$ máme

$$\begin{aligned} |f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \dots + f_n(x)| &\leq |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \dots + |f_n(x)| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \sup_{x \in M} |f_i(x)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Posloupnost částečných součtů $(f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots)$ tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku a podle Tvrzení 2.1 máme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

2. Plyne použitím Diniho věty (část 2 Tvrzení 2.2) na posloupnost částečných součtů. □

Věta 2.8 (Abelovo a Dirichletovo kritérium)

Buďte dány dvě posloupnosti funkcí $f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na M, když jsou splněny podmínky 1 nebo podmínky 2.

1. *(Abelovo kritérium) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M; existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|g_n(x)| < c$ (říkáme, že posloupnost (g_n) je stejně omezená); pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.*

2. *(Dirichletovo kriterium) existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$ platí $|f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)| < c$ (říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ má stejně omezené částečné součty); $g_n \rightrightarrows 0$ na M; pro každé $x \in M$ je číselná posloupnost $(g_n(x))$ monotónní.*

Důkaz. Nebudeme dělat. □

Příklady. 1. Odvodíme jiným způsobem Taylorův rozvoj logaritmu. Podle Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \rightrightarrows \quad \text{na } [-r, r] \text{ pro každé } 0 < r < 1.$$

Geometrickou řadu tedy můžeme (podle Věty 2.4') integrovat člen po členu:

$$\begin{aligned} \log(1/(1-r)) &= \int_0^r \frac{\mathrm{dx}}{1-x} = \int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,\mathrm{dx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r x^n \,\mathrm{dx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Takže

$$\log(1/(1-r)) = r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \ldots,\ r \in (-1, 1).$$

2. Podle Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows \quad \text{na } [-R, R] \text{ pro každé } 0 < R.$$

Formálním zderivováním člen po členu dostáváme stejnou řadu, protože $(x^n/n!)' = x^{n-1}/(n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $(x^0/0!)' = 0$. Podle Věty 2.5' se tedy funkce, jež je (lokálně stejnoměrným) součtem této řady na $\mathbb{R}$, rovná své vlastní derivaci. Tato funkce je ovšem e^x, takže jsme jiným způsobem dokázali základní vlastnost exponenciály $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

3. Opět podle Weierstrassova kritéria,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \cos((32)^n \pi x) \rightrightarrows \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Podle Věty 2.3' a jejího důsledku je součtem řady funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je všude spojitá. Na druhou stranu se dá ale dokázat (nebudeme to zde dělat), že tato funkce pro žádné $x \in \mathbb{R}$ nemá derivaci.

Mocninné řady. *Mocninnou řadou* rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Čísla $a_n \in \mathbb{R}$ jsou *koeficienty* a číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ je *střed* mocninné řady. Pro jednoduchost značení se v dalším omezíme na mocninné řady se středem v nule, to jest na řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Všechny výsledky se ale jednoduše přenášejí na řady s obecným středem.

Věta 2.9 (o poloměru konvergence m. řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je mocninná řada a $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ (R je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$) je definováno vztahem

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \quad \text{(kde } 1/0 = +\infty \text{ a } 1/+\infty = 0\text{)}.$$

Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ s $|x| < R$ mocninná řada absolutně konverguje a pro každé $x \in \mathbb{R}$ s $|x| > R$ mocninná řada diverguje.

Důkaz. Nechť nejprve $0 < R < +\infty$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{R}.$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria ze ZS vidíme, že mocninná řada pro $|x| < R$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Pokud $R = +\infty$, je $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0.$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria mocninná řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pokud $R = 0$, je $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ a pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ máme

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty.$$

Mocninná řada tedy pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ diverguje $\square$

Číslu R říkáme *poloměr konvergence mocninné řady* a intervalu $(-R, R)$ *interval konvergence.* Pro $R = 0$ je interval konvergence prázdný, ovšem každá mocninná řada konverguje pro $x = 0$ (k součtu a_0). Pro $|x| = R$, to jest $x = \pm R$, věta o konvergenci neříká nic.

Příklady poloměrů konvergence. Mocninné řady $\sum x^n$, $\sum (n^3 - n^2 + 1)x^n$ a $\sum x^n/n^2$ mají všechny poloměr konvergence rovný 1. Mocninná rada definující exponenciálu, $\sum x^n/n!$, má poloměr konvergence rovný $+\infty$. Naopak

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

má poloměr konvergence rovný nule.

Tvrzení 2.10 (lokálně stejnoměrná konvergence m. řady) *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Potom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{loc}{\rightrightarrows} \quad \text{na } (-R, R).$$

Ekvivalentně řečeno (viz část 1 Tvrzení 2.2), mocninná řada stejnoměrně konverguje na každém kompaktním podintervalu intervalu konvergence.

Důkaz. Stačí se omezit na kompaktní podintervaly $[-S, S]$, kde $0 < S < R$. Na $[-S, S]$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n x^n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^n.$$

Cauchyovo odmocninové kritérium opět dává konvergenci této číselné řady, takže podle Weierstrassova kritéria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[-S, S]$. $\square$

Důsledky. Podle předchozího tvrzení a Vět 2.3', 2.4' a 2.5' můžeme na intervalu konvergence mocninnou řadu limitit v bodě, integrovat a derivovat člen po členu. Nechť má

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

kladný poloměr konvergence $R > 0$. Pak tedy

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \text{ pro každé } x_0 \in (-R, R),$$

takže funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je na $(-R, R)$ spojitá. Dále, mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mají poloměr konvergence rovněž R a na $(-R, R)$ jsou funkce jimi určené (tj. jejich součty) primitivní funkcí, respektive derivací funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tuto derivaci můžeme opět člen po členu derivovat a vidíme, že $f(x)$ má na $(-R, R)$ derivace všech řádů, určené mocninnými řadami získanými derivováním původní mocninné řady člen po členu. Všechny tyto mocninné řady mají stejný poloměr konvergence R.

Věta 2.11 (Abelova věta o m. řadě)
Nechť má $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kladný a konečný poloměr konvergence R a číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje, čili mocninná řada konverguje pro $x = R$. Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \quad \text{na } [0, R] \text{ a } \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Důkaz. Je to důsledek Abelova kritéria a Věty 2.3'. Pro $x \in [0, R]$ píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n R^n}_{f_n} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^n}_{g_n}.$$

Předpoklady Abelova kritéria (část 1 Věty 2.8) jsou splněny: $\sum f_n$ je podle předpokladu konvergentní číselná řada nezávislá na x a proto $\sum f_n$ konverguje stejnoměrně na každé množině, $|g_n(x)| = |(x/R)^n| \leq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [0, R]$ a každá číselná posloupnost $(g_n(x)) = ((x/R)^n)$ je nerostoucí (pro $0 < x < R$ je klesající a pro $x = 0, R$ je konstantní). Tedy $\sum f_n g_n = \sum a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0, R]$. Podle Věty 2.3' o limitění nekonečné řady člen po členu máme

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to R^-} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Pro zajímavost nyní uvedeme *důkaz Abelovy věty bez použití Věty 2.8.* (Dokážeme tak Abelovo kritérium ve speciální případě.) Stačí dokázat, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0, R]$, druhá část je důsledek Věty 2.3'. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $R = 1$ (použijeme substituci $x = Ry$). Máme tedy mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{splňující} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$$

a chceme dokázat, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0, 1]$. Ukážeme, že na $[0, 1]$ je splněna Bolzanova–Cauchyova podmínka.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje (podmínka $\sum f_n \rightrightarrows$ v Abelově kritériu), splňuje Cauchyovu podmínku pro řady a existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq m \geq N \Rightarrow |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$. Fixujeme N a pro $n \geq N$ vezmeme součty

$$A_n = a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n.$$

Víme, že $|A_n| < \varepsilon$ pro každé $n \geq N$. Pro $n > m > N$ rozdíl $r_{n,m} = s_n - s_{m-1}$ částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ napíšeme jako

$$\begin{aligned} r_{n,m} &= a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots + a_n x^n \\ &= (A_m - A_{m-1}) x^m + (A_{m+1} - A_m) x^{m+1} + \cdots + (A_n - A_{n-1}) x^n \\ &= \underbrace{A_m (x^m - x^{m+1}) + A_{m+1} (x^{m+1} - x^{m+2}) + \cdots + A_{n-1} (x^{n-1} - x^n)}_{V_1} \\ &\quad + \underbrace{A_n x^n - A_{m-1} x^m}_{V_2}. \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in [0, 1]$ je $x^k - x^{k+1} = x^k (1 - x) \geq 0$ (podmínka monotonie posloupností $(g_n(x))$ v Abelově kritériu). Výraz V_1 proto můžeme pro $n > m > N$ zdola odhadnout jako

$$V_1 \geq \sum_{i=m}^{n-1} (-\varepsilon)(x^i - x^{i+1}) = -\varepsilon \sum_{i=m}^{n-1} (x^i - x^{i+1}) = -\varepsilon (x^m - x^n)$$

a shora úplně stejně jako

$$V_1 \leq \varepsilon (x^m - x^n).$$

Protože $0 \le x^k \le 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [0,1]$ (podmínka stejné omezenosti posloupnosti (g_n) v Abelově kritériu), máme

$$|V_1| \le |\varepsilon(x^m - x^n)| \le \varepsilon|x^m| + \varepsilon|x^n| \le 2\varepsilon$$

a úplně stejně

$$|V_2| = |A_n x^n - A_{m-1}x^m| \le |A_n x^n| + |A_{m-1}x^m| \le 2\varepsilon.$$

Takže

$$n > m > N, x \in [0,1] \Rightarrow |r_{n,m}| \le |V_1| + |V_2| \le 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.$$

Podle Tvrzení 2.1 tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0,1]$. □

Příklad. S použitím Abelovy věty sečteme řadu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, která konverguje (neabsolutně) podle Leibnizova kritéria. Podle Taylorova rozvoje logaritmu máme

$$\log 2 = \lim_{x \to 1^-} \log(1+x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Řada má tedy součet $\log 2$. (V ZS jsme to už dokázali jiným způsobem, neboť jsme dokázali konvergenci Taylorova rozvoje funkce $\log(1+x)$ na intervalu $(-1,1]$.)

Uvedeme nyní tři příklady použití mocninných řad v kombinatorice a teorii čísel.

Rozklady na lichá čísla a na různá čísla. Nechť $l(n)$ je počet vyjádření čísla $n \in \mathbb{N}$ jako součtu lichých čísel a $r(n)$ je počet jeho vyjádření jako součtu různých čísel, přičemž vyjádření lišící se jen pořadím sčítanců nepovažujeme za různá. Takže

$$\begin{aligned} l(n) &= \#\{(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k : n = m_1 + \cdots + m_k, \\ &\qquad m_1 \ge m_2 \ge \cdots \ge m_k \ge 1, \text{každé } m_i \text{ je liché}\} \\ r(n) &= \#\{(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}^k : n = m_1 + \cdots + m_k, \\ &\qquad m_1 > m_2 > \cdots > m_k \ge 1\}. \end{aligned}$$

Například $l(7) = r(7) = 5$, protože máme rozklady $7, 5+1+1, 3+3+1, 3+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1$ a $7, 6+1, 5+2, 4+3, 4+2+1$.

Tvrzení. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $l(n) = r(n)$.*

Důkaz. Uvážíme mocninné řady (klademe $l(0) = r(0) = 1$)

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l(n)x^n \quad \text{a} \quad R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)x^n.$$

Roznásobením se přesvědčíme, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} L(x) &= (1 + x^{1\cdot 1} + x^{2\cdot 1} + x^{3\cdot 1} + \dots)(1 + x^{1\cdot 3} + x^{2\cdot 3} + x^{3\cdot 3} + \dots) \\ &\quad (1 + x^{1\cdot 5} + x^{2\cdot 5} + x^{3\cdot 5} + \dots)(1 + x^{1\cdot 7} + x^{2\cdot 7} + x^{3\cdot 7} + \dots)\dots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdots \end{aligned}$$

a

$$R(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\dots.$$

Například po roznásobení prvního nekonečného součinu dostaneme koeficent u x^5 ze součinu pouze prvních tří závorek jako

$$(1 \cdot 1 \cdot x^{1\cdot 5} \cdot 1 \cdot 1 \dots) + (x^{2\cdot 1} \cdot x^{1\cdot 3} \cdot 1 \cdot 1 \dots) + (x^{5\cdot 1} \cdot 1 \cdot 1 \dots) = 3x^5,$$

což souhlasí s $l(5) = 3$ (rozklady $5, 3+1+1, 1+1+1+1+1$). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$1 + x^n = \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^n}.$$

Zkrácením dvojčlenů v nichž má x sudý exponent dostáváme

$$\begin{aligned} R(x) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\dots}{(1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots} \\ &= \frac{1}{(1-x^1)(1-x^3)(1-x^5)\dots} \\ &= L(x). \end{aligned}$$

Obě mocninné řady se tudíž rovnají—mají shodné koeficienty a $r(n) = l(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. □

Dá se dokázat, že $L(x)$ a $R(x)$ mají poloměr konvergence rovný 1.

Vzorec pro Fibonacciova čísla. Posloupnost Fibonacciových čísel

$$(F_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots)$$

je definovaná rekurencí $F_0 = F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Odvodíme pro ně explicitní vzorec.

Uvážíme mocninnou řadu

$$F = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \dots .$$

Indukcí se lehce dokáže, že $F_n \leq 2^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $F(x)$ proto určitě konverguje na intervalu $(-1/2, 1/2)$. (Ve skutečnosti, jak hned uvidíme, má $F(x)$ ještě větší poloměr konvergence, rovný $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.61803\dots$). Máme

$$\begin{aligned}
F - xF - x^2F &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= \underbrace{F_0x^0 + F_1x^1 - F_0x^1}_{=1} + \sum_{n=2}^{\infty} (\underbrace{F_n - F_{n-1} - F_{n-2}}_{=0,\ \text{podle rekurence}})x^n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tedy $(1 - x - x^2)F = 1$ a

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Tuto racionální funkci rozložíme na parciální zlomky:

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x},$$

kde α, β, a, b jsou jisté konstanty. Pak

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x} \\
&= a\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n + b\sum_{n=0}^{\infty} (\beta x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (a\alpha^n + b\beta^n)x^n
\end{aligned}$$

a

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n.$$

Zbývá určit α, β, a, b. Z $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ máme $\alpha + \beta = 1$ a $\alpha\beta = -1$. Čísla α a β jsou tedy kořeny polynomu $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - x - 1$, čili $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ a $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$. Z rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= F_0 = a + b \\ 1 &= F_1 = a\alpha + b\beta \end{aligned}$$

dostáváme (s využitím vztahu $\alpha + \beta = 1$)

$$\begin{aligned} a &= \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \\ b &= \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha} = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Takže $F_n = a\alpha^n + b\beta^n = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/\sqrt{5}$ a celkem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Rozklady $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ na disjunktní aritmetické posloupnosti. Množinu $\mathbb{N}_0$ nezáporných celých čísel můžeme rozložit na sudá a lichá čísla:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 2, 4, 6, \dots\} \cup \{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Obě množiny jsou disjunktní (tj. každé číslo z $\mathbb{N}_0$ leží právě v jedné z nich a žádné v obou) a jsou to vlastně nekonečné aritmetické posloupnosti se stejnou diferencí 2. Obecná AP (aritmetická posloupnost) v $\mathbb{N}_0$ je množina

$$a + d\mathbb{N}_0 := \{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\} = \{a + kd : \ k = 0, 1, 2, \dots\},$$

kde $a \in \mathbb{N}_0$ je první člen a $d \in \mathbb{N}$ (nechceme $d = 0$) je diference. Jiný rozklad $\mathbb{N}_0$ na disjunktní AP-i je

$$\mathbb{N}_0 = (0 + 2\mathbb{N}_0) \cup (1 + 4\mathbb{N}_0) \cup (3 + 4\mathbb{N}_0),$$

kde máme jednu AP s diferencí 2 a dvě AP-i s diferencí 4. Dá se ale $\mathbb{N}_0$ rozložit na (alespoň dvě) disjunktní AP-i, aniž by se nějaká diference opakovala?

Tvrzení. *Rozklad* $\mathbb{N}_0$ *na alespoň dvě disjunktní aritmetické posloupnosti se vzájemně různými diferencemi neexistuje. Jinak řečeno, v každém rozkladu* $\mathbb{N}_0$ *na dvě a více disjunktních aritmetických posloupností se alespoň jedna diference musí opakovat.*

Důkaz. Pro množinu $X \subset \mathbb{N}_0$ uvážíme mocninnou řadu

$$F_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n) z^n,$$

kde χ je charakteristická funkce X, to jest

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \dots\ n \in X \\ 0 & \dots\ n \notin X. \end{cases}$$

Například

$$F_{\mathbb{N}_0}(z) = 1+z+z^2+\cdots = \frac{1}{1-z} \ \text{ a } \ F_{a+d\mathbb{N}_0}(z) = z^a+z^{a+d}+z^{a+2d}+\cdots = \frac{z^a}{1-z^d}.$$

Předpokládejme nyní pro spor, že

$$\mathbb{N}_0 = (a_1 + d_1\mathbb{N}_0) \cup (a_2 + d_2\mathbb{N}_0) \cup \cdots \cup (a_k + d_k\mathbb{N}_0)$$

je rozklad na $k \geq 2$ disjunktních AP-í s různými diferencemi $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_k$. Pro odpovídající mocninné řady to znamená (disjunktní sjednocení množin se překládá do součtu mocninných řad), že

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{N}_0}(z) &= F_{a_1+d_1\mathbb{N}_0}(z) + F_{a_2+d_2\mathbb{N}_0}(z) + \cdots + F_{a_k+d_k\mathbb{N}_0}(z) \\ &\text{čili} \\ \frac{1}{1-z} &= \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \cdots + \frac{z^{a_k}}{1-z^{d_k}}, \end{aligned}$$

kde $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$. Uvedené mocninné řady konvergují pro $|z| < 1$ i v oboru komplexních čísel. Komplexní číslo

$$z_0 = \mathrm{e}^{2\pi i/d_k} = \cos(2\pi/d_k) + i\sin(2\pi/d_k),$$

což je jedna z d_k d_k-tých odmocnin z jedné (leží na jednotkové kružnici), má tu vlastnost, že po dosazení za z se poslední jmenovatel anuluje (protože $z_0^{d_k} = 1$), ale všechny ostatní zůstávají nenulové (protože $z_0^e \neq 1$ pro každé $e \in \mathbb{N}$, $e < d_k$). Pro posloupnost komplexních čísel (z_n) takovou, že $z_n \to z_0$

pro $n \to \infty$, ale $|z_n| < 1$ pro každé n (aby mocninné řady konvergovaly, ale dá se ukázat, že tuto podmínku lze vynechat) jdou všechny zlomky v poslední rovnosti kromě posledního ke konečným limitám (totiž k hodnotám vzniklým dosazením z_0 za z), ale poslední zlomek jde do nekonečna, sice

$$\left|\frac{z^{a_k}}{1 - z^{d_k}}\right| \to +\infty, \quad \text{pro} \quad z \to z_0.$$

Proto rovnost nemůže platit a dostáváme spor. □

Fourierovy řady. *Trigonometrickou řadou* budeme rozumět nekonečnou řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ jsou pevně dané reálné koeficienty a proměnná x probíhá $\mathbb{R}$. Pro danou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ budeme zkoumat otázku, kdy se dá vyjádřit jako součet takové řady funkcí a jaké povahy je konvergence. Oproti mocninným řadám lze trigonometrickými řadami vyjádřit širší třídu funkcí. Jak jsme viděli, součet mocninné řady s kladným poloměrem konvergence je spojitá funkce, která má na intervalu konvergence derivace všech řádů. Funkce, která v nějakém bodě nemá derivaci vůbec nebo ji nemá vlastní (např. $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$), neřkuli nespojitá funkce, se proto nedá vyjádřit součtem mocninné řady. Uvidíme, že mnoho takových funkcí (např. zmíněná $|x|$ na intervalu $(-1, 1)$ nebo i různé nespojité funkce) lze vyjádřit součtem vhodné trigonometrické řady, tzv. *Fourierovy řady* dané funkce.

Protože $\cos(nx)$ a $\sin(nx)$ jsou 2π-periodické funkce, je jasné, že každý bodový součet trigonometrické řady je také 2π-periodická funkce. Musíme se proto omezit na třídu těchto funkcí, jejichž množinu označíme $P_{2\pi}$, to jest

$$P_{2\pi} = \{f : f \text{ je funkce z } \mathbb{R} \text{ do } \mathbb{R} \text{ splňující } f(x + 2\pi) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Každá funkce $f \in P_{2\pi}$ je jednoznačně určená svými hodnotami na intervalu $[-\pi, \pi)$ (nebo jakémkoli jiném intervalu tvaru $[a, a + 2\pi)$).

Pro $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, tj. funkce s Riemannovým integrálem na $[-\pi, \pi]$, definujeme značení

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg.$$

Z vlastností integrálu snadno plyne, že $\forall\ f_1, f_2, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ a $\forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ platí:

- (symetrie) $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_2, f_1 \rangle$;
- (bilinearita) $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2, g \rangle = a_1 \langle f_1, g \rangle + a_2 \langle f_2, g \rangle$ a stejně (díky symetrii) ve druhé souřadnici;
- (positivní semidefinitnost) $\langle g, g \rangle \geq 0$.

Máme tak skoro všechny vlastnosti skalárního součinu, kromě $\langle g, g \rangle = 0 \Rightarrow g = 0$, která není splněna (z nulovosti integrálu neplyne nulovost integrandu, i když je nezáporný).

Tvrzení 2.12 (ortogonální systém sinů a cosinů)
Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$ máme

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0.$$

Pro každá dvě čísla $m, n \in \mathbb{N}_0$, pokud nejsou současně nulová, máme

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases}$$

Pro $m = n = 0$ máme $\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0$ a $\langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi$.

Důkaz. Poslední část tvrzení je zřejmá. Dokážeme první rovnost. Označíme si integrál

$$I = \langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) \, \mathrm{d}x.$$

Můžeme předpokládat, že $m \neq 0$ (pro $m = 0$ dokazovaná rovnost jistě platí). Integrace per partes se $\sin(mx) = \left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\right)'$ dává

$$I = \underbrace{\left[-\frac{1}{m}\cos(mx)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0,\text{ funkce v } [\dots] \text{ je } 2\pi\text{-periodická}} - \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) \, \mathrm{d}x.$$

Pokud $m = n$, dostali jsme týž integrand a máme vztah $I = -I$, takže $2I = 0$ a $I = 0$. Pokud $m \neq n$, poslední integrál ještě jednou stejným způsobem transformujeme pomocí per partes a dostaneme výchozí integrand:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = 0 - \frac{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) \, \mathrm{d}x = -\frac{n}{m} I.$$

Takže

$$I = \frac{n^2}{m^2} I$$

a $(1 - \frac{n^2}{m^2})I = 0$, čili (díky $1 - \frac{n^2}{m^2} \neq 0$) $I = 0$.

Dokážeme druhou rovnost. Pro $m \neq n$ a $m \neq 0$ stejným výpočtem dostaneme dvojím per partes pro $I = \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle$, respektive $I = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle$, opět vztah $I = \frac{n^2}{m^2} I$ a $I = 0$. Pro $m = n \neq 0$ máme rovnost

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\,\mathrm{dx} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,\mathrm{dx}.$$

Ta plyne z posunu argumentů sinu a cosinu

$$\cos(mx) = \sin(mx + \pi/2) = \sin(m(x + \pi/2m))$$

(potřebujeme $m \neq 0$) a faktu, že integrace 2π-periodické funkce přes každý interval délky 2π dává tutéž hodnotu (jednoduchá substituce). Ale také

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\,\mathrm{dx} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,\mathrm{dx} &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2(mx) + \cos^2(mx))\,\mathrm{dx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{dx} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Takže pro $m = n \neq 0$ máme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\,\mathrm{dx} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,\mathrm{dx} = \pi.$$

$\square$

Fourierovy koeficienty $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ jsou definovány jako

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\langle f, \cos(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{dx},\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{\langle f, \sin(nx) \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{dx},\ n = 1, 2, \ldots\ . \end{aligned}$$

Proč jsou tak definované? Předpokládejme, že funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ je na $[-\pi, \pi]$ stejnoměrným součtem trigonometrické řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Z vlastností součinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ plyne, že pak a_n a b_n musejí být rovny Fourierovým koeficientům funkce f. Například, pro $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
\langle f, \cos(kx) \rangle &= \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \cos(kx) \right\rangle \\
&= (a_0/2)\langle \cos(0x), \cos(kx) \rangle \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \langle \cos(nx), \cos(kx) \rangle + b_n \langle \sin(nx), \cos(kx) \rangle) \\
&= a_k \langle \cos(kx), \cos(kx) \rangle \text{ pro } k > 0 \\
&\quad \text{ a } (a_0/2)\langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle \text{ pro } k = 0 \\
&= \pi a_k,
\end{aligned}$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili stejnoměrnou konvergenci (umožňující zaměnit pořadí integrace a nekonečné sumace, Věta 2.4') a vlastnosti skalárního součinu a ve třetí a čtvrté rovnosti jsme použili Tvrzení 2.12. Takže $a_k = \langle f, \cos(kx) \rangle / \pi$ a podobně pro b_k, $k \in \mathbb{N}$.

Fourierovou řadou funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ rozumíme trigonometrickou řadu, jejíž koeficienty a_n a b_n jsou rovny Fourierovým koeficientům funkce f. Jak jsme viděli, pokud nějaká trigonometrická řada stejnoměrně konverguje k f, musí to být její Fourierova řada. Ukážeme postačující podmínky na funkci f, aby její Fourierova řada k ní konvergovala.

Věta 2.13 (Besselova nerovnost a R.-L. lemma)
Nechť $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ a čísla $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

1. *(Besselova nerovnost). Platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{\langle f, f \rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

   Speciálně, řada čtverců Fourierových koeficientů funkce f konverguje.

2. *(Riemannovo–Lebesgueovo lemma). Pro $n \to \infty$ platí, že $a_n \to 0$ a $b_n \to 0$, tedy*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{dx} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{dx} = 0.$$

Důkaz. 1. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme $s_n = s_n(x)$ částečný součet Fourierovy řady funkce f:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),\ a_k = \frac{\langle f, \cos(kx)\rangle}{\pi},\ b_k = \frac{\langle f, \sin(kx)\rangle}{\pi}.$$

Díky vlastnostem skalárního součinu máme nerovnost

$$0 \le \langle f - s_n, f - s_n\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle f, s_n\rangle + \langle s_n, s_n\rangle,$$

tudíž

$$2\langle f, s_n\rangle - \langle s_n, s_n\rangle \le \langle f, f\rangle.$$

Ale

$$\begin{aligned}
\langle f, s_n\rangle &= \frac{a_0}{2}\langle f, \cos(0x)\rangle + \sum_{k=1}^{n}(a_k\langle f, \cos(kx)\rangle + b_k\langle f, \sin(kx)\rangle) \\
&= \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right),
\end{aligned}$$

díky linearitě skalárního součinu a díky definici čísel a_k a b_k. Pro jednodušší značení si zavedeme symboly a_k' a b_k', kde $a_0' = a_0/2$, $a_k' = a_k$ pro $k > 0$, $b_0' = 0$ a $b_k' = b_k$ pro $k > 0$. Pak díky linearitě skalárního součinu a díky Tvrzení 2.12 máme

$$\begin{aligned}
\langle s_n, s_n\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{n}(a_k' \cos(kx) + b_k' \sin(kx)), \sum_{l=0}^{n}(a_l' \cos(lx) + b_l' \sin(lx))\right\rangle \\
&= \sum_{k,l=0}^{n}(a_k'a_l'\langle\cos(kx), \cos(lx)\rangle + 2a_k'b_l'\langle\cos(kx), \sin(lx)\rangle \\
&\quad + b_k'b_l'\langle\sin(kx), \sin(lx)\rangle) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left((a_k')^2\langle\cos(kx), \cos(kx)\rangle + (b_k')^2\langle\sin(kx), \sin(kx)\rangle\right) \\
&= \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).
\end{aligned}$$

Celkem, pro každé $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right) \le \langle f, f\rangle.$$

Číslo $\langle f, f\rangle/\pi$ je tedy horním odhadem všech částečných součtů řady $a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, která má nezáporné členy. Tato řada tedy konverguje a $\langle f, f\rangle/\pi$ je horním odhadem i pro její součet.

2. Z konvergence řady čtverců Fourierových koeficientů plyne, že $\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2) = 0$ (nutná podmínka konvergence číselné řady). Tedy (např. díky nerovnosti $|a_n|, |b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$) i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. $\square$

Řekneme, že funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[a, b]$ *po částech hladká*, když existuje konečná množina $A \subset [a, b]$ taková, že f má na množině $[a, b]\backslash A$ spojitou první derivaci f' a v každém bodu $a \in A$ má f i její derivace f' vlastní jednostranné limity. Tyto jednostranné limity budeme značit $f(a+0)$ a $f(a-0)$, tedy

$$f(a+0) := \lim_{x\to a^+} f(x) \quad \text{a} \quad f(a-0) := \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Jinak řečeno, f je na $[a, b]$ po částech hladká, když existuje dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$$

intervalu $[a, b]$ takové, že f má na každém intervalu (a_i, a_{i+1}) spojitou první derivaci (sama f je tedy na tomto intervalu také spojitá) a v dělících bodech existují vlastní jednostranné limity $f(a_i+0), f(a_i-0), f'(a_i+0), f'(a_i-0)$. (Stačí předpokládat existenci vlastních limit $f'(a_i+0), f'(a_i-0)$, existence vlastních limit $f(a_i+0), f(a_i-0)$ pak plyne Lagrangeovou větou o střední hodnotě.) Tato vlastnost funkce f už stačí k tomu, aby její Fourierova řada bodově konvergovala, v bodech spojitosti k funkční hodnotě a v dělících bodech a_i k aritmetickému průměru jednostranných limit. Po částech hladká funkce je zřejmě integrovatelná (podle Věty 1.8), protože je na $[a, b]$ omezená (proč?) a množina jejích bodů nespojitosti je obsažená v A a je tedy konečná.

Věta 2.14 (Dirichletova o bodové konvergenci F. řady)
Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Její Fourierova řada pak na $\mathbb{R}$ bodově konverguje k funkci

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

V každém bodu spojitosti x funkce f tedy její Fourierova řada konverguje k číslu $f(x)$.

K důkazu Dirichletovy věty budeme potřebovat následující lemma.

Lemma (o Dirichletově jádře)
Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a*

$$J_n(x) := \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx).$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$ *s* $k \in \mathbb{Z}$, *máme*

$$J_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$$

a také

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} J_n(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} J_n(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}.$$

Důkaz. Pro $q := \mathrm{e}^{ix}$ ($i = \sqrt{-1}$, $x \in \mathbb{R}$) máme

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\left(q^{-n} + q^{-n+1} + \cdots + q^{-1} + q^0 + q^1 + \cdots + q^{n-1} + q^n\right),$$

protože $q^{-k} + q^k = \cos(kx) + i\sin(kx) + \cos(-kx) + i\sin(-kx) = 2\cos(kx)$. Takže

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{q^{-n}}{2}\left(1 + q + \cdots + q^{2n-1} + q^{2n}\right) \\
&= \frac{q^{-n}}{2} \cdot \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^{n+1} - q^{-n}}{q - 1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^{n+1/2} - q^{-n-1/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2i\sin((n+1/2)x)}{2i\sin(x/2)} \\
&= \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Co se týče integrálů, máme

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} J_n = \langle J_n, 1\rangle &= \langle 1/2, 1\rangle + \langle \cos x, 1\rangle + \cdots + \langle \cos(nx), 1\rangle \\
&= \pi + 0 + \cdots + 0 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

podle Tvrzení 2.12. Proto $\int_{-\pi}^{0} J_n + \int_0^{\pi} J_n = \int_{-\pi}^{\pi} J_n = \pi$. Funkce J_n je součet sudých funkcí a je tedy také sudá, z čehož plyne rovnost $\int_{-\pi}^{0} J_n = \int_0^{\pi} J_n$. Takže $\int_{-\pi}^{0} J_n = \int_0^{\pi} J_n = \pi/2$. $\square$

Důkaz Věty 2.14. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je pevné. Funkci $G : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definujeme jako $G(0) = 0$ (na této hodnotě nezáleží, může to být cokoli) a jinak předpisem

$$G(u) = \begin{cases} \frac{f(x+u)-f(x-0)}{2\sin(u/2)} & \text{pro } u \in [-\pi, 0) \\ \\ \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin(u/2)} & \text{pro } u \in (0, \pi]. \end{cases}$$

($G(u)$ závisí i na parametru x, ale pro jednodušší zápis to ve značení pomineme.) Podle l'Hospitalova pravidla spočítáme limitu

$$\lim_{u \to 0^-} G(u) = \lim_{u \to 0^-} \frac{f'(x+u)}{\cos(u/2)} = f'(x-0).$$

(Pro $u \to 0^-$ máme, ať je x dělící bod a_i nebo ne, $f(x+u) - f(x-0) \to 0$ díky předpokladu o f a také i $2\sin(u/2) \to 0$. Díky předpokladu o f také pro každé x a $u \to 0^-$ existuje vlastní limita podílu derivací čitatele a jmenovatele $f'(x+u)/\cos(u/2)$.) Úplně stejně

$$\lim_{u \to 0^+} G(u) = f'(x+0).$$

Odtud vyplývá, že $G(u)$ je na intervalu $[-\pi, \pi]$ omezená. (Mimo prstencové okolí $P(0, \delta)$ se jmenovatel $2\sin(u/2)$ nepřibližuje k nule a čitatel je omezená funkce, protože f je omezená. Na $P(0, \delta)$ omezenost plyne z existence právě spočítaných vlastních jednostranných limit.) Dále má $G(u)$ na $[-\pi, \pi]$ jen konečně mnoho bodů nespojitosti, protože může být nespojitá pouze v bodech $a_i - x$, kde a_i jsou body dělení intervalu $[-\pi, \pi]$ pro po částech hladkou f, a případně v nule. Podle Věty 1.8 je tedy G na $[-\pi, \pi]$ riemannovsky integrovatelná.

Nechť $s_n = s_n(x)$ je n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f v daném bodu x:

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

kde

$$a_k = \frac{\langle f(t), \cos(kt) \rangle}{\pi} \quad \text{a} \quad b_k = \frac{\langle f(t), \sin(kt) \rangle}{\pi}.$$

Rozdíl $s_n(x)$ a $(f(x+0)+f(x-0))/2$, který nás zajímá, vyjádříme za chvíli pomocí funkce $G(u)$ jako

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{\langle G(u), \sin((n+1/2)u)\rangle}{\pi}.$$

Součtový vzorec pro sinus ($\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$) dává

$$\begin{aligned} s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\Big(\big\langle G(u)\cos(u/2), \sin(nu)\big\rangle + \\ &\qquad \big\langle G(u)\sin(u/2), \cos(nu)\big\rangle\Big). \end{aligned}$$

Funkce $G(u)\cos(u/2)$ a $G(u)\sin(u/2)$ jsou na $[-\pi,\pi]$ riemannovsky integrovatelné (protože G je a součin zachovává integrovatelnost). Podle R.-L. lematu (část 2 Věty 2.13) tedy pro $n \to \infty$ oba předchozí skalární součiny jdou k nule. Proto také

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty$$

a věta je dokázána.

Zbývá ovšem odvodit vyjádření tohoto rozdílu pomocí $G(u)$. Díky linearitě skalárního součinu a definici koeficientů a_k a b_k a podle součtového vzorce pro cosinus ($\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$) máme

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\left\langle f(t), \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx))\right\rangle_t \\ &= \frac{1}{\pi}\left\langle f(t), \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k(t-x))\right\rangle_t \\ &= \frac{1}{\pi}\left\langle f(x+u), \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right\rangle_u \\ &= \frac{1}{\pi}\left\langle f(x+u), J_n(u)\right\rangle_u \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+u)J_n(u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x+u)J_n(u)\,\mathrm{d}u\right) \end{aligned}$$

(ve třetí rovnosti jsme za t dosadili $x+u$ a v indexu vyznačujeme proměnnou, podle níž se ve skalárním součinu integruje). Podle předchozího lemmatu máme

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)J_n(u)\,\mathrm{du} \;\text{ a }\; \frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)J_n(u)\,\mathrm{du}.$$

Takže rozdíl

$$s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

se rovná

$$\frac{\int_{-\pi}^{0}(f(x+u)-f(x-0))J_n(u)\,\mathrm{du} + \int_{0}^{\pi}(f(x+u)-f(x+0))J_n(u)\,\mathrm{du}}{\pi}.$$

Podle lemmatu máme $J_n(u) = \sin((n+1/2)u)/2\sin(u/2)$. Podle definice funkce $G(u)$ předchozí výraz upravíme na

$$\begin{aligned} s_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} G(u)\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{du} + \\ &\quad \int_{0}^{\pi} G(u)\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{du}\Big) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(u)\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{du} \\ &= \frac{\langle G(u), \sin((n+1/2)u)\rangle}{\pi}. \end{aligned}$$

□

Pouze bodová konvergence Fourierovy řady je slabá vlastnost, protože, jak víme, obecně neumožňuje limitění, derivování a integrování řady člen po členu. Pokud je funkce f na $[-\pi,\pi]$ po částech hladká a současně nespojitá v alespoň jednom bodě, konvergence její Fourierovy řady k $(f(x+0)+f(x-0))/2$ není na $[-\pi,\pi]$ stejnoměrná (kdyby byla, funkce $(f(x+0)+f(x-0))/2$ by jako stejnoměrný součet spojitých funkcí musela být spojitá, což není). Nyní ukážeme, že pro po částech hladkou a spojitou f její Fourierovy řada konverguje stejnoměrně.

Věta 2.15 (o stejnoměrné konvergenci F. řady)
Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a její zúžení na interval $[-\pi,\pi]$ je po částech hladké. Nechť je navíc f spojitá na $\mathbb{R}$. Pak je f na $\mathbb{R}$ stejnoměrným součtem své Fourierovy řady.

Důkaz. Podle předešlé věty je f na $\mathbb{R}$ bodovým součtem své Fourierovy řady:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \to f(x) \quad \text{na} \quad \mathbb{R},$$

kde a_n a b_n jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Když dokážeme, že číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

konverguje, budeme hotovi. Pak totiž (zde $M = \mathbb{R}$, resp. $M = [-\pi, \pi]$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty$$

a podle Weierstrassova kritéria (část 1 Věty 2.7) Fourierova řada konverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

Podle Besselovy nerovnosti víme, že $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ konverguje, ale to nám není nic platné ($|a_n| \in [0, 1)$ je typicky mnohem větší než a_n^2). Pomohou nám Fourierovy koeficienty derivace funkce f. Označíme je jako α_n a β_n, to jest

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) \, \mathrm{dx} \quad \text{a} \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) \, \mathrm{dx}.$$

(Derivace f' není obecně definovaná v dělicích bodech. Těch je ale jen konečně mnoho, takže ji můžeme v nich libovolně dodefinovat. Dostaneme $f' \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ podle Věty 1.8, protože f' pak bude omezená a spojitá až na konečně mnoho bodů.) Integrací per partes (Věta 1.13) dostaneme vztah

$$\begin{aligned}
\pi \alpha_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) \, \mathrm{dx} \\
&= \underbrace{\big[f(x) \cos(nx)\big]_{-\pi}^{\pi}}_{=c-c=0} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{dx} \\
&= n \pi b_n.
\end{aligned}$$

Podobně se per partes spočítá, že $\pi \beta_n = -n\pi a_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tak máme

$$a_n = -\frac{\beta_n}{n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{\alpha_n}{n}.$$

Podle Besselovy nerovnosti (část 1 Věty 2.13) řada $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$ konverguje k součtu $c > 0$. Řada převrácených čtverců $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ též konverguje, k součtu $d > 0$ (později ukážeme, že $d = \pi^2/6$). Podle Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme horní odhad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|a_k| &= \sum_{k=1}^{n}\frac{|\beta_k|}{k} \le \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}1/k^2\right)}\\ &\le \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2\right)}\\ &= \sqrt{cd}.\end{aligned}$$

Tudíž řada $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konverguje a úplně stejně se ukáže, že i řada $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ konverguje. Jejich součet $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ také konverguje a jsme hotovi. □

Jsme opravdu hotovi? Kde jsme v důkazu podstatným způsobem použili spojitost f? Který jeho krok selže pro nespojitou f? (Jak víme, pro nespojitou f její Fourierova řada nekonverguje stejnoměrně, tudíž něco selhat musí.) Je to integrace per partes funkce $f'(x)\cos(nx)$. V tomto kroku jsme dokonce, jak si pozorný čtenář všiml, podváděli (v zájmu plynulosti výkladu, samozřejmě!), protože předpoklady Věty 1.13 nejsou pro naše funkce $f(x)$ a $g(x) = \cos(nx)$ splněné. Věta 1.13 požaduje všude spojitost derivací f' a g', což f nesplňuje, neboť f' může být i po dodefinování v konečně mnoha bodech nespojitá.

Je důkaz vůbec správně? Ano, je, ale musíme použít obecnější verzi integrování per partes, kterou teď vyslovíme a dokážeme a která ozřejmí roli spojitosti f v důkazu.

Tvrzení (obecnější verze první části Věty 1.13 o per partes)
Nechť jsou funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ na $[a, b]$ spojité, mají s možnou výjimkou konečně mnoha bodů intervalu $[a, b]$ spojité derivace f' a g' a tyto derivace jsou na $[a, b]$ omezené. Potom

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Důkaz. Derivace f' a g' v oněch konečně mnoha bodech libovolně dodefinujeme, čímž se omezenost neporuší. Funkce f, g jsou na $[a, b]$ spojité, tedy omezené. Funkce $f'g$, fg' a $f'g + fg'$ jsou tedy na $[a, b]$ omezené a spojité s možnou výjimkou konečně mnoha bodů, speciálně jsou integrovatelné. Podle Leibnizovy formule pro derivaci součinu platí až na konečně mnoho bodů intervalu $[a, b]$ rovnost $(fg)' = f'g + fg'$. Funkce fg je také na $[a, b]$ spojitá. Je tedy zobecněnou primitivní funkcí k funkci $f'g + fg'$ a podle části 1 Věty 1.9 a hlavně podle části 2 Věty 1.12' platí

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b (f'g + fg') = \big[fg\big]_a^b,$$

což je až na úpravu vzorec pro integraci per partes. $\square$

Podle tohoto tvrzení už můžeme bez obav pro spojitou a po částech hladkou funkci f integrovat per partes funkci $f'(x)g(x) = f'(x)\cos(nx)$. Bez spojitosti f ale vzorec pro integraci per partes nefunguje, protože zobecněná primitivní funkce fg pak není jednoznačná až na aditivní konstantu (viz důkaz části 2 Věty 1.12').

Příklady. 1. Rozvineme funkci $f(x) = x^2$, definovanou na intervalu $[-\pi, \pi)$ a 2π-periodicky rozšířenou na $\mathbb{R}$, do Fourierovy řady. Je to sudá funkce, tudíž jsou její sinové Fourierovy koeficienty b_n nulové (integrál liché funkce přes $[-\pi, \pi]$ je nula). Cosinové Fourierovy koeficienty jsou (integrál sudé funkce přes $[-\pi, \pi]$ je dvojnásobek integrálu přes $[0, \pi]$)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \,\mathrm{dx} = \frac{2\pi^2}{3}$$

a, pro $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \overbrace{\cos(nx)}^{=(\sin(nx)/n)'} \,\mathrm{dx} \\ &= \frac{2}{\pi n}\underbrace{\big[x^2\sin(nx)\big]_0^\pi}_{=0} - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{dx} \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\big[x\cos(nx)\big]_0^\pi}_{=\pi(-1)^n} - \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{dx}}_{=0} \\ &= (-1)^n\frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Protože daná funkce $f(x) = x^2$ je spojitá a po částech hladká, podle Věty 2.15 máme
$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2} \rightrightarrows f(x) \quad \text{na } \mathbb{R}.$$
Dosazením $x = \pi$ dostáváme
$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
Podobně pro $x = 0$ máme
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

2. Rozvineme funkci $f(x) = \pi - x$, definovanou na intervalu $[-\pi, \pi)$ a 2π-periodicky rozšířenou na $\mathbb{R}$, do Fourierovy řady. Nultý cosinový F. koeficient je
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\left(2\pi^2 - [x^2/2]_{-\pi}^{\pi}\right) = 2\pi.$$
Další cosinové koeficinty už jsou nulové, protože pro $n \in \mathbb{N}$ máme
$$\langle f(x), \cos(nx)\rangle = \pi\langle 1, \cos(nx)\rangle - \langle x, \cos(nx)\rangle = 0 - 0 = 0$$
(první nulu máme podle Tvrzení 2.12 a druhou díky integraci liché funkce přes $[-\pi, \pi]$). Sinové F. koeficienty pro $n \in \mathbb{N}$ jsou
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{[(\pi - x)(-1/n)\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=2\pi(-1)^n/n} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{dx}}_{=0}\Bigg) \\ &= (-1)^n\frac{2}{n}. \end{aligned}$$
Daná funkce je po částech hladká, ale v bodech $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je nespojitá. Podle Věty 2.14 máme
$$\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx) \to f(x) \quad \text{na } \mathbb{R}\backslash\{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}.$$

V bodech $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tato Fourierova řada konverguje k hodnotě $(0+2\pi)/2 = \pi$ (zatímco $f((2k+1)\pi) = 2\pi$). Dosazením $x = \pi/2$ po jednoduchých úpravách dostaneme rovnost

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

3 Metrické prostory

Metrický prostor je dvojice (M, d), kde M je množina a

$$d:\ M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

je funkce, zvaná *metrika*, splňující tři axiomy:

a) $d(x,y) = d(y,x)$ (symetrie),
b) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ a
c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Metrické prostory jsou abstrakcí jevu vzdálenosti. Poznamenejme, že nezápornost hodnot metriky se nemusí předpokládat, vyplývá už z axiomů b) a c).

Izometrie je bijekce $f:\ M_1 \to M_2$ mezi metrickými prostory (M_1, d_1) a (M_2, d_2), která zachovává vzdálenosti: $d_1(x,y) = d_2(f(x), f(y))$ pro všechny $x, y \in M_1$. Existuje-li taková bijekce, jsou prostory M_1 a M_2 *izometrické*, to jest prakticky nerozlišitelné, izomorfní.

Příklady metrických prostorů. 1. Nechť $M = \mathbb{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$)

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

Axiomy a) a b) se ověří lehce, ovšem důkaz trojúhelníkové nerovnosti je netriviální. Pro $n = 1$ dostáváme metriku $|x - y|$ a pro $p = 2, n \geq 2$ *euklidovskou metriku*

$$d_2(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Euklidovskými prostory budeme nadále rozumět metrické prostory $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Pro $p = 1, n \geq 2$ dostáváme tzv. *pošťáckou metriku* a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

(dokažte jako cvičení).

2. Jako M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f : X \to \mathbb{R}$, kde X je nějaká množina, a pak na M máme *supremovou metriku*

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Pokud $M = \mathcal{C}[a, b]$ (množina všech reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a, b]$), supremum se vždy nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

3. Vezměme $M = \mathcal{C}[a, b]$ a reálné číslo $p \geq 1$. Podobně jako v prvním příkladu máme na M metriky

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Hodnota $p = 1$ dává *integrální metriku* a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu (dokažte jako cvičení). Důležitý je opět případ $p = 2$. Co je na exponentu $p = 2$ zvláštního? Ukazuje se, že metrika $d_2(\cdot, \cdot)$ (zde i v prvním příkladu) je odvozena ze skalárního součinu na jistém vektorovém prostoru, a proto má řadu pěkných a důležitých vlastností.

Vezmeme-li $M = \mathcal{R}[a, b]$ (množina všech funcí majících na $[a, b]$ Riemannův integrál), je $d_p(f, g)$ definována, ale nesplňuje axiom b) a nedostáváme metriku. Změníme-li například hodnotu funkce $f \in R(a, b)$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in R(a, b)$, ale $d_p(f, f_0) = 0$. Tato potíž se odstraní tak, že místo $R(a, b)$ pracujeme s $R(a, b)/\sim$, kde $\sim$ je vhodná relace ekvivalence; nebudeme se pouštět do podrobností.

4. Souvislý graf $G = (M, E)$ s množinou vrcholů M definuje metriku

$$d(u, v) = \#\ \text{hran na (nějaké) nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v.$$

5. Položme $M = \mathbb{Z}$ (množina celých čísel) a vezměme nějaké prvočíslo p (třeba $p = 29$). Pro $z \in \mathbb{Z}$ jako $m_p(z)$ označíme největší celé číslo $e \geq 0$

takové, že p^e dělí z; $m_p(0) := \infty$. Na M definujeme tzv. *p-adickou metriku* ($2^{-\infty} = 0$)

$$d_p(x, y) = 2^{-m_p(x-y)}.$$

Dokažte jako cvičení, že p-adická metrika splňuje toto zesílení trojúhelníkové nerovnosti:

$$d_p(x, y) \leq \max(d_p(x, z), d_p(z, y)).$$

Metrikám splňujícím tuto silnější verzi trojúhelníkové nerovnosti se říká *ultrametriky* nebo také *nearchimédovské metriky*. Ukažte jako cvičení, že v ultrametrickém prostoru jsou všechny trojúhelníky rovnoramenné a že v libovolné kouli (definici viz níže) je každý bod jejím středem.

6. Nechť

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

je jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$. Nechť $a, b \in S$ jsou dva body na sféře a $\varphi \in [0, \pi]$ je úhel, který svírají úsečky spojující oba body se středem sféry S, jímž je počátek souřadnic. Funkce

$$d(a, b) = \varphi$$

je rovněž metrika—budeme jí říkat *sférická metrika*. Je to délka kratšího z oblouků, na něž oba body dělí hlavní kružnici na S, která jimi prochází. (Pro $a = b$ máme samozřejmě $d(a, b) = 0$. Jsou-li a a b antipodální, je těchto hlavních kružnic a příslušných oblouků nekonečně mnoho, ale každý dává $d(a, b) = \pi$.)

Pro ilustraci pojmu izometrie a pro zajímavost si nyní dokážeme, že žádná netriviální část sféry S se nedá „splácnout“ do roviny (ani do žádného jiného euklidovského prostoru) tak, aby se zachovala vzdálenost (tj. aby sférická metrika přešla na metriku euklidovskou). Mapy zemského povrchu proto musejí vždy vzdálenosti zkreslovat. Pro jednoduchost se omezíme na horní polosféru

$$T = \{(x, y, z) \in S : z \geq 0\},$$

ale důkaz se dá rozšířit na libovolnou otevřenou (definici viz níže) podmnožinu sféry S.

Tvrzení (sféra není plochá)
Žádné prosté zobrazení

$$f : T \to \mathbb{R}^n$$

z horní polosféry se sférickou metrikou d do $\mathbb{R}^n$ s euklidovskou metrikou d_2 není izometrie mezi metrickými prostory (T, d) a $(f(T), d_2)$.

Důkaz. Uvažme tyto čtyři body na T: severní pól s, nějaké dva body a a b na rovníku T se vzdáleností $\pi/2$ a bod c také na rovníku uprostřed mezi nimi, takže $d(a,c) = d(c,b) = \pi/4$. Bod s má od každého bodu na rovníku vzdálenost $\pi/2$, takže $d(s,a) = d(s,c) = d(s,b) = \pi/2$. Mezi body s, a, b, c tak ve sférické metrice máme vzdálenosti

$$d(s,a) = d(s,c) = d(s,b) = d(a,b) = \pi/2,\ d(a,c) = d(c,b) = \pi/4.$$

Pro spor předpokládejme, že prosté zobrazení $f : T \to \mathbb{R}^n$ je izometrie. Mezi body $f(s), f(a), f(b), f(c)$ jsou pak tytéž euklidovské vzdálenosti. Tři body $f(s), f(a), f(b)$ nutně tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $\pi/2$. Protože bod $f(c)$ má od $f(a)$ i $f(b)$ poloviční vzdálenost $\pi/4$, je nutně středem úsečky spojující $f(a)$ s $f(b)$. Jeho euklidovská vzdálenost od $f(s)$ je tedy rovna délce výšky tohoto rovnostranného trojúhelníka, což je $(\pi/2)(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}\pi/4$. To je ale spor, podle izometrie tato vzdálenost má být stejná jako délka strany trojúhelníka, $\pi/2$. $\square$

V dalším textu (M, d) označuje metrický prostor. Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ se *(otevřenou) koulí (se středem a a poloměrem r)* rozumí množina

$$B(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}.$$

Uzavřená koule (se středem a a poloměrem r) je

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\}.$$

Podmnožina $X \subset M$ je *otevřená*, pokud $\forall a \in X\ \exists r > 0 : B(a,r) \subset X$, a je *uzavřená*, pokud její doplněk $M \backslash X$ je otevřená množina. Dokažte si jako cvičení, že každá koule $B(a,r)$ je otevřená množina a že každá konečná množina je uzavřená.

Věta 3.1 (vlastnosti otevřených a uzavřených množin)
V metrickém prostoru (M, d) jsou množiny $\emptyset$ a M otevřené i uzavřené. Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

Důkaz. Množiny $\emptyset$ a M jsou zjevně otevřené a tedy (jsou doplňkem jedna druhé) i uzavřené. Nechť $G_i, i \in I$ jsou otevřené množiny a $a \in G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Pak a leží v nějaké G_j a tedy, pro nějaké $r > 0$, $B(a,r) \subset G_j \subset G$ a G je otevřená. Nechť je indexová množina I konečná a $a \in G = \bigcap_{i \in I} G_i$. To znamená, že $a \in G_i$ pro každé $i \in I$, a tak $B(a, r_i) \subset G_i$ pro nějaká čísla $r_i > 0$. Protože jich je jen konečně mnoho, můžeme vzít $r > 0$, že $r < \min(r_i :\ i \in I)$, a máme $B(a,r) \subset B(a,r_i) \subset G_i$ pro všechna $i \in I$. Tedy $B(a,r) \subset G$ a G je otevřená. Tvrzení o uzavřených množinách vyplývají pomocí de Morganových identit přechodem k doplňkům. $\square$

Posloupnost $(x_n) = (x_1, x_2, \dots) \subset M$ bodů v metrickém prostoru (M,d) je *konvergentní* a má limitu $L \in M$, pokud

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, L) = 0.$$

Dá se ukázat, že množina je uzavřená, právě když s každou konvergentní posloupností obsahuje i její limitu.