Inteligentní kalkulus 1

1000 příkladů z elementární analýzy

Ilja Černý

Praha 2011

K elektronickému vydání knihy

Ilja Černý: Inteligentní kalkulus 1

Kniha Ilja Černý: Úvod do inteligentního kalkulu s podtitulem „1000 příkladů z elementární analýzy“ byla vydána nakladatelstvím Academia v roce 2002 a má nyní kratší název uvedený nahoře. Je určena studentům a učitelům matematické analýzy všech typů vysokých škol, kterým nestačí seznámit se s bezduchou početní rutinou, ale kteří chtějí do základu pochopit teoretické principy, na nichž jsou výpočty založeny, kteří chtějí znát předpoklady, za nichž lze danou početní metodu užít, i obor, v němž získané výsledky platí.

Zásada, že když někdo o něčem mluví, měl by vědět, o čem přesně mluví, která by se mezi rozumnými lidmi měla uplatňovat aspoň v přiměřené míře, se v matematice jeví jako zcela nezbytná. Přesto však tuto zásadu většina matematiků nerespektuje na příklad v případě tzv. neurčitého integrálu. Podle autorova názoru nelze do nekonečna omlouvat, že o integrálu bez mezí se mluví již několik století, aniž se podařilo podat jeho definici – dosavadní pokusy v tomto směru vždy skončily neúspěchem. Protože je tento symbol ve skutečnosti nepotřebný, měla jej Occamova břitva již dávno ze seriozní matematiky odstranit. Přesto jej převažující část matematické veřejnosti toleruje – přednost má zřejmě tradice před jednou z hlavních zásad všech skutečných věd i před zdravým rozumem.

Bohužel je podobných „zvyklostí“ v matematické analýze více; výrazně se projevují např. i při vyšetřování průběhu funkce. Autor je toho názoru, že příslušný výklad je třeba racionálním způsobem modifikovat: Vyjasnit všechny užívané pojmy včetně jejich významu v dané souvislosti, upravit věty, podle nichž se při výpočtech postupuje, tak, aby se daly co nejlépe aplikovat, eliminovat vše, co není skutečně nutné. Těmito zásadami se autor snažil řídit nejen v této knize, ale i v jejím pokračování, které mělo název Úvod do inteligentního kalkulu 2 (1000 příkladů z pokročilejší analýzy), které vyšlo v nakladatelství Academia v roce 2005 a má v elektronické podobě kratší název Inteligentní kalkulus 2. Proto nabídce příkladů určitého typu předchází stručný výklad potřebných pojmů a vět spolu s několika rozřešenými typickými příklady. Řešení předložených příkladů (event. doprovázené obrázky) jsou uvedena vždy na konci příslušné kapitoly.

Autor obou knih, prof. RNDr. Ilja Černý, DrSc., se narodil v roce 1929 v Praze. Po ukončení gymnázia začal v roce 1948 studovat na tehdejší Přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze, po absolutoriu se stal vědeckým aspirantem na tehdy vzniklé Matematickofyzikální fakultě UK, pak odborným asistentem postupně na katedře matematické analýzy a katedře aplikované matematiky, na níž v letech 1962 až 1968 zastupoval vedoucího katedry (a která z věcných důvodů změnila svůj název na katedru základů matematické analýzy). Od roku 1965 byl docentem, od roku 1989 je profesorem. Po odchodu do důchodu pracoval (do roku 2000) na Technické univerzitě v Liberci.

Během svého 49 let trvajícího učitelského působení na vysokých školách vedl přednášky, semináře a cvičení nejen z reálné a komplexní analýzy, ale např. i z topologie a teorie množin. Jeho publikační činnost byla ve velké míře ovlivněna potřebami jeho činnosti učitelské. V polovině padesátých let napsal skriptum Integrální počet, založené na článku jeho o něco staršího učitele a přítele prof. Jana Maříka a umožňující nejen výklad Lebesgueova integrálu již ve druhém ročníku, ale majícího za následek i konec pokusů o přijatelný výklad teorie vícerozměrného Riemannova integrálu (který se, jak je dobře známo, k tomuto účelu vůbec nehodí).

Výklady komplexní analýzy trpěly ještě koncem padesátých let nepříjemným rozporem: v „matematické části" měly již co do přesnosti skvělou úroveň reálné analýzy (o níž se u nás zasloužil především prof. Vojtěch Jarník, ale i o generaci mladší prof. Jan Mařík), která však byla znehodnocována její „topologickou částí", která se studentům předkládala buď jako „evidentní", nebo s odkazem, že např. Jordanovu nebo Eilenbergovu větu se studenti naučí (v tehdy neexistující) přednášce z topologie. I. Černý navrhl ve skriptu Stručný úvod do teorie funkcí komplexní proměnné způsob, jak názorné, ale poměrně těžko dokazatelné věty z topologie zařadit do výkladu komplexní analýzy. Obě citovaná skripta se dočkala řady vydání – snad i proto, že podle nich jako první nepřednášel jejich autor, ale jeho učitel prof. V. Jarník, jeden z nejlepších univerzitních pedagogů.

Snaha o proveditelný způsob, jak exaktně vyložit věty o křivkovém a plošném integrálu, vedly I. Černého k překladu knihy vynikajícího polského matematika Romana Sikorského, kterou nakladatelství Academia vydalo v roce 1973 pod názvem „Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných" a která výborně doplňuje Jarníkův Integrální počet II. V dalších letech rozpracovával I. Černý i myšlenku těsného propojení komplexní analýzy s topologií roviny: V roce 1967 vyšla (v NČSAV) jeho kniha Základy analysy v komplexním oboru, v roce 1983 (v nakladatelství Academia) obsáhlá monografie Analýza v komplexním oboru, o niž projevilo zájem anglické nakladatelství Ellis Horwood a která byla nakonec ve zhuštěnější podobě vydána v roce 1992 pod názvem Foundations of Analysis in the Complex Domain. V posledně zmíněných třech knihách autor značně rozšířil výklad o (víceznačných) analytických funkcích a o konformních zobrazeních, aby umožnil exaktní aplikace komplexní analýzy např. v rovinných problémech aerodynamiky a hydrodynamiky.

I. Černý byl na MFF řadu let členem vědecké rady, vedoucím katedry a v letech 1966 až 1970 proděkanem. V letech 1955 až 1970 se aktivně účastnil prakticky všech studijních reforem, které tehdy na MFF probíhaly. Nebyl nikdy členem žádné politické strany, ale byl členem kolegia děkana (vedeného prof. A. Švecem), které v dobách represe a hromadného vyhazování učitelů i studentů vysokých škol po roce 1968 dovedlo své učitele i studenty před tímto osudem uchránit. Je nositelem dvou medailí fakulty a jedné medaile Univerzity Karlovy.

Elektronická verze

Praha 2011 I. Černý

Rád bych touto cestou poděkoval všem, kteří se o vydání knihy nejvíce zasloužili.
Je to především Akademie věd České republiky, která na ni poskytla velkorysou dotaci.

Za mimořádně pečlivou korekturu mnohokrát děkuji paní RNDr. Evě Leinerové z redakce přírodních věd a paní Běle Trpišovské z technické redakce. První z nich mi pomohla překlenout některá pravopisná úskalí, zásluhou druhé se výrazně zlepšila grafická úprava textu. (Veškerou vinu za nedostatky, které budou v knize nalezeny, je proto třeba přičíst mně jako autorovi.)

Vedoucí redakce, pí Ing. Jitka Zykánová, vydání knihy řídila; rád bych jí co nejsrdečněji poděkoval jak za skvělou organizaci práce, tak i za neocenitelnou ochotu řešit se mnou všechny vzniklé problémy.

I. Černý, červenec 2002

Moje vřelé díky patří nyní i panu doc. Pavlu Pyrihovi z katedry matematické analýzy na MFF UK, který elektronické vydání této knihy inicioval a realizoval.

I. Černý, prosinec 2011

Sazba: $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
Obrázky: Mathematica

ISBN 80-200-1017-3

Obsah

Předmluva

Kalkulus chápaný jako soubor výpočetních metod matematické analýzy může být bezduchý, nebo inteligentní. První z těchto verzí kalkulu je pouhé počítání, při němž není nutné přesně vědět, co se vlastně počítá, podle jakých pravidel se počítá a jaký je obor platnosti získaných výsledků. V inteligentní verzi kalkulu se nejdříve přesně definují pojmy a jednotlivé početní metody jsou založeny na přesně formulovaných větách; během počítání se stále kontroluje, za jakých podmínek a ve kterém oboru jsou splněny potřebné předpoklady. V důsledku toho je pak zcela přesně známo, jaký je smysl a obor platnosti výsledků; je plně zaručena i jejich správnost. Tato knížka má čtenáře uvést do inteligentního kalkulu.

Po čtyřicetidevítiletém působení na dvou univerzitách – na Karlově univerzitě v Praze a na Technické univerzitě v Liberci – jsem došel k pevnému přesvědčení, že jedním z nejdůležitějších úkolů výuky matematiky má být výcvik v logickém myšlení v tom nejširším slova smyslu: Student má prakticky poznat základní pravidla logického myšlení, naučit se správně užívat alternativy, konjunkce, implikace a ekvivalence spolu s jejich negacemi. Má vždy vědět, o čem mluví nebo píše; v matematice to např. znamená mít dobře rozmyšlené definice pojmů, které užívá. Má znát obecné zákonitosti oboru, v matematice tedy věty; důležité přitom je, aby spolehlivě věděl, za jakých předpokladů to či ono tvrzení platí. Má se naučit analyzovat danou situaci a naopak z dílčích poznatků, které k danému problému shromáždil, složit (tedy syntetizovat) rozumný celek. Má v praxi prokázat, že obecné věty a metody dovede aplikovat na konkrétních příkladech tak, aby zároveň využil všechny specifické vlastnosti příkladu ke zjednodušení postupu. Každý, kdo prohlašuje matematiku za svůj obor, by měl vždy mluvit srozumitelně, jednoznačně a stručně; správné rozhodnutí o tom, co je v dané situaci podstatné a co je podružné, by mělo zásadním způsobem ovlivnit jeho vyjadřování. Měl by se učit být kritický, a to zejména k sobě samému; říká-li sám sobě pravdu, může si ušetřit mnohé nesnáze.

Podle mých zkušeností poskytuje matematická analýza velmi mnoho příležitostí, jak se správnému logickému uvažování učit; čtenáře, který se rozhodl užít tuto sbírku při svém studiu, pravděpodobně nemusím přesvědčovat, že správné myšlení není lidem vrozeno. Jistě již při nejrůznějších příležitostech zpozoroval, jak nesprávně „necvičení“ lidé mnohdy uvažují a k jak paradoxním výsledkům docházejí. Elementární matematická analýza, do níž naše příklady patří, je zároveň názorná a zrádná. Názornost pomáhá zejména začátečníkovi, aby se v situaci orientoval; řeší-li však problémy skutečně poctivě, brzy zjistí, že pojmy jsou daleko hlubší, než se zdají být na první pohled, takže spoléhat jen na tzv. selský rozum nelze – brzy se dojde k nepravdivým závěrům. Jedině možnou metodou je užívat jen dokázané věty a algoritmy a soustavně ověřovat všechny předpoklady, za nichž je lze aplikovat.

Příklady do této sbírky jsem shromažďoval desítky let. Kromě standardních příkladů, které nemohou chybět v žádné podobné knížce, bylo třeba najít příklady, které čtenářům umožní co nejvšestranněji zvládnout příslušnou látku. Na cvičeních k přednáškám z matematické analýzy jsem ověřoval, co je pro dobré studenty samo-zřejmé, co jim může činit potíže a co jim nejspíše poskytuje informace potřebné k pochopení tzv. teorie. Nepředpokládám, že by někdo (kromě autora) vyřešil všechny příklady. Je jich tak mnoho jen proto, aby nejen čtenáři, ale např. i vedoucí cvičení měli co největší výběr jak lehčích, tak i náročnějších příkladů.

Protože je mým cílem pomoci čtenáři v nesnadném procesu směřujícímu ke spolehlivému myšlení, považoval jsem za nutné v každé kapitole vysvětlit všechny pojmy, věty a metody potřebné k vyřešení příslušných příkladů. (Nezabývám se ovšem např. tak základními pojmy, jako je výrok, množina, přirozené nebo reálné číslo, ani např. všeobecně známými zákony algebry.) V každé kapitole je několik podrobně vyřešených příkladů, které mají čtenáři naznačit, jak lze postupovat. Některé rozřešené příklady obsahují výsledky, které čtenář obvykle hledá ve sbírkách vzorců nebo v různých tabulkách; i na vzorce se samozřejmě vztahují přísná pravidla matematické logiky – jsou bezcenné, není-li např. uveden obor jejich platnosti. Číslované poznámky výklad doplňují a někdy upozorňují i na možná nedorozumění a z nich vyplývající nebezpečí nesprávných závěrů.

Matematika se vyvíjí nejen ve své „objevitelské“ části, ale i v metodice. Je politováníhodné, že vysokoškolské výklady někdy mnohé z toho, co bylo v průběhu vývoje překonáno a nahrazeno lepším, efektivnějším a obecnějším, nerespektují a drží se spíše „vyzkoušených cest“ – často jsou to cesty, po nichž před mnohými lety nynější učitelé, tehdejší studenti, sami kráčeli. Ve své pohodlnosti nedávají mladé generaci právě dobrý příklad svým nezdravým a nerozumným konzervatismem. Na řadě míst sbírky jsem se proto snažil uvést věci na správnou míru – aspoň tak, jak ji sám vidím. Jde např. o zbytečné hledání lokálních extrémů při vyšetřování průběhu funkce, o nedorozumění související s termínem „neurčité výrazy“ při výpočtu limit, o užívání záhadného a zcela zbytečného znaku $\int$ a řadu dalších drobných detailů. Velmi prosím čtenáře, aby se nad těmito partiemi dobře zamyslil a utvořil si svůj vlastní úsudek, podle něhož pak bude i jednat.

Bylo by jistě zbytečné snažit se zde charakterizovat tematiku této sbírky. Je patrná z obsahu a odpovídá zhruba sylabům matematické analýzy pro 1. ročník univerzitního studia; obdobnou sbírku příkladů k látce 2. ročníku analýzy připravuji do tisku. Z toho, že sbírka vychází z univerzitních sylabů, vůbec neplyne, že by z ní nemohli čerpat i studenti, pro něž je matematická analýza jen pomocným předmětem. Psal jsem ji zejména pro studenty, kteří se nechtějí spokojit jen s povrchním pochopením početních principů analýzy.

Na závěr bych rád znovu čtenáře – hlavně z řad učitelů – vyzval, aby odmítli bezduchý kalkulus, protože jde o systém, který funguje jen v případě, že výsledky jsou předem známy; objevit na základě něj něco nového není pravděpodobně možné. A hlavně: kdo podobným způsobem s matematikou zachází, okrádá ji navíc o jednu z jejích nejcennějších vlastností – učit správnému uvažování.

Praha 2002 I. Černý

Označení, operace, zkratky

Množiny

$\{x \in X;\ V(x)\}$	množina všech $x \in X$, pro něž platí $V(x)$
$\mathbb{R}$	množina všech konečných reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$
$\mathbb{R}_-$	$\{x \in \mathbb{R};\ x < 0\}$
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}(N)$, kde $N \in \mathbb{Z}$	$\{n \in \mathbb{Z};\ n \geq N\}$
$\mathbb{Q}$	množina všech racionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina všech konečných komplexních čísel

Intervaly	za předpokladu, že $-\infty \leq a < b \leq +\infty$
$\langle a, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R}^*;\ a \leq x \leq b\}$
$(a, b\rangle$	$\{x \in \mathbb{R}^*;\ a < x \leq b\}$
$\langle a, b)$	$\{x \in \mathbb{R}^*;\ a \leq x < b\}$
(a, b)	$\{x \in \mathbb{R}^*;\ a < x < b\}$

Okolí	za předpokladu, že $\delta \in \mathbb{R}_+$
$U(a, \delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R};\ \lvert x - a\rvert < \delta\}$
$U^+(a, \delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$	$\langle a, a + \delta)$
$U^-(a, \delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$	$(a - \delta, a\rangle$
$U(-\infty, \delta) = U^+(-\infty, \delta)$	$\langle -\infty, -1/\delta)$
$U(+\infty, \delta) = U^-(+\infty, \delta)$	$(1/\delta, +\infty\rangle$
není definováno	$U^-(-\infty, \delta)$, $U^+(+\infty, \delta)$
$U(a)$, $U^+(a)$, $U^-(a)$	každé $U(a, \delta)$, $U^+(a, \delta)$, $U^-(a, \delta)$

Prstencová okolí	za předpokladu, že $\delta \in \mathbb{R}_+$
$P(a, \delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R};\ 0 < \lvert x - a\rvert < \delta\}$
$P^+(a, \delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$	$(a, a + \delta)$

$P^-(a,\delta)$, kde $a \in \mathbb{R}$	$(a-\delta, a)$
$P(-\infty,\delta) = P^+(-\infty,\delta)$	$(-\infty, -1/\delta)$
$P(+\infty,\delta) = P^-(+\infty,\delta)$	$(1/\delta, +\infty)$
není definováno	$P^-(-\infty,\delta)$, $P^+(+\infty,\delta)$
$P(a)$, $P^+(a)$, $P^-(a)$	každé $P(a,\delta)$, $P^+(a,\delta)$, $P^-(a,\delta)$

Operace s $\pm\infty$

$a + (+\infty) = +\infty + a := +\infty$	pro každé $a \in (-\infty, +\infty\rangle$
$a + (-\infty) = -\infty + a := -\infty$	pro každé $a \in \langle-\infty, +\infty)$
$a - (+\infty) := -\infty$	pro každé $a \in \langle-\infty, +\infty)$
$a - (-\infty) := +\infty$	pro každé $a \in (-\infty, +\infty\rangle$
není definováno	$+\infty + (-\infty)$, $-\infty + (+\infty)$
není definováno	$+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$
$a \cdot (\pm\infty) := \pm\infty$	pro každé $a \in (0, +\infty\rangle$
$a \cdot (\pm\infty) := \mp\infty$	pro každé $a \in \langle-\infty, 0)$
není definováno	$0 \cdot \pm\infty$, $\pm\infty \cdot 0$
$\dfrac{a}{\pm\infty} := 0$	pro každé $a \in \mathbb{R}$
$\dfrac{\pm\infty}{a} := \pm\infty$	pro každé $a \in \mathbb{R}_+$
$\dfrac{\pm\infty}{a} := \mp\infty$	pro každé $a \in \mathbb{R}_-$
není definováno	$\dfrac{a}{0}$ pro žádné $a \in \mathbb{R}^*$
není definováno	$\dfrac{+\infty}{+\infty}, \dfrac{-\infty}{+\infty}, \dfrac{+\infty}{-\infty}, \dfrac{-\infty}{-\infty}$
$a^0 := 1$	pro každé $a \in \mathbb{R}$
$(+\infty)^n := +\infty$	pro každé $n \in \mathbb{N}$
$(-\infty)^n := (-1)^n(+\infty)$	pro každé $n \in \mathbb{N}$
$(\pm\infty)^{-n:} = 0$	pro každé $n \in \mathbb{N}$
není definováno	$(\pm\infty)^0$

Kongruence	pro komplexní čísla $a, b, c \neq 0$
$a \equiv b \mod c$	$a - b = kc$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$

Zkratky

V. i. j	Věta i. j (j-tá věta i-té kapitoly)
Po. i. j	Poznámka i. j (j-tá poznámka i-té kapitoly)
Cv. i. j	Cvičení i. j (j-té cvičení i-té kapitoly)
Př. i. j	Příklad i. j (j-tý příklad i-té kapitoly)
s. v.	skoro všechna – viz kap. 3
z. p. f.	zobecněná primitivní funkce – viz kap. 10

Symboly

$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$	posloupnost o členech a_k
$a_k \to a$ (pro $k \to \infty$)	$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$
$a < a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k < a)$ pro s. v. k
$a \leq a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k \leq a)$ pro s. v. k
$a > a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k > a)$ pro s. v. k
$a \geq a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k \geq a)$ pro s. v. k
$a \neq a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k \neq a)$ pro s. v. k
$a_k \nearrow a$	$a_k \to a$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající
$a_k \searrow a$	$a_k \to a$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí
$f : X \to Y$	zobrazení f, pro něž je $f(X) \subset Y$
$f : X \to_{\text{na}} Y$	zobrazení f, pro něž je $f(X) = Y$
$\mathcal{D}(f)$	definiční obor funkce f
$\operatorname{gr} f$	graf funkce f
$g \circ f$	superpozice funkcí $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$
f_{-1}	funkce inverzní k f
Id, Id^a	identita, její a-tá mocnina
$\exp$	exponenciála ($\exp x = e^x$)
$\lg$	přirozený logaritmus
$\exp_a$ (kde $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$)	exponenciála o základu a ($\exp_a x = a^x$)
$\lg_a$ (kde $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$)	logaritmus o základu a
$f(x) \to A$ pro $x \to a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

$\smile$	funce je konvexní
$\frown$	funkce je konkávní
$\sim$	inflexní bod
$a_k = O(b_k)$ (pro $k \to \infty$)	existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $\lvert a_k \rvert \le K \lvert b_k \rvert$ pro s. v. k
$a_k \asymp b_k$ (pro $k \to \infty$)	$(a_k = O(b_k)) \wedge (b_k = O(a_k))$
$f(x) = O(g(x))$ pro $x \to a$	existuje $K \in \mathbb{R}_+$ a $P(a)$ tak, že $\lvert f(x) \rvert \le K \lvert g(x) \rvert$ všude v $P(a)$
$f(x) \asymp g(x)$ pro $x \to a$	$(f(x) = O(g(x))) \wedge (g(x) = O(f(x)))$
$f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$	$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)/g(x)\big) = 0$

1. Nerovnosti

Řešit nerovnost znamená najít množinu M všech (konečných reálných) čísel, která tuto nerovnost splňují. Jak lze v jednoduchých případech množinu M znázornit na číselné ose, ukazuje obrázek na této stránce dole.

Příklad 1.1. Rozřešme nerovnost $f(x) \geq 0$, kde

$$f(x) := \frac{(x+1)(x-1)(x-2)^2(x-3)}{x}\,. \tag{1}$$

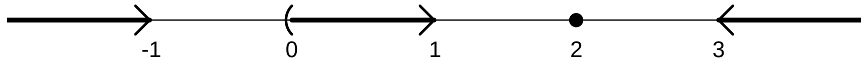
Zlomek vpravo má smysl, právě když je $x \neq 0$, a je součinem výrazu $1/x = x^{-1}$ a faktorů v čitateli. Pro $x \neq 0$ je $f(x) \geq 0$, právě když se buď jeden z faktorů v čitateli rovná nule, nebo když je počet záporných faktorů sudý. Ze znamének jednotlivých faktorů můžeme utvořit takovouto tabulku:

	$(-\infty,-1\rangle$	$(-1,0)$	0	$(0,1\rangle$	$(1,2)$	2	$(2,3)$	$\langle 3,+\infty)$
x^{-1}	<0	<0	—	>0	>0	>0	>0	>0
$x+1$	≤ 0	>0	>0	>0	>0	>0	>0	>0
$x-1$	<0	<0	<0	≤ 0	>0	>0	>0	>0
$(x-2)^2$	>0	>0	>0	>0	>0	$=0$	>0	>0
$x-3$	<0	<0	<0	<0	<0	<0	<0	≥ 0

Interval nebo číslo (v první řádce tabulky) patří do množiny $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \geq 0\}$, právě když v příslušném sloupci není vodorovná linka — (která znamená, že faktor není definován), a je v něm buď $= 0$, nebo sudý počet symbolů < 0, ≤ 0. Zřejmě je

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0\} = (-\infty,-1\rangle \cup (0,1\rangle \cup \{2\} \cup \langle 3,+\infty)\,, \tag{2}$$

čímž je daná nerovnost vyřešena. Na číselné ose vyznačíme množinu všech jejích řešení např. takto:



Znaky „<“ , „>“ resp. „(“ , „)“ znamenají, že příslušný krajní bod k intervalu patří resp. nepatří. Izolovaný bod množiny (2) je vyznačen malým černým kolečkem.

Cvičení

Řešte následující nerovnosti a výsledné množiny řešení vyznačte na číselné ose.

1.01. $|x| < |x+1|$

1.02. $|x+3| \le |x-1|$

1.03. $|x-1| \le |2x-5|$

1.04. $|x+4| - |x+1| \le x$

1.05. $|x-2| - x > 1$

1.06. $\dfrac{1}{x} < |x+2|$

1.07. $\dfrac{x-1}{x+1} \le 1$

1.08. $\dfrac{x-2}{x+4} \le \dfrac{x+1}{x-3}$

1.09. $\dfrac{x-3}{x-1} \le |x+1|$

1.10. $x \le \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$

1.11. $x+1 \le x^2+7x+6$

1.12. $x^2 \le |x^2-2x-3|$

1.13. $|x^2-2x-3| < 5-x$

1.14. $|x-|x+1|| \le 2x$

1.15. $|x+1| > x^2+7x+6$

1.16. $|2x^2+6x-7| < |x^2-5x-7|$

1.17. $x+1 \ge |x^2+4x+3|$

1.18. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+4x+5} < 1-2x$

1.19. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 1$

1.20. $\sqrt{x-1} + \sqrt{11-x} > 3$

1.21. $\sqrt{x^2+2x+3} > |x+1|$

1.22. $\sqrt{x^2+2x-3} < |x+1|$

1.23. $x^2 < \sqrt{x^2+1}$

1.24. $\sqrt{(x^2-1)(x^2+4)} < x^2$

1.25. $\sqrt[3]{x^2-1} \le x+1$

1.26. $\sqrt[3]{x^2-9} \ge x-1$

1.27. $\sin x \le \cos x$

1.28. $\sin 2x < \cos x$

1.29. $2\sin x \le \dfrac{1}{\cos x}$

1.30. $\operatorname{tg} x > \operatorname{cotg} x$

1.31. $\sin x \le 2\cos^2 x - 1$

1.32. $|\operatorname{tg} x + 1| \le |\operatorname{tg} x - 1|$

Často je třeba najít množinu všech čísel splňujících dvě nebo více nerovností, po případě vyřešit nerovnost(i) s jedním nebo více parametry.

Příklad 1.2. Jsou-li x a x_0 dva body z $\mathbb{R}$, je $|x-x_0|$ jejich vzdálenost na číselné ose. Pro každé $\delta \in \mathbb{R}_+$ je tedy

$$\begin{aligned} |x-x_0| < \delta &\Leftrightarrow x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \\ |x-x_0| > \delta &\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0-\delta) \cup (x_0+\delta, +\infty). \end{aligned}$$

Kromě toho je

$$0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

Příklad 1.3. Rozřešme nerovnost

$$f(x) := ax^2 + bx + c > 0\,, \tag{3}$$

kde a, b, c jsou libovolné (reálné) parametry.

Označme M množinu všech řešení a rozeznávejme tyto situace:

1. $a = b = c = 0$; pak nerovnost (3) neplatí pro žádné $x \in \mathbb{R}$, tj. $M = \emptyset$.

2. $a = b = 0 \neq c$; pak je $M = \mathbb{R}$ pro $c > 0$ a $M = \emptyset$ pro $c \leq 0$.

3. $a = 0 \neq b$; pak se nerovnost (3) redukuje na nerovnost $bx + c > 0$, která je ekvivalentní s nerovností $x > -c/b$ (tj. s rovností $M = (-c/b, +\infty)$) v případě, že $b \in \mathbb{R}_+$, a s nerovností $x < -c/b$ (tj. s rovností $M = (-\infty, -c/b)$) v případě, že $b \in \mathbb{R}_-$.

4. $a \neq 0$; označme $D := b^2 - 4ac$ a vyřešme odděleně tyto dva případy:

4a. $D \geq 0$; pak je

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),\ \text{ kde } x_1 := \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \leq x_2 := \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \tag{4a}$$

jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$. Znaménko polynomu $f(x)$ závisí na tom, zdali počet záporných faktorů v rozkladu (4a) je sudý, nebo lichý.

Při $a > 0$ je proto $f(x) > 0$, právě když je buď $x < x_1$ (tedy i $x < x_2$), nebo $x > x_2$ (tedy i $x > x_1$); to znamená, že

$$M = \left(-\infty\,, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, +\infty\right). \tag{5a}$$

Při $a < 0$ je $f(x) > 0$, právě když je $x_1 < x < x_2$ (protože nemůže být $x < x_1$ a zároveň $x > x_2$); tomu odpovídá množina

$$M = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right). \tag{5b}$$

4b. $D < 0$; nyní je

$$f(x) = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \Big(\frac{-D}{4a^2}\Big)\Big], \tag{4b}$$

přičemž výraz $[\dots]$ je zřejmě kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že při $a > 0$ resp. $a < 0$ je $M = \mathbb{R}$ resp. $M = \emptyset$.

Cvičení

Řešte následující nerovnosti a výsledné množiny řešení vyznačte na číselné ose.

1.33. $1 < |\, x+3 \,| < 3 - x$

1.34. $-4 < x^2 - x - 6 \le 5$

1.35. $1 \le |\, 10 - x^2 \,| \le 6$

1.36. $2x < |\, x^2 - 5 \,| \le 4x$

Řešte následující nerovnosti s reálnými parametry a, b a výsledné množiny řešení vyznačte na číselné ose.

1.37. $|\, 1 + ax \,| < 2$

1.38. $|\, a\,(x^2 - 1) \,| < 1$

1.39. $|\, ax + b \,| \le b$

1.40. $|\, ax^2 - b \,| < a$

Řešení

1.01. $\big(-\frac{1}{2}, +\infty \big)$

1.02. $(-\infty, -1\rangle$

1.03. $(-\infty, 2\rangle \cup \langle 4, +\infty)$

1.04. $\langle 3, +\infty)$

1.05. $\big(-\infty, \frac{1}{2} \big)$

1.06. $\mathbb{R}_- \cup \big(\sqrt{2} - 1, +\infty \big)$

1.07. $(-1, +\infty)$

1.08. $\big(-4, \frac{1}{5} \big\rangle \cup (3, +\infty)$

1.09. $\big(\infty, -\frac{1}{2}\,(\sqrt{17} + 1) \big\rangle \cup (1, +\infty)$

1.10. $(-\infty, 3) \cup \big(3, 2 + \sqrt{6} \big)$

1.11. $(-\infty, -5\rangle \cup \langle -1, +\infty)$

1.12. $\big(-\infty, -\frac{3}{2} \big\rangle \cup \big\langle \frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{7}), \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{7}) \big\rangle$

1.13. $\big(\frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{33}), 1 \big) \cup (2, \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{33}))$

1.14. $\big\langle \frac{1}{2}, +\infty \big)$

1.15. $(-7, -1)$

1.16. $\left(-11, -\frac{7}{3}\right) \cup (0, 2)$

1.17. $\{-1\}$

1.18. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}(\sqrt{13}+3)\right) \cup \left(-1, \frac{1}{2}(\sqrt{13}-3)\right)$

1.19. $\left\langle 1, \frac{5}{4}\right)$

1.20. $(1, 11)$

1.21. $\mathbb{R}$

1.22. $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, +\infty)$

1.23. $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)} \doteq 1.2720$

1.24. $1 \leq |x| < \frac{2}{3}\sqrt{3} \doteq 1.1547$

1.25. $x \geq -1$

1.26. $x \leq -1$

1.27. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle (2k - \frac{3}{4})\pi, (2k + \frac{1}{4})\pi \right\rangle$

1.28. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left((2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{6})\pi\right) \cup \left((2k + \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{5}{6})\pi\right)\right)$

1.29. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\{(2k - \frac{3}{4})\pi\} \cup \left((2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi\right)\right)$

1.30. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left((k - \frac{1}{4})\pi, k\pi\right) \cup \left((k + \frac{1}{4})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi\right)\right)$

1.31. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle (2k - \frac{7}{6})\pi, (2k + \frac{1}{6})\pi \rangle$

1.32. $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, k\pi\rangle$

1.33. $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$

1.34. $\left\langle \frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{5}), -1\right) \cup \left(2, \frac{1}{2}(1 + 3\sqrt{5})\right\rangle$

1.35. $\left\langle -4, -\sqrt{11}\right\rangle \cup \langle -3, -2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle \cup \left\langle \sqrt{11}, 4\right\rangle$

1.36. $\left\langle 1, \sqrt{6} - 1\right) \cup \left(\sqrt{6} + 1, 5\right\rangle$

1.37. pro $a = 0$: $\mathbb{R}$;
pro $a \neq 0$: otevřený interval s krajními body $-3/a, 1/a$

1.38. pro $a = 0$: $\mathbb{R}$;

je-li $0 < |a| < 1$: $(-A, A)$, kde $A := \sqrt{1 + 1/|a|}$;

je-li $|a| \geq 1$: $(-A, -B) \cup (B, A)$, kde $B := \sqrt{1 - 1/|a|}$

1.39. pro $b < 0$: $\emptyset$;

je-li $b \geq 0 = a$: $\mathbb{R}$;

je-li $b = 0 \neq a$: $\{0\}$;

je-li $b > 0 \neq a$: uzavřený interval s krajními body $-2b/a$, 0

1.40. pro $a \leq 0$: $\emptyset$;

je-li $a > 0$, $a + b \leq 0$: $\emptyset$;

je-li $a > 0$, $a + b > 0$, $b < a$: $(-C, C)$, kde $C := \sqrt{b/a + 1}$;

je-li $b \geq a > 0$, $a + b > 0$: $(-C, -D) \cup (D, C)$, kde $D := \sqrt{b/a - 1}$

2. Indukce

Dokázat platnost nekonečné posloupnosti $\{V(n)\}_{n=1}^{\infty}$ výroků $V(n)$ umožňuje tzv. **indukce** (podrobněji: **úplná** nebo **matematická indukce**):

Věta 2.1. *Nechť platí výrok $V(1)$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne z platnosti výroku $V(n)$ platnost výroku $V(n+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 2.1. Věta 2.1, nazývaná též **princip indukce**, je ekvivalentní s tímto tvrzením:

Věta 2.1*. *Nechť platí výrok $V(1)$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne z platnosti výroků $V(1), \ldots, V(n)$ platnost výroku $V(n+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Dále: *V obou vyslovených větách lze množinu $\mathbb{N}$ nahradit množinou tvaru*

$$\mathbb{N}(N) := \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq N\}, \quad \textit{kde} \ \ N \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Předpokládáme pak, že 1) platí výrok $V(N)$ a že 2) pro každé celé číslo $n \geq N$ plyne z platnosti výroku $V(n)$ (nebo : z platnosti výroků $V(N), \ldots, V(n)$) platnost výroku $V(n+1)$. Za předpokladů 1) a 2) platí výrok $V(n)$ pro každé celé číslo $n \geq N$.

Příklad 2.1. Dokažme **binomickou větu**: *Pro každá tři čísla $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ platí identita*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}. \tag{2}$$

D ů k a z. Protože rovnost (2) je pro $n = 1$ zřejmá, zbývá dokázat, že když rovnost (2) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, platí analogická rovnost i pro $n+1$. Užijme (2) a přepišme identitu $(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n$ ve tvaru

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\, b^{n+1-j}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^j\, b^{n+1-j}.$$

Uvážíme-li, že

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}, \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}, \quad \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0},$$

vidíme, že

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j},
\end{aligned}
$$

tj. že opravdu platí analogie vzorce (2) pro $n+1$.

Tím je binomická věta dokázána.

Cvičení

Dokažte indukcí tato tvrzení:

2.01. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2} n(n+1)$

2.02. $n \in \mathbb{N},\ 1 \neq q \in \mathbb{C} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2.03. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)(2n+1)$

2.04. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4} n^2(n+1)^2$

2.05. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

2.06. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

2.07. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

2.08. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

2.09. $n \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

2.10. $n \in \mathbb{N},\ x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$ (*Bernoulliho nerovnost*)

2.11. $n \in \mathbb{N},\ 1 \neq x \in \mathbb{C} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x}{1-x}\left(\frac{1-x^n}{1-x} - nx^n\right)$

2.12. $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ (*Moivrův vzorec*)

2.13. $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sin\tfrac{1}{2}n\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}(n+1)\alpha$

2.14. $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha \cdot \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sin\tfrac{1}{2}n\alpha \cdot \cos\tfrac{1}{2}(n+1)\alpha$

2.15. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ (n odmocnin)

2.16. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ (n odmocnin)

2.17. $n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C} \Rightarrow (1-z)\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k}) = 1 - z^{2^{n+1}}$

2.18. $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n \Rightarrow \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1} = \dbinom{n+1}{k}$

2.19. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 2\sqrt{n}$

2.20. $n > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

2.21. $n > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$

2.22. $n \ge 4 \Rightarrow 2^n \ge n^2$

2.23. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$

2.24. $n > 2 \Rightarrow (n!)^2 > n^n$

2.25. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \dbinom{2n}{n} \ge \dfrac{4^n}{n+1}$

2.26. $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n \Rightarrow \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k \le 1 + \dfrac{k}{n} + \left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

2.27. $n \ge 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \ge \frac{n}{2} + 1$

2.28. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 10^n - 1$ je dělitelné číslem 9

2.29. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 10^n - 4$ je dělitelné číslem 6

2.30. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ je dělitelné číslem 9

2.31. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4^n + 15n - 1$ je dělitelné číslem 9

2.32. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ je dělitelné číslem 11

2.33. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^3 + 11n$ je dělitelné číslem 6

2.34. $n \in \mathbb{N},\ a_k \geq 0$ pro $k = 1, \dots, n \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$; rovnost platí, právě když $a_1 = \ldots = a_n$

2.35. $n \in \mathbb{N},\ \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq n\big(a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}\big)^{-1}$

2.36. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $b_1, \dots, b_n$ je permutací kladných čísel $a_1, \dots, a_n$. Pak je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \geq n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \right)^{1/n} = n\,.$

2.37. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_n$ (komplexní) čísla, je

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n \\ a_1^2, & a_2^2, & \dots, & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & \dots, & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)\,.$$

(Vlevo je tzv. *Vandermondův determinant* čísel $a_1, \dots, a_n$.)

* * *

Indukci lze užít i k *definici* posloupnosti:

Příklad 2.2. *Faktoriály* se definují indukcí, a to takto:

$$0! := 1\,, \quad n! := n \cdot (n-1)! \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Faktoriály se v matematice vyskytují tak často, že není na škodu pamatovat si, že

$$\begin{aligned} 1! &= 1\,, & 6! &= 720\,, \\ 2! &= 2\,, & 7! &= 5040\,, \\ 3! &= 6\,, & 8! &= 40320\,, \\ 4! &= 24\,, & 9! &= 362880\,, \\ 5! &= 120\,, & 10! &= 3628800\,. \end{aligned}$$

Cvičení

2.38. Položíme-li $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ a definujeme-li $a_{n+2} := a_n + a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, získáme tzv. *Fibonacciho posloupnost*. Vypište prvních 15 jejích členů a přesvědčte se, že čím je n větší, tím je podíl a_n/a_{n+1} blíže tzv. *zlatému řezu* rovnému $z := \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \doteq 0.61803\ 39887$. (Pro kontrolu: $a_{14} = 377$, $a_{15} = 610$; čísla $377/610$, z se shodují na pěti místech za desetinnou tečkou, $377/610 - z \doteq 1.2 \cdot 10^{-6}$.)

2.39. Položte

$$(-1)!! := 1\,,\ 0!! := 1 \ \text{ a } \ n!! := n(n-2)!! \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Vypočítejte $n!!$ pro $n = 1, \ldots, 10$. (Pro kontrolu: $9!! = 945$, $10!! = 3840$.)

2.40. Položte $c_1 := \cos \frac{1}{3}\pi$, $m_1 := 6$ a dokažte, že $a_1 := 3 \sin \frac{1}{3}\pi$ je obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice J. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak definujte

$$c_{n+1} := \sqrt{\tfrac{1}{2}(c_n + 1)}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{c_{n+1}}, \quad m_{n+1} := 2m_n$$

a dokažte, že 1) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_{n+1} \geq a_n$, 2) a_n je obsah pravidelného m_n-úhelníku vepsaného do J. Vypočtěte pro $n = 1, \ldots, 10$ čísla m_n a a_n – druhé z nich aspoň na 10 desetinných míst; všimněte si, že s rostoucím n aproximuje číslo a_n číslo $\pi \doteq 3.14159\ 26535$ stále lépe. (Rada: Užijte známý vzorec $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos \alpha + 1)}$ platný např. pro všechna $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Pro kontrolu:

$$m_1 = 6,\ a_1 \doteq 2.59807\ 62114, \quad m_{10} = 3072,\ a_{10} \doteq 3.14159\ 04632.)$$

3. Limity posloupností

V této kapitole bude slovo **posloupnost** znamenat zobrazení množiny $\mathbb{N}$ (nebo obecněji množiny $\mathbb{N}(N) := \{n \in \mathbb{Z};\, n \geq N\}$, kde $N \in \mathbb{Z}$) do množiny $\mathbb{R}$ všech (konečných) reálných čísel. Je-li a posloupnost, měli bychom (v souladu s obecnými pravidly teorie množin) *hodnotu* tohoto zobrazení *v čísle* n značit $a(n)$. Je však zvykem nazývat toto číslo n-**tý člen** posloupnosti, značit je a_n, pro posloupnost samu užívat např. symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v obecnějším případě $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}$, a nazývat ji **posloupnost o členech** a_n. Nehrozí-li záměna s jednobodovou množinou, lze pro tuto posloupnost užít i stručnější označení $\{a_n\}$.

Je-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ (obecněji: pro každé $n \geq N$, kde $N \in \mathbb{Z}$) dán výrok $V(n)$, říkáme, že **výrok** $V(n)$ **platí pro skoro všechna** $n \in \mathbb{N}$ (obecněji: **pro skoro všechna** $n \geq N$), existuje-li konečná množina $K \subset \mathbb{N}$ (obecněji: $K \subset \mathbb{N}(N)$) tak, že výrok $V(n)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N} - K$ (obecněji: pro každé $n \in \mathbb{N}(N) - K$). Nehrozí-li nedorozumění, říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n; místo „skoro všechna“ píšeme většinou „s. v.“.

Poznamenejme ještě, že výrok „$V(n)$ platí pro s.v. n“ je *ekvivalentní* s výrokem „existuje n_0 tak, že $V(n)$ platí pro všechna $n > n_0$“.

Zatímco *členy* posloupností reálných čísel jsou konečné, *limity* takových posloupností budou moci být rovny i $\pm\infty$. Pro pohodlí čtenáře zopakujeme základní **definice** vztahující se k číslům z $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, tedy k reálným číslům [1]):

0) **Uspořádání:** $-\infty$ je nejmenší, $+\infty$ největší reálné číslo, takže nerovnosti $-\infty < a < +\infty$ platí pro každé $a \in \mathbb{R}$ a je ovšem i $-\infty < +\infty$; $\operatorname{sgn}(+\infty) := +1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) := -1$, $-(+\infty) := -\infty$, $-(-\infty) := +\infty$, $|\pm\infty| := +\infty$.

1) **Součet:**

$$a + b := +\infty\,, \ \text{ je-li buď } a = +\infty \text{ a } b > -\infty, \text{ nebo } b = +\infty \text{ a } a > -\infty;$$
$$a + b := -\infty\,, \ \text{ je-li buď } a = -\infty \text{ a } b < +\infty, \text{ nebo } b = -\infty \text{ a } a < +\infty;$$

součet $a + b$ **nemá smysl**, právě když je jedno z čísel a, b rovno $+\infty$, druhé $-\infty$.

2) **Rozdíl** $a - b$ je definován jako součet $a + (-b)$, má-li tento součet smysl podle bodu 1); rozdíl $a - b$ **nemá smysl**, právě když jsou a, b nekonečná čísla téhož znaménka.

3) **Součin**

$$ab := \begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}, \ \text{ je-li } \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ a buď } a = \pm\infty, \text{ nebo } b = \pm\infty;$$

součin ab **nemá smysl**, právě když je jedno z čísel a, b rovno $\pm\infty$, zatímco druhé z nich je 0.

---

[1]) Čísla z $\mathbb{R}$ se podrobněji nazývají *konečná*, čísla $\pm\infty$ jsou *nekonečná*. Slovo *nevlastní* zde ani pro čísla, ani pro limity neužíváme, protože může budit dojem, že to nejsou „plnoprávná“ čísla resp. limity. Kromě toho považujeme za zbytečné mít pro jeden pojem dva různé názvy.

4) **Podíl**

$$\frac{a}{b} := \left\{ \begin{array}{ll} +\infty\,, & \text{je-li } a = \pm\infty,\ 0 \neq b \neq \pm\infty,\ \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = +1 \\ -\infty\,, & \text{je-li } a = \pm\infty,\ 0 \neq b \neq \pm\infty,\ \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b = -1 \\ 0\,, & \text{je-li } a \in \mathbb{R},\ b = \pm\infty \end{array} \right\};$$

podíl a/b **nemá smysl**, právě když je buď $b = 0$, nebo $|a| = |b| = +\infty$.

5) **Mocniny** čísel $\pm\infty$ se definují takto:

$$(\pm\infty)^n := \left\{ \begin{array}{ll} (\pm 1)^n \cdot (+\infty)\,, & \text{je-li } n \in \mathbb{N} \\ 0\,, & \text{je-li } -n \in \mathbb{N} \end{array} \right\};$$

výrazy $(\pm\infty)^0$, $a^{\pm\infty}$ (kde $a \in \mathbb{R}^*$) **nemají smysl**; *připomeňme však, že* $0^0 := 1$. □

Píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (\text{nebo např. } a_n \to a \text{ pro } n \to \infty)$$

a číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme **limita posloupnosti** $\{a_n\}$, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

$(1')$ pro každé $a' < a$ je $a_n > a'$ pro s.v. n,

$(1'')$ pro každé $a'' > a$ je $a_n < a''$ pro s.v. n.

Je-li $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** (nebo že čísla a_n **konvergují**) k číslu a; je-li $a = \pm\infty$, říkáme, že a_n k a **divergují**. **Konvergentní posloupnost** je posloupnost mající *konečnou* limitu; **divergentní** jsou všechny ostatní posloupnosti, tedy posloupnosti s limitou $\pm\infty$ a posloupnosti, které limitu nemají. □

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená**, existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|a_n| \le K$ platí pro všechna n. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená shora** resp. **zdola**, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že je $a_n \le K$ resp. $a_n \ge K$ pro všechna n. □

Platí např. tato tvrzení:

1. *Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, právě když je omezená shora i zdola.*

2. *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n < +\infty$ (resp. $\lim_{n\to\infty} a_n > -\infty$), je posloupnost $\{a_n\}$ omezená shora (resp. zdola). Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Poznámka 3.1. *Na rozdíl od literatury, v níž se konečné a nekonečné limity zavádějí zpravidla třemi různými definicemi, jsou zde všechny možnosti shrnuty do jedné definice.* Je-li $a \in \mathbb{R}$, je konjunkce $(1') \wedge (1'')$ ekvivalentní s výrokem, že

(1_k) pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro s.v. n;

je-li $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$), je podmínka $(1'')$ (resp. $(1')$) *prázdná*, protože nelze splnit její premisu, a podmínku $(1')$ (resp. $(1'')$) lze napsat v ekvivalentním tvaru

(1_n) pro každé $K \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $a_n > K$ (resp. $a_n < K$) pro s.v. n.

Čtenář se může sám přesvědčit, že se s podmínkami ($1'$) a ($1''$) pracuje aspoň tak dobře jako s podmínkami (1_k) a (1_n). $\square$

V této kapitole se budeme zabývat jen limitami, které lze vypočítat elementárními úpravami, známe-li limity některých jednoduchých výrazů, jako např.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \textit{pro každé } x \in (-1,1) \\ +\infty & \textit{pro každé } x \in (1,+\infty) \end{array} \right\}, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \quad \textit{pro každé } x \in \mathbb{R}_+ . \tag{3}$$

Je ovšem nutné znát i základní věty o limitách posloupností:

Věta 3.1 (o limitě absolutní hodnoty). *Je-li* $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, *je* $|a_n| \to |a|$. *Je-li* $|a_n| \to 0$, *je* $a_n \to 0$.

Věta 3.2 (o limitě součtu (rozdílu), součinu a podílu). *Z relací* $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, $b_n \to b \in \mathbb{R}^*$ *plyne, že*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_n \pm b_n \to a \pm b \\ a_n b_n \to ab \\ a_n/b_n \to a/b \end{array} \right\}, \textit{ má-li příslušná pravá strana smysl.} \tag{4}$$

Dodatek. *Nechť* $a_n > 0$ (*resp.* $a_n < 0$) *pro s.v.* n; *pak* $a_n \to 0 \Rightarrow 1/a_n \to +\infty$ (*resp.* $1/a_n \to -\infty$).

Věta 3.3. 1. *Je-li* $a_n \to 0$ *a je-li* $\{b_n\}$ *omezená posloupnost, je* $a_n b_n \to 0$.

2. *Je-li* $\{a_n\}$ *omezená posloupnost a je-li* $|b_n| \to +\infty$, *je* $a_n/b_n \to 0$.

V mnohých případech, v nichž se k výpočtu limity žádná z právě uvedených vět přímo nehodí, může vést k cíli tato *věta o limitním přechodu v nerovnostech*:

Věta 3.4. *Pro každé tři posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ *platí:*

1. $a_n \le b_n$ *pro s.v.n*, $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$;
2. $a_n \le b_n$ *pro s.v.n*, $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$;
3. $a_n \le b_n$ *pro s.v.n*, $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a \le b$;
4. $a_n \le b_n \le c_n$ *pro s.v.n*, $a_n \to b$, $c_n \to b \Rightarrow b_n \to b$.

Poznámka 3.2. Jak se čtenář snadno přesvědčí, je implikace

$$\alpha \in \mathbb{R},\ a \in (1,+\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \tag{5}$$

přímým důsledkem tohoto užitečného tvrzení:

Věta 3.5. *Pro každou posloupnost čísel* $a_n \neq 0$ *platí:*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \quad \square \tag{6}$$

Ilustrujme nyní na několika příkladech, jak lze počítat limity posloupností elementárními úpravami:

Příklad 3.1. Abychom dokázali rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 3\sqrt[4]{n^3} - 10\sqrt{n^2-1} + \sin n^3}{\sqrt[3]{n^2+n+\sqrt{n}} + 3\sqrt[4]{n^4-3}} = -3\,,$$

stačí všechny sčítance v čitateli i ve jmenovateli dělit n. Nové sčítance budou pak mít po řadě limity $1, 0, -10, 0$ (čitatel) a $0, 3$ (jmenovatel) a stačí aplikovat V.3.2.

Poznamenejme, že v podobných případech vytýkáme z čitatele i ze jmenovatele *nejvyšší* mocniny n, čímž (po případné úpravě) získáme výraz tvaru

$$n^\alpha \cdot \frac{a_n + \cdots}{b_n + \cdots}\,, \text{ kde } 0 \neq \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R},\ 0 \neq \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R},$$

a v němž tečky znamenají součty výrazů, z nichž každý má nulovou limitu. Na takto upravený výraz lze pak aplikovat V.3.2. Číslo α je rozdíl exponentů mocnin vytknutých v čitateli a ve jmenovateli; výsledná limita závisí podstatným způsobem na tom, zdali je $\alpha < 0$, nebo $\alpha = 0$, nebo $\alpha > 0$.

Příklad 3.2. Užitím identity $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$ (platné pro každá dvě komplexní čísla a, b) vypočteme např. limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0.$$

Aplikací obecnějšího vzorce

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \tag{7}$$

(platného pro každé $n \in \mathbb{N}$) na rozdíl

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+1} = \sqrt[6]{(n^2+n+1)^3} - \sqrt[6]{(n^3+1)^2} \tag{8}$$

dostaneme zlomek s čitatelem

$$\begin{aligned}(9)\qquad & (n^2+n+1)^3 - (n^3+1)^2 \\ &= (n^6 + 3n^5 + 6n^4 + 7n^3 + 6n^2 + 3n + 1) - (n^6 + 2n^3 + 1) \\ &= 3n^5 + 6n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 3n = n^5\,(3 + \cdots)\,,\end{aligned}$$

kde tečky znamenají výraz, který má pro $n \to \infty$ limitu 0, a se jmenovatelem

$$\begin{aligned}(10)\qquad & \sqrt[6]{(n^2+n+1)^{15}} + \sqrt[6]{(n^2+n+1)^{12}(n^3+1)^2} + \cdots + \sqrt[6]{(n^3+1)^{10}} \\ &= n^5\left(\sqrt[6]{(1+n^{-1}+n^{-2})^{15}} + \cdots + \sqrt[6]{(1+n^{-3})^{10}}\right);\end{aligned}$$

v závorkách v posledním řádku je přitom 6 sčítanců, z nichž každý má limitu 1.

Z (9) a (10) ihned plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\,\right) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}\,. \quad \square$$

Jak jsme již řekli, mohou tam, kde selhávají rovnosti, pomoci nerovnosti a např. V.3.4; ilustrujme to opět příkladem:

Příklad 3.3. Abychom vypočetli limitu

$$b := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+n^5}\,,$$

uvážíme, že $\lim_{n\to\infty}(n^5/2^n) = 0$ (sr. s (5)), z čehož plyne, že nerovnost $n^5 < 2^n$, a tedy i relace

$$2 \le \sqrt[n]{2^n+n^5} \le \sqrt[n]{2^n+2^n} = 2\sqrt[n]{2}$$

platí pro všechna dostatečně velká n.[2]) Protože $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ (sr. s (3)), je $b = 2$ podle 4. části V.3.4.

Příklad 3.4. Abychom vypočítali limitu

(11) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k^2\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, užijeme vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$$

ze Cv.2.3, z něhož je patrné, že pro $\alpha = 3$ je limita rovna 1/3. Podle věty o limitě součinu je proto limita (11) rovna 0 pro všechna $\alpha > 3$ a $+\infty$ pro všechna $\alpha < 3$.

Příklad 3.5. Dokažme, že

(12) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Protože je $\sqrt[n]{n} \ge 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ pro vhodné číslo $h_n \ge 0$. Pro všechna $n > 1$ je přitom podle binomické věty

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\,\right)^n = \left(1+h_n\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h_n^k \ge \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,h_n^2\,;$$

z toho ihned plyne, že $h_n^2 \le 2/(n-1)$, takže $0 \le h_n \le \sqrt{2/(n-1)} \to 0$. Podle V.3.4 je tedy i $h_n \to 0$; podle V.3.2 proto $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1$.

[2]) Tj. „od určitého indexu počínaje“. Čtenář může ověřit, že nerovnost $n^5 < 2^n$ platí pro všechna $n > 22$, zatímco $22^5/2^{22} \doteq 1.23 > 1$. Pro náš výpočet jsou ovšem tyto podrobnosti zbytečné.

Cvičení

Vypočtěte limity pro $n \to \infty$ těchto výrazů:

3.01. $\dfrac{n^2 + (n+1)^2}{(n+3)^2 + (n+4)^2}$

3.02. $\dfrac{2n^3 + (2n-1)^3}{(1-3n)^3 + n^3}$

3.03. $\dfrac{n + 2n^2 + 3n^3}{(n+1)^3 + (n+2)^2 + (n+3)}$

3.04. $\dfrac{n + \sqrt[4]{(n+1)^3} - 2\sqrt{n^2-1}}{4\sqrt[3]{n^3-1} - \sqrt[8]{(n-1)^7} - n}$

3.05. $\dfrac{a_1 n^{\alpha_1} + a_2 n^{\alpha_2} + \cdots + a_p n^{\alpha_p}}{b_1 n^{\beta_1} + b_2 n^{\beta_2} + \cdots + b_q n^{\beta_q}}$, kde $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $a_1 \neq 0 \neq b_1$ a

$\alpha_1 > \cdots > \alpha_p$, $\beta_1 > \cdots > \beta_q$

3.06. $\sqrt{\dfrac{n + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}{n+1}}$

3.07. $\sqrt{\dfrac{n + \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4+1}}}{n+1}}$

3.08. $\dfrac{(n^3-1)(n^2+1) - 2^n}{n^3(n^3+5)}$

3.09. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)$

3.10. $n\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$

3.11. $n\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$

3.12. $n\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}\right)$

3.13. $\dfrac{1}{n - \sqrt{n^2-n}}$

3.14. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+n+2} - \sqrt[3]{n^2-n-2}}$

3.15. $n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$

3.16. $n^\alpha\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right)$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$

3.17. $n^\alpha\left(\sqrt{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt{n^3-\sqrt{n}}\right)$, kde $\alpha\in\mathbb{R}$

3.18. $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k$

3.19. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k^2+k}}$

3.20. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2+k}}$

3.21. $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}\right)$

3.22. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$

3.23. $\sqrt[n]{5^n+4^n+3^n+2^n+1^n}$

3.24. $n^\alpha\,(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$, kde $\alpha\neq 1$

3.25. $n^\alpha\,(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n})$, kde $\alpha\neq 2$

3.26. $\sqrt[n]{n!}$

3.27. $\dfrac{n!}{n^n}$

3.28. $\dfrac{(n!)^2}{n^n}$

3.29. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$

3.30. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k^2-1}$

3.31. $\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)\quad(\,|x|<1)$

Za předpokladu, že $k\in\mathbb{N}$, dokažte tato tvrzení:

3.32. 1) $a_n\to a\in\mathbb{R}\;\Rightarrow\;a_n^k\to a^k$

2) $a_n\to\pm\infty\;\Rightarrow\;a_n^k\to(\pm1)^k\cdot(+\infty)$

3.33. 1) $a_n \geq 0$ *pro s.v.* n, $a_n \to a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq 0$, $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$

2) $a_n \to +\infty \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to +\infty$

3.34. 1) $a_n \to a \in \mathbb{R}$, k *je liché* $\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$

2) $a_n \to -\infty$, k *je liché* $\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to -\infty$ $\square$

Připomeňme nyní některé dobře známé pojmy: Je-li $X \subset \mathbb{R}$, říkáme, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je

$$\left\{\begin{array}{c}\textbf{neklesající}\\ \textbf{rostoucí}\\ \textbf{nerostoucí}\\ \textbf{klesající}\\ \textbf{konstantní}\end{array}\right\} \ \textbf{v}\ X,\ \text{jestliže}\ x \in X,\ y \in X,\ x < y \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) \leq f(y)\\ f(x) < f(y)\\ f(x) \geq f(y)\\ f(x) > f(y)\\ f(x) = f(y)\end{array}\right\}.$$

Říkáme, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je **monotónní** (resp. **ryze monotónní**), je-li buď neklesající, nebo nerostoucí (resp. buď rostoucí, nebo klesající). Místo „funkce f je neklesající (rostoucí, nerostoucí, klesající) v X" se též říká, že „f v X **neklesá** (**roste**, **neroste**, **klesá**)".

Je-li $X = \mathbb{N}$ (nebo obecněji $X = \mathbb{N}(N)$, kde $N \in \mathbb{Z}$), je funkce $f : X \to \mathbb{R}$ *posloupností*. I když se tedy právě vyslovené definice vztahují i na posloupnosti, připomeneme jejich běžnější (ekvivalentní) podobu tímto jednoduchým tvrzením:

Posloupnost

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ \textit{je}\ \left\{\begin{array}{c}\textit{neklesající}\\ \textit{rostoucí}\\ \textit{nerostoucí}\\ \textit{klesající}\\ \textit{konstantní}\end{array}\right\},\ \textit{právě když}\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a_n \leq a_{n+1}\\ a_n < a_{n+1}\\ a_n \geq a_{n+1}\\ a_n > a_{n+1}\\ a_n = a_{n+1}\end{array}\right\}.$$

Dodejme ještě, že posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **stacionární**, existuje-li m tak, že $a_n = a_m$ pro každé $n > m$. $\square$

Má-li se dokázat jen *existence* limity, hodí se často tato obecná věta:

Věta 3.6 (o existenci limity monotónní posloupnosti). *Každá monotónní posloupnost má (konečnou nebo nekonečnou) limitu. Konečnou limitu má právě každá omezená monotónní posloupnost.*

P o d r o b n ě j i : Je-li posloupnost $\{a_n\}$ *neklesající (nerostoucí), je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \quad \big(\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\big).$$

Příklad 3.6. Ukažme, že *první z posloupností*

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{13}$$

roste, druhá klesá.

Nechť a_n je n-tý člen první posloupnosti; jednoduchým výpočtem a užitím Bernoulliho nerovnosti (viz Cv. 2.10) dostaneme vztahy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n$$
$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1\,,$$

které dokazují, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Nechť b_n je n-tý člen druhé z posloupností (13); podobným postupem jako nahoře získáme pro každé $n > 1$ relace

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1\,,$$

z nichž je patrné, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Ze zřejmé nerovnosti $a_n < b_n$ platné pro každé $n \in \mathbb{N}$ ihned plyne, že obě posloupnosti jsou omezené; podle V. 3.6 mají tedy jisté konečné limity a resp. b. Protože je $b_n = a_n\,(n+1)/n$ a protože $(n+1)/n \to 1$ pro $n \to \infty$, je $a = b$.

Společná limita

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{14}$$

posloupností (13) se nazývá **Eulerovo číslo**; je základem tzv. *přirozených logaritmů.*

Cvičení

Pomocí vět V. 3.6 a V. 3.4 dokažte existenci konečných limit těchto dvou posloupností:

3.35. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ **3.36.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$, kde $\alpha > 2$. $\square$

3.37. Buď $a_0 := \sqrt{2}$ a $a_n := \sqrt{2+a_{n-1}}$, je-li $n \in \mathbb{N}$; dokažte, že $a_n \to 2$.

3.38. Proveďte do všech podrobností důkaz tohoto tvrzení:

Věta 3.7. *Pro každou posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *platí:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^* \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a\,. \tag{15}$$

(Návod: Je-li dáno $a' < a$, zvolíme pomocné $b' \in (a', a)$ a najdeme $p \in \mathbb{N}$ tak, že je $a_n > b'$ pro každé $n > p$. Protože $(a_1 + \ldots + a_p)/n \to 0$ a $(n-p)b'/n \to b'$ pro $n \to \infty$, existuje $q > p$ tak, že pro všechna $n > q$ je

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_p}{n} + \frac{a_{p+1} + \ldots + a_n}{n} > \frac{a_1 + \ldots + a_p}{n} + \frac{n-p}{n} b' > a'\,.$$

Podobně postupujeme v případě, že je dáno $a'' > a$.)

3.39. Pomocí V. 3.7 ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} = 1\,. \quad \square$$

* * *

Je-li $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, říkáme, že $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **posloupnost vybraná** z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z definice limity ihned plyne, že

$$a_n \to a \;\Rightarrow\; a_{n_k} \to a\,. \tag{16}$$

Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje-li posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $a_{n_k} \to a$ (pro $k \to \infty$). Množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ značíme $\operatorname{Ls} a_n$. [3])

Platí tato tři důležitá tvrzení:

Věta 3.8. (Bolzano–Weierstrassova.) *Každá posloupnost má aspoň jeden hromadný bod v* $\mathbb{R}^*$. *Každá omezená posloupnost má aspoň jeden hromadný bod v* $\mathbb{R}$.

Věta 3.9. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, *právě když je* $\operatorname{Ls} a_n = \{a\}$.

Věta 3.10. *Pro každou posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *existuje* $\min \operatorname{Ls} a_n$ *i* $\max \operatorname{Ls} a_n$.

Čísla $\min \operatorname{Ls} a_n$ a $\max \operatorname{Ls} a_n$ se nazývají **limes inferior** a **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značí se např. takto:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min \operatorname{Ls} a_n\,, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max \operatorname{Ls} a_n\,;$$

symbol „$n \to \infty$" pod znaky lim inf a lim sup se často vynechává.

[3]) Označení je převzato z obecné topologie, kde znamená *topologický limes superior*; latinský *limes* je na rozdíl od české *limity* rodu mužského.

Snadno nahlédneme, že *posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu, právě když je* $\min \mathrm{Ls}\, a_n = \max \mathrm{Ls}\, a_n$; *limita je pak rovna společné hodnotě* $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$.

Obráceně: *K tomu, aby posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *neměla limitu, je nutné a stačí, aby měla aspoň dva různé hromadné body, tj. aby bylo* $\liminf a_n < \limsup a_n$.

Cvičení

Pro každou z následujících posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ najděte množinu $\mathrm{Ls}\, a_n$ a čísla $\liminf a_n$, $\limsup a_n$.

3.40. $(-1)^n$

3.41. $(-1)^n n$

3.42. $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

3.43. $(-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\,)$

3.44. $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

3.45. $(-1)^n \, \dfrac{n^2+1}{n+1}$

3.46. $1 + \dfrac{n}{n+1} \cos\left(\tfrac{1}{2} n\pi\right)$

3.47. $n \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi n\right)$

3.48. $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \cos n\pi$

3.49. $\sin \dfrac{n\pi}{k}$, kde $k \in \mathbb{N}$

Dále:

3.50. Dokažte, že posloupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ nemají limitu.

(Návod pro první posloupnost. Označíme-li

$$I_k := \left\langle \tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi, \tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle, \quad J_k := \left\langle -\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi, -\tfrac{1}{6}\pi + 2k\pi \right\rangle,$$

je $\sin x \geq \frac{1}{2}$ všude v I_k a $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ všude v J_k pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Protože délka každého z intervalů I_k, J_k je $\frac{2}{3}\pi > 2$, existují dvě rostoucí posloupnosti přirozených čísel $m_k \in I_k$, $n_k \in J_k$ tak, že $\sin m_k \geq \frac{1}{2}$ a $\sin n_k \leq -\frac{1}{2}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Z toho snadno plyne, že posloupnost $\sin n$ nemá limitu.)

Řešení

3.01. 1. **3.02.** $-\frac{5}{13}$. **3.03.** 3. **3.04.** $-\frac{1}{3}$.

3.05. a_1/b_1 pro $\alpha_1 = \beta_1$; $\operatorname{sgn}(a_1/b_1)\cdot(+\infty)$ pro $\alpha_1 > \beta_1$; 0 pro $\alpha_1 < \beta_1$.

3.06. 1. **3.07.** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **3.08.** $-\infty$. **3.09.** $-\frac{1}{2}$. **3.10.** 1. **3.11.** $+\infty$.

3.12. 1. **3.13.** 2. **3.14.** $+\infty$.

3.15. $\frac{2}{3}$ pro $\alpha = \frac{4}{3}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{4}{3}$; 0 pro $\alpha < \frac{4}{3}$.

3.16. 1 pro $\alpha = \frac{1}{2}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$; 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$.

3.17. 1 pro $\alpha = 1$; $+\infty$ pro $\alpha > 1$; 0 pro $\alpha < 1$.

3.18. $\frac{1}{2}$. **3.19.** $+\infty$. **3.20.** $+\infty$. **3.21.** $1-\sqrt{2}$. **3.22.** $+\infty$. **3.23.** 5.

3.24. $+\infty$ pro $\alpha > 1$; 0 pro $\alpha < 1$. **3.25.** $+\infty$ pro $\alpha > 2$; 0 pro $\alpha < 2$.

3.26. $+\infty$. **3.27.** 0. **3.28.** $+\infty$. **3.29.** 0. **3.30.** $\frac{1}{2}$. **3.31.** $1/(1-x)$.

Protože množina $\operatorname{Ls} a_n$ je ve všech příkladech 3.40 – 3.49 konečná, jistě není nutné uvádět její minimum $\liminf a_n$ a maximum $\limsup a_n$; omezujeme se proto jen na vyjmenování hromadných bodů.

3.40. ± 1. **3.41.** $\pm\infty$. **3.42.** ± 1. **3.43.** 0. **3.44.** $0, 1$. **3.45.** $\pm\infty$.

3.46. $0, 1, 2$. **3.47.** $0,\ \pm\infty$. **3.48.** $\pm e$. **3.49.** $\pm\sin(j\pi/k),\ 0 \le j < k$.

Poznámka 3.3. Cvičení **3.24** s $\alpha = 1$ a **3.25** s $\alpha = 2$ nevyřešíme jednoduchými algebraickými úpravami; k výsledkům ($\lg(3/2) \doteq 0.405465$ resp. 1) však lze dojít metodami, které vyložíme v kapitole 6 (sr. s Po. 6.4 a příkladem 6.81).

Cvičení

3.51. Dokažte, že $a \in \operatorname{Ls} a_n$, *právě když každé okolí bodu a obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$, tj. právě když pro každé $U(a)$ existuje nekonečně mnoho indexů n, pro něž je $a_n \in U(a)$.*

Dokažte dále, že v důsledku toho platí i toto tvrzení:

$$b_k \in \operatorname{Ls} a_n \ \ \textit{pro všechna}\ \ k \in \mathbb{N},\ b_k \to b\ \Rightarrow\ b \in \operatorname{Ls} a_n. \tag{17}$$

3.52. Existují posloupnosti, jejichž členy jsou (právě) všechna racionální čísla; jednou z nich je např. tato posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$-\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2},$$
$$-\frac{9}{3}, -\frac{8}{3}, \dots, \frac{0}{3}, \dots, \frac{9}{3}, -\frac{16}{4}, -\frac{15}{4}, \dots, \frac{16}{4}, -\frac{25}{5}, \dots .$$

Protože pro každé číslo $q \in \mathbb{Q}$ existuje nekonečně mnoho indexů n tak, že $q = a_n$, je zřejmě $\mathbb{Q} \subset \operatorname{Ls} a_n$. Dokažte však, že $\operatorname{Ls} a_n = \mathbb{R}^*$, tj. že *každé číslo* $r \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodem této posloupnosti.*

3.53. Srovnejte prvky „dvakrát nekonečné" matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{2} & 1+\frac{1}{3} & 1+\frac{1}{4} & \dots \\ 2 & 2+\frac{1}{2} & 2+\frac{1}{3} & 2+\frac{1}{4} & \dots \\ 3 & 3+\frac{1}{2} & 3+\frac{1}{3} & 3+\frac{1}{4} & \dots \\ 4 & 4+\frac{1}{2} & 4+\frac{1}{3} & 4+\frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

po jejích *vedlejších diagonálách* do posloupnosti

$$1, 1+\tfrac{1}{2}, 2, 1+\tfrac{1}{3}, 2+\tfrac{1}{2}, 3, 1+\tfrac{1}{4}, 2+\tfrac{1}{3}, 3+\tfrac{1}{2}, 4, \dots$$

a dokažte, že hromadnými body této posloupnosti jsou právě všechna přirozená čísla a bod $+\infty$.

3.54. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, pro niž je $\operatorname{Ls} a_n = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3.55. Rozhodněte, zdali existuje posloupnost $\{a_n\}$, pro niž je $\operatorname{Ls} a_n$ rovno $\mathbb{N}$ resp. $\{1/n;\, n \in \mathbb{N}\}$ resp. $\mathbb{Q}$. (Odpověď je „ne" na všechny tři otázky – viz (17).)

4. Limity funkcí – 1. část

Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a je-li $a \in \mathbb{R}^*$, píšeme

(1) $$a \neq a_n \to a \;\text{ resp. }\; a < a_n \to a \;\text{ resp. }\; a > a_n \to a\,,$$

je-li $a_n \to a$ a zároveň $a_n \neq a$ resp. $a_n > a$ resp. $a_n < a$ pro s.v. n.

Reálnou funkcí reálné proměnné rozumíme každé zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Je-li f taková funkce, je-li $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in (-\infty, +\infty\rangle$ resp. $a \in \langle-\infty, +\infty)$), je-li $A \in \mathbb{R}^*$ a platí-li implikace

(2) $$a \neq a_n \to a \;\;(\text{resp. } a < a_n \to a \;\text{ resp. } a > a_n \to a) \;\Rightarrow\; f(a_n) \to A\,,$$

říkáme, že A je (**oboustranná**) **limita** (resp. **limita zprava** resp. **limita zleva**) **funkce** f **v bodě** a; tuto limitu pak značíme

(3) $$\lim_{x\to a} f(x) \;\;(\text{resp. } \lim_{x\to a+} f(x) \;\text{ resp. } \lim_{x\to a-} f(x))$$

nebo krátce

(3*) $$f(a\pm) \;\;(\text{resp. } f(a+) \;\text{ resp. } f(a-))\,.$$

Místo $\lim_{x\to+\infty-} f(x)$ resp. $\lim_{x\to-\infty+} f(x)$ se zpravidla píše jen $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Limity zprava a zleva se nazývají **jednostranné**.

Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, říkáme též, že $f(x)$ pro $x \to a$ **konverguje** k A; je-li $A = \pm\infty$, říkáme, že $f(x)$ k A **diverguje**. Podobné slovní vazby se užívají i v případě jednostranných limit. Často je výhodný i zápis

(4) $$f(x) \to A \;\text{ pro }\; x \to a \;\;(\text{resp. } x \to a+ \;\text{ resp. } x \to a-)\,.$$

Čtenáři je jistě známo, že *limita* $f(a\pm)$ *existuje, právě když je* $f(a+) = f(a-)$, *načež* $f(a\pm) = f(a+) = f(a-)$. $\square$

V oddílu „Označení, operace, zkratky“ najde čtenář definice okolí

(5) $$U(a,\delta),\;\; U^+(a,\delta),\;\; U^-(a,\delta)\,,$$

která se stručněji značí $U(a)$, $U^+(a)$, $U^-(a)$ a nazývají **oboustranná**, **pravá** a **levá** **okolí bodu** a. Množiny, které z nich vzniknou odstraněním bodu a, značíme

(6) $$P(a,\delta),\;\; P^+(a,\delta),\;\; P^-(a,\delta)\,,$$

stručněji $P(a)$, $P^+(a)$, $P^-(a)$; jsou to tzv. **prstencová** neboli **redukovaná okolí bodu** a, a to **oboustranná**, **pravá** a **levá**.

Pro limity funkcí (oboustranné, zprava, zleva) platí analogie vět V. 3. 1 – V. 3. 4; slova „pro s.v. n" je ovšem třeba nahradit slovy „pro všechna x z jistého (oboustranného, pravého, levého) prstencového okolí bodu a".

Kromě toho platí tato *velmi důležitá a často užívaná věta*:

Věta 4.1 (o limitě superpozice). *Nechť existují limity $b := f(a\pm)$ a $c := g(b\pm)$; nechť dále existuje okolí $P(a)$ tak, že pro každé $x \in P(a)$ platí nerovnost $f(x) \neq b$. Pak existuje i limita $(g \circ f)(a\pm)$ a rovná se c.*

Poznámka 4.1. Předpoklad věty 4.1, že existuje $P(a)$ tak, že $b \notin f(P(a))$, je *podstatný* – není-li splněn, *nemusí* rovnost $(g \circ f)(a\pm) = c$ platit.

P ř í k l a d : Je-li $f(x) := 1 - |\operatorname{sgn} x|$, $g(y) := |\operatorname{sgn} y|$, je $f(x) = 0$ pro všechna $x \neq 0$, $g(y) = 1$ pro všechna $y \neq 0$, $g(f(x)) = 0$ pro všechna $x \neq 0$. Je-li tedy $a = 0$, je $b := f(0\pm) = 0$, $c := g(0\pm) = 1$, $(g \circ f)(0\pm) = 0$; tvrzení věty 4.1 tedy *neplatí*.

Je to proto, že *limita $g(b\pm)$ obecně nijak nesouvisí s hodnotou funkce g v bodě b*; *při tvorbě superpozice*, tedy při dosazování $y = f(x)$ do $g(y)$, *se proto $f(x)$ nesmí rovnat b* – stačí v jistém $P(a)$, protože existence ani hodnota limity $f(a\pm)$ nezávisí na tom, jak se funkce f chová „daleko od bodu a".

Plné pochopení toho, co jsme právě řekli, je nejen nutným předpokladem pro spolehlivou aplikaci V. 4. 1, ale také východiskem pro samostatnou tvorbu modifikací této věty. Protože každou z oboustranných limit lze v této větě buď ponechat, nebo nahradit jednostrannou limitou, existuje ještě dalších osm tvrzení podobných V. 4. 1 a v početní praxi se setkáváme se všemi devíti situacemi. Máme dvě možnosti:

1) *Nerozumět* a buď si pamatovat všech devět tvrzení, nebo (v souladu s praxí bezduchého kalkulu) předpoklady ignorovat a spoléhat, že to přesto „všechno dobře dopadne".

2) *Rozumět* a nezatěžovat si paměť tvrzeními, která v případě potřeby a podle dané situace umíme sami spolehlivě vytvořit.

V případě, že se splní autorovo přání a čtenář se rozhodne postupovat podle bodu 2), zbývá jen uvědomit si, že *limita zprava* (*zleva*) *závisí jen na hodnotách, kterých příslušná funkce nabývá v jistém pravém* (*levém*) *prstencovém okolí příslušného bodu.* Pak budou jistě zřejmé tyto dvě zásady modifikace věty 4.1:

Nahradíme-li předpoklad existence limity $f(a\pm)$ předpokladem, že existuje limita $f(a+)$ resp. $f(a-)$, dostaneme tvrzení o limitě $(g \circ f)(a+)$ resp. o limitě $(g \circ f)(a-)$. Nahradíme-li předpoklad existence limity $g(b\pm)$ předpokladem, že existuje limita $g(b+)$ ($g(b-)$), budeme předpokládat, že všude v jistém $P(a+)$ resp. $P(a-)$ platí nerovnost $f(x) > b$ ($f(x) < b$). [1])

Platí tedy např. tato tvrzení:

A. *Nechť existují limity $b := f(a-)$ a $c := g(b+)$; nechť dále existuje okolí $P^-(a)$ tak, že pro každé $x \in P^-(a)$ platí nerovnost $f(x) > b$. Pak existuje i limita $(g \circ f)(a-)$ a rovná se c.*

---

[1]) Tento předpoklad není ovšem nutné *explicite* uvádět, je-li $b = -\infty$ ($b = +\infty$); je zajímavé, že s nekonečnými limitami se v tomto případě pracuje o něco jednodušeji než s limitami konečnými.

B. *Nechť existují limity* $b := f(a\pm)$ a $c := g(b-)$; *nechť dále existuje okolí* $P(a)$ *tak, že pro každé* $x \in P(a)$ *platí nerovnost* $f(x) < b$. *Pak existuje i limita* $(g \circ f)(a\pm)$ *a rovná se* c.

C. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(1/x)$ (*resp.* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to 0-} g(1/x)$), *má-li jedna strana rovnosti smysl.*

K velmi důležitým existenčním větám patří toto tvrzení:

Věta 4.2 (o existenci jednostranných limit monotónní funkce). *Je-li funkce* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *monotónní* (v (a, b)), *existují obě jednostranné limity* $f(a+)$, $f(b-)$.

Podrobněji: Je-li funkce f v (a, b) *neklesající* (*resp. nerostoucí*), *je* $f(a+) = \inf f((a, b))$, $f(b-) = \sup f((a, b))$ (*resp.* $f(a+) = \sup f((a, b))$, $f(b-) = \inf f((a, b))$).

Důsledek: Je-li funkce f *monotónní v intervalu* (a, b), *existují pro každé* $c \in (a, b)$ *konečné limity* $f(c-)$, $f(c+)$. *Pro neklesající* (*resp. nerostoucí*) *funkci* f *je přitom* $f(c-) \le f(c) \le f(c+)$ (*resp.* $f(c-) \ge f(c) \ge f(c+)$).

* * *

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} = f(a)$, říkáme, že f je **spojitá v bodě** a; **spojitost zprava** resp. **zleva** se definuje platností rovnosti $\lim_{x\to a+} = f(a)$ resp. $\lim_{x\to a-} = f(a)$. Spojitosti se někdy podrobněji říká **oboustranná spojitost**, zatímco spojitost zprava resp. zleva je spojitost **jednostranná**.

Je zřejmé, že f *je spojitá v bodě* a, *právě když je v bodě* a *spojitá zprava i zleva.* Kromě toho platí: f *je spojitá v bodě* a, *právě když*

$$a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a); \tag{7}$$

analogicky: f *je spojitá v bodě* a *zprava* (*zleva*), *právě když*

$$a \le a_n \to a \quad (a \ge a_n \to a) \Rightarrow f(a_n) \to f(a). \tag{7±}$$

Důležité upozornění. Bohužel se často stává, že začátečník – mnohdy ovlivněný falešným výkladem pojmů limity a spojitosti ve škole – dostatečně nerozlišuje limitu od hodnoty. Je proto vhodné pamatovat si jednoduchý protipříklad a zároveň vědět, kdy je limitu *opravdu* možné nahradit hodnotou:

Příklad: Je-li $f(x) := |\operatorname{sgn} x|$, je $f(0) = 0$. Protože však je $f(x) = 1$ pro všechna $x \neq 0$, je i $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$.

Tvrzení: *Výpočet* $\lim_{x\to a} f(x)$ *lze nahradit dosazením* $x = a$ *do* $f(x)$, *právě když je* f *spojitá v bodě* a.

Přímo z definice spojitosti vyplývá, že *v žádném jiném případě nelze limitní přechod nahradit dosazením!* [2]) □

[2]) Protože spojitost je definována jen v bodech $a \in \mathbb{R}$, je zřejmé, že *dosazovat nelze v případě, že* $a = \pm\infty$. Říkat například, že „exponenciála je v $-\infty$ rovna 0“, je *nesprávné*, protože symbol $\exp(-\infty)$ nemá smysl. Je ovšem $\exp(-\infty+) = 0$ a „*limita* $\exp x$ *pro* $x \to -\infty$ *je rovna* 0“ resp. „$\exp x$ *konverguje k* 0 *pro* $x \to -\infty$“ jsou správné výroky.

Vzhledem k okolnostem uvedeným v Po. 4.1 jistě uvítáme platnost této jednoduché *modifikace věty o limitě superpozice*:

Věta 4.1*. *Je-li* $f(a\pm) = b$ *(resp.* $f(a+) = b$ *resp.* $f(a-) = b$*) a je-li funkce* g *spojitá v bodě* b*, je* $(g \circ f)(a\pm) = g(b)$ *(resp.* $(g \circ f)(a+) = g(b)$ *resp.* $(g \circ f)(a-) = g(b)$*).*

Poznámka 4.1*. Podobně jako tomu bylo u V. 4.1, lze i V. 4.1* modifikovat tím, že předpoklad oboustranné spojitosti funkce g v bodě b nahradíme předpokladem spojitosti jednostranné. Pak je ovšem třeba přidat předpoklad, že všechny hodnoty, kterých funkce f nabývá v jistém $P(a)$ (resp. $P^+(a)$ resp. $P^-(a)$), jsou $\geq b$, je-li g spojitá v bodě b zprava, resp. $\leq b$, je-li g spojitá v bodě b zleva. Čtenář, který myšlenkově plně zvládl obsah Po. 4.1, nebude mít jistě potíže s vytvořením platných vět analogických větě 4.1*, tedy ani např. s touto její modifikací:

D. *Je-li* $f(a\pm) = b$*, existuje-li* $P(a)$ *tak, že pro každé* $x \in P(a)$ *je* $f(x) \leq b$*, a je-li funkce* g *spojitá v bodě* b *zleva, je* $(g \circ f)(a\pm) = g(b)$*.*

* * *

Říkáme, že funkce f je **spojitá v intervalu** $I \subset \mathbb{R}$, jestliže

$$a_n \in I\,, a_n \to a \in I \;\Rightarrow\; f(a_n) \to f(a)\,. \tag{8}$$

Spojitost funkce f v intervalu I lze (ekvivalentně) popsat i takto:

Funkce f *je spojitá v intervalu* I *s krajními body* $a < b$*, právě když platí tyto dvě podmínky:*

1) f *je spojitá zprava v každém bodě* $x \in I$ *různém od* b*,*

2) f *je spojitá zleva v každém bodě* $x \in I$ *různém od* a*.* □

Je-li $a \in \mathbb{R}$, je (**oboustranná**) **derivace funkce** f **v bodě** a definována rovností

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,, \tag{9}$$

existuje-li (konečná nebo nekonečná) limita vpravo; rovnosti

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,, \quad f'_-(a) := \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{9$\pm$}$$

definují – za předpokladu, že příslušná limita existuje – **derivace jednostranné**, konkrétněji **derivaci zprava** a **derivaci zleva**.

Platí tato základní tvrzení:

$f'(x)$ *existuje, právě když je* $f'_+(x) = f'_-(x)$*, načež se* $f'(x)$ *rovná společné hodnotě* $f'_+(x)$ *a* $f'_-(x)$*.*

Z existence <u>*konečné*</u> *derivace* $f'(a)$ *(resp.* $f'_+(a)$ *resp.* $f'_-(a)$*) plyne spojitost funkce* f *v bodě* a *(resp. zprava resp. zleva v bodě* a*).*

Poznámka 4.2. *Z existence nekonečné derivace spojitost neplyne*, jak ukazuje příklad funkce sgn, která má v bodě 0 derivaci $+\infty$, ale není v tomto bodě spojitá, a to ani zprava, ani zleva.

Za druhé: *Ze spojitosti neplyne existence derivace* (ani konečné, ani nekonečné), jak ukazují tyto dva další příklady:

Funkce $f(x) := |x|$ má pro všechna $x \neq 0$ derivaci $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$; protože $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, $f'(0)$ neexistuje, přestože f je v bodě 0 spojitá.

Poněkud složitější příklad funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované podmínkami

$$g(x) := x \sin \frac{1}{x} \text{ pro } x \neq 0\,, \quad g(0) := 0\,, \tag{10}$$

ukazuje, že *ze spojitosti funkce* (v našem případě v bodě 0) *neplyne ani existence kterékoli z jednostranných derivací.* $\square$

Příklad 4.1. Čtenáři je jistě známo, že

$$(\mathrm{Id}^n)' = n\,\mathrm{Id}^{n-1} \quad \textit{všude v} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}, & \textit{je-li } n \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+, & \textit{je-li } n \in \mathbb{Z},\ n < 0 \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Každý *polynom*, tj. každá funkce tvaru $\sum_{k=0}^{n} a_k \,\mathrm{Id}^k$, kde $n \geq 0$ a kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou (konečná) reálná čísla, je spojitý v celém $\mathbb{R}$. *Racionální funkce* f je spojitá v každém intervalu obsaženém v jejím definičním oboru, tedy – píšeme-li $f = g/h$, kde g a $h \not\equiv 0$ jsou polynomy – v každém intervalu, který neobsahuje žádný kořen polynomu h. (Seřadíme-li všechny reálné kořeny tohoto polynomu do posloupnosti $x_1 < \ldots < x_n$, kde $n \geq 0$ [3]), a označíme-li ještě $x_0 := -\infty$, $x_{n+1} := +\infty$, jsou (x_k, x_{k+1}), $0 \leq k \leq n$, *maximální* intervaly, v nichž je racionální funkce f spojitá.)

Liché odmocniny jsou spojité v celém $\mathbb{R}$, v bodě 0 mají derivaci rovnou $+\infty$. *Sudé odmocniny* jsou spojité jen v intervalu $\langle 0, +\infty)$ (který je jejich definičním oborem) a v bodě 0 zprava mají derivaci rovnou $+\infty$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ má n-tá odmocnina derivaci

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}\, x^{1/n-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \tag{12}$$

v každém bodě $x \neq 0$ svého definičního oboru. $\square$

Pro pohodlí čtenářů nyní zopakujeme některé základní vlastnosti funkcí, s nimiž se v elementární analýze nejčastěji setkáváme:

Funkce

$$\sin,\ \cos,\ \mathrm{tg},\ \mathrm{cotg},\ \exp,\ \lg,\ \exp_a := \exp \circ (a \lg),\ \lg_a := (\exp_a)_{-1}, \tag{13}$$

kde $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, stejně jako funkce

$$\sinh x := \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),\ \cosh x := \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{14}$$

[3]) Je-li $n = 0$, jde o „prázdnou posloupnost“, což odpovídá situaci, že $h \neq 0$ všude v $\mathbb{R}$.

tedy **hyperbolický sinus** a **kosinus**, mají v každém bodě x svého definičního oboru (konečnou) derivaci, přičemž

$$\sin' x = \cos x\,,\;\; \cos' x = -\sin x\,,\;\; \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\;\; \operatorname{cotg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \tag{15}$$

$$\exp' x = \exp x\,,\;\; \lg x = \frac{1}{x}\,,\;\; \exp_a' x = \lg a \cdot \exp_a x\,,\;\; \lg_a' x = \frac{1}{x \cdot \lg a}\,, \tag{16}$$

$$\sinh' x = \cosh x\,,\;\; \cosh' x = \sinh x\,. \tag{17}$$

Cyklometrické a **hyperbolometrické funkce** jsou definovány rovnostmi

$$\arcsin := \big(\sin|\langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle\big)_{-1}, \qquad \arccos := \big(\cos|\langle 0,\pi\rangle\big)_{-1}, \tag{18}$$

$$\operatorname{arctg} := \big(\operatorname{tg}|(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)\big)_{-1}, \qquad \operatorname{arccotg} := \big(\operatorname{cotg}|(0,\pi)\big)_{-1}, \tag{19}$$

$$\operatorname{argsinh} := \sinh_{-1}, \qquad \operatorname{argcosh} := \big(\cosh|\langle 0,+\infty)\big)_{-1}, \tag{20}$$

a každá z nich je spojitá ve svém definičním oboru; přitom

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{v} \;\; (-1,1)\,, \tag{21}$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{v} \;\; \mathbb{R}\,, \tag{22}$$

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{v} \;\; \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{v} \;\; (1,+\infty)\,. \tag{23}$$

Podobně jako je tomu u posloupností, lze limity funkcí často počítat vhodnou úpravou příslušného „výrazu“; podstatnou úlohu při tom ovšem hrají „základní limity“, jako např.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x} = \\ &\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{argsinh} x}{x} = 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Všechny tyto limity jsou zároveň derivacemi příslušných funkcí v bodě 0. Často jsou potřebné i limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{25}$$

V následujících čtyřech limitách se porovnávají „rychlosti růstu“ mocnin a logaritmických resp. exponenciálních funkcí:

$$\alpha\in\mathbb{R},\; \beta\in\mathbb{R}_+ \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg^\alpha x}{x^\beta} = \lim_{x\to 0+} x^\beta\,|\lg x|^\alpha = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha\, e^{\beta x} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad \square \tag{26}$$

Ukažme nyní na několika příkladech, jak lze některé limity počítat *úpravou* příslušného výrazu:

Příklad 4.2. Je-li $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$, $\beta_1 < \cdots < \beta_q$, $a_1 \neq 0 \neq b_1$, lze limitu

$$A := \lim_{x\to 0+} \frac{a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_p x^{\alpha_p}}{b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_q x^{\beta_q}} \tag{27}$$

vypočítat tím, že vytkneme *nejnižší* mocniny x v čitateli a ve jmenovateli. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha_1-\beta_1}\, \frac{a_1+\cdots}{b_1+\cdots}\,, \tag{28}$$

kde tři tečky znamenají výrazy konvergující k 0. Zlomek má tedy limitu a_1/b_1 a podle věty o limitě součinu je

$$A = \left\{\begin{array}{ll} a_1/b_1 & \text{při } \ \alpha_1 = \beta_1 \\ 0 & \text{při } \ \alpha_1 > \beta_1 \\ \operatorname{sgn}(a_1/b_1)\cdot(+\infty) & \text{při } \ \alpha_1 < \beta_1 \end{array}\right\}. \tag{29}$$

Postupovali jsme zřejmě podobně jako v případě posloupnosti (sr. s Př. 3.1), kde jsme však vytkli *nejvyšší* mocniny n, protože šlo o limitu pro $n\to\infty$. Zcela analogicky jako u posloupností bychom postupovali, kdyby (27) byla limitou pro $x\to+\infty$ a kdyby bylo $a_p \neq 0 \neq b_q$. Jak je patrné, čitatel i jmenovatel se vždy snažíme upravit tak, aby daný zlomek nabyl tvaru $x^\gamma(c+\dots)$, kde $c\neq 0$ a kde tři tečky představují funkci konvergující k 0.

Příklad 4.3. Užitím identity $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ vypočteme (podobně jako kdyby šlo o posloupnost) limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-1}\right) \tag{30}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+x+1)(x^2+x-1)} + \sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}}\,.$$

Po této úpravě, kterou jsme odstranili nepřehledný rozdíl odmocnin, z nichž každá má limitu $+\infty$, vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem $x^{4/3}$, využijeme spojitosti v bodě 1 každé z výsledných třetích odmocnin ve jmenovateli a ihned vidíme, že hledaná limita je rovna $\frac{2}{3}$. $\square$

V dalších dvou příkladech budeme potřebovat některé z rovností (24) – (26) spolu s větou 4.3 o limitě superpozice; podstatnou roli bude hrát i spojitost.

Příklad 4.4. Abychom mohli při výpočtu limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x\cdot \sin 3x)} \tag{31}$$

užít (25), přepíšeme čitatel na tvar

$$1 - \cos x + \cos x\,(1 - \sqrt{\cos 2x}\,) = (1 - \cos x) + \frac{\cos x}{1 + \sqrt{\cos 2x}}\,(1 - \cos 2x)$$

a po vydělení výrazem x^2 dostaneme identitu

$$\frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x}{1 + \sqrt{\cos 2x}} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \cdot 4\,,$$

jejíž pravá strana má pro $x \to 0$ limitu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{3}{2}$. Protože identita

$$\frac{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x \cdot \sin 3x)}{x^2} = \frac{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x \cdot \sin 3x)}{\arcsin 2x \cdot \sin 3x} \cdot \frac{\arcsin 2x}{2x} \cdot 2 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3$$

platí např. v $P(0, \frac{1}{2})$ a protože její pravá strana má limitu $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$, je zřejmé, že limita (31) je rovna $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$.

Příklad 4.5. Někdy lze limitu vypočítat vhodnou substitucí a aplikací V. 4. 1 resp. V. 4. 1*. Při hledání limity

$$A := \lim_{x \to +\infty} x \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \tag{32}$$

můžeme uvažovat např. takto: Je-li $t \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, plyne z rovnosti $x = \operatorname{cotg} t$ rovnost $x^2 + 1 = \operatorname{cotg}^2 t + 1 = 1/\sin^2 t$, takže

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{cotg} t \cdot \sin t = \cos t\,; \tag{33}$$

kromě toho $t \to 0+ \Rightarrow x = \operatorname{cotg} t \to +\infty$. Podle V. 4. 1 a Po. 4. 1 je tedy

$$A = \lim_{t \to 0+} \operatorname{cotg} t \cdot \arccos(\cos t) = \lim_{t \to 0+} \cos t \cdot \frac{t}{\sin t} = 1\,. \quad \square \tag{34}$$

Připomeňme, že výraz

$$f(x)^{g(x)} := \exp(g(x) \lg f(x)) \tag{35}$$

je definován v těch intervalech obsažených v průniku definičních oborů funkcí f, g, v nichž je $f(x) > 0$. Při výpočtu limit funkcí tvaru (35) najdeme zpravidla nejdříve limitu exponentu $h(x) := g(x) \lg f(x)$ a pak aplikujeme V. 4. 1 s tím, že

$$h(x) \to \left\{\begin{matrix} -\infty \\ A \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exp(h(x)) \to \left\{\begin{matrix} 0 \\ \exp A \\ +\infty \end{matrix}\right\}. \tag{36}$$

Příklad 4.6. Máme vypočítat limitu

$$A := \lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{1/x}, \tag{37}$$

pokud existuje. Je-li $x \in (-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, je $\sin x + \cos x > 0$ a

$$\frac{1}{x}\lg(\sin x + \cos x) = \frac{\lg(1 + (\sin x + \cos x - 1))}{\sin x + \cos x - 1}\Big(\frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x}\Big). \tag{38}$$

První zlomek vpravo přitom konverguje k 1 podle V.4.1, protože $\lg(1+y)/y \to 1$ pro $y \to 0$ a protože funkce $\sin x + \cos x - 1$ má limitu 0 a neanuluje se nikde v $P(0, \frac{1}{4}\pi)$; první zlomek ve velkých závorkách vpravo konverguje k 1, druhý k 0. Z toho plyne, že se limita funkce (38) rovná 1, takže $A = e$.

Poznámka 4.3. Autor by čtenáře rád upozornil na *nebezpečný souběh okolností, který je častým zdrojem hrubých chyb*: Podle definice je sice $0^0 = 1$, ale

$$\textit{z podmínek } \lim f(x) = \lim g(x) = 0 \ \underline{\textit{neplyne}}, \textit{ že } \lim f(x)^{g(x)} = 1, \tag{39}$$

a to zejména proto, že

$$\lim f(x)^{g(x)} \ \underline{\textit{není obecně totéž co}} \ (\lim f(x))^{\lim g(x)}. \tag{40}$$

Příklad 4.7. Triviálním příkladem ilustrujícím (39) je konstantní funkce

$$x^{1/\lg x} = \exp(\lg x/\lg x) \equiv e \ \text{ v } \mathbb{R}_+, \tag{41}$$

která má v bodě 0 zprava limitu e, ačkoli $\lim_{x\to 0+} x = \lim_{x\to 0+}(1/\lg x) = 0$.

Příklad 4.8. Další varovný příklad: Je

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{e^x + x}\Big)^{-1/\lg x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1}{e^x + x}\Big)^{1/\lg x} = 0, \tag{42}$$

i když

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lg x} = 0. \tag{43}$$

První z rovností (42) dokážeme takto: Pro všechna $x > 1$ je

$$-\frac{1}{\lg x}\lg\Big(\frac{1}{e^x + x}\Big) = \frac{\lg(e^x(1 + xe^{-x}))}{\lg x} = \frac{x}{\lg x} + \frac{\lg(1 + xe^{-x})}{\lg x}. \tag{44}$$

Podle (26) je $xe^{-x} \to 0$ pro $x \to +\infty$, z čehož ihned plyne, že poslední zlomek má limitu 0. Podle (26) je také $\lim_{x\to+\infty}(\lg x)/x = 0$; protože funkce $(\lg x)/x$ je pro všechna $x > 1$ kladná, plyne z toho, že $\lim_{x\to+\infty} x/\lg x = +\infty$. Výraz (44) má tedy pro $x \to +\infty$ limitu $+\infty$ a podle (36) platí první z rovností (42); druhá z těchto rovností plyne ihned z první.

Cvičení

V následujících příkladech předpokládáme, že $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_1 \in \mathbb{N}, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}_+$, $A \in (1, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$. Některou z elementárních metod (tedy *bez užití l'Hospitalova pravidla a Taylorových polynomů* [4])) vypočtěte tyto limity:

4.01. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

4.02. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$

4.03. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

4.04. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{x+2}+x}$

4.05. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\,\right)$

4.06. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\,\right)$

4.07. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

4.08. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

4.09. $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

4.10. $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

4.11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

4.12. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$

4.13. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

4.14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x^4}}-\sqrt[3]{x^2}\right)$

4.15. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/6} \frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{2\sin x-1}$

4.16. $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi/2} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x+1}$

4.17. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\lg(x+1)-\lg x\right)$

4.18. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)$

4.19. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}$

4.20. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a}$

4.21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(e^x+x^3)}{\lg(e^{3x}+x^6)}$

4.22. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(e^x+x^3)}{\lg(e^{3x}+x^6)}$

4.23. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin 2x)-\exp x}{\operatorname{tg} x}$

4.24. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\operatorname{arctg}^2 x)-\exp x}{\sin x}$

4.25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+xe^x)\sin 2x^3}{\lg(\cos x^2)}$

4.26. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \lg\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

4.27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+xe^x)}{\lg\left(x+\sqrt{1+x}\,\right)}$

4.28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin\gamma x-\cos\gamma x}$

4.29. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{2-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}^3 x}$

4.30. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \lg(1+A^x)\lg\left(1+\frac{a}{x}\right)$

---

[4]) Příklady na aplikace těchto méně elementárních metod najde čtenář v kapitole 6.

4.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(2x+\sqrt{1-4x^2})}{\lg(x+\sqrt{1-x^2})}$

4.32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

4.33. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

4.34. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

4.35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{tg} x^2}$

4.36. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1-\operatorname{cotg} x}$

4.37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\cos ax)}{\lg(\cos bx)}$

4.38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}{\sin x \arcsin x}$

4.39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

4.40. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{2^x}-2^{x^2}}{2^x-x^2}$

4.41. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\lg(1+\sin^2 x)}{\lg(1+\operatorname{tg}^3 x)}$

4.42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\alpha x))}{\sin\gamma x}$

4.43. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg x-1}{\lg x+1}\right)^{\lg x}$

4.44. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg(\lg x)}{\lg x}\right)^{1/\lg(\lg x)}$

4.45. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(e^{x+1}-e^x\right)^{e^x}$

4.46. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{1}{2}\pi+\operatorname{arctg} x)^{1/x}$

4.47. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$

4.48. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

4.49. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

4.50. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}}\right)^{\alpha/x}$

4.51. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-x^{-a}\right)^{\sqrt{x}}$

4.52. $\lim\limits_{x\to +\pi\pm} \left(\dfrac{x}{\pi}\right)^{1/(\cos x+1)}$

4.53. $\lim\limits_{x\to \pi/2-} (\operatorname{tg} x)^{\sin x-1}$

4.54. $\lim\limits_{x\to 1-} \left(\frac{1}{2}\pi-\arcsin x\right)^{1/\lg(1-x)}$

4.55. $\lim\limits_{x\to 1-} x^{1/\arccos^2 x}$

4.56. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{1/\operatorname{arccotg} x}$

4.57. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})}$

4.58. $\lim\limits_{x\to 0} \left(5\exp\dfrac{x}{x+2}-4\right)^{x+2/x}$

4.59. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg(x^2+x+1)}{\lg(x^2+x-1)}\right)^x$

4.60. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg(x^2+x+1)}{\lg(x^2+x-1)}\right)^{x^2\lg x}$

4.61. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arctg}(1/x)}\right)^{1/\sin\pi x}$

4.62. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$

4.63. $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{tg} x^a)^{1/\lg x}$

4.64. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1+\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^{1/(2\sqrt{x})}$

4.65. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}$

4.66. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{arccotg} x)^{\alpha/\lg x}$

4.67. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx} - n}$

4.68. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cos 2x \cdots \cos nx - 1}{x^2}$

4.69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh x \cosh 2x \cdots \cosh nx - 1}$

4.70. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}\,\big(\sin(\lg(x+1)) - \sin(\lg x)\big)$

4.71. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}}\right)$

4.72. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha\big(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\big)$

4.73. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha\big(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-1}\big)$

4.74. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha\big(\sqrt[4]{(x+1)^3} - \sqrt[4]{(x-1)^3}\big)$

4.75. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\sqrt[n]{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)} - x\big)$

4.76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)^n - \big(\sqrt{x^2+1}-x\big)^n\Big)$

4.77. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n}\Big(\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)^n + \big(x-\sqrt{x^2+1}\big)^n\Big)$

4.78. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(\alpha + kx) - n\sin\alpha\Big)$

4.79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(\alpha + k^2x) - n\cos\alpha\Big)$

4.80. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\alpha_1 x)^{1/k_1}(1+\alpha_2 x)^{1/k_2}\cdots(1+\alpha_n x)^{1/k_n} - 1}{x}$

Řešení

4.01. $\frac{1}{2}$. **4.02.** $\frac{m}{n}$. **4.03.** $\frac{n}{m}$. **4.04.** $\frac{1}{2}$.

4.05. 1 pro $\alpha = \frac{1}{2}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$; 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$.

4.06. $\frac{2}{3}$ pro $\alpha = \frac{2}{3}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{2}{3}$; 0 pro $\alpha < \frac{2}{3}$.

4.07. $1/n$. **4.08.** $\frac{1}{2}(m-n)$. **4.09.** $112/27$. **4.10.** $-1/\sqrt{2a}$. **4.11.** $\frac{3}{2}$.

4.12. $+\infty$. **4.13.** $-\frac{1}{2}$. **4.14.** $\frac{1}{3}$. **4.15.** $-\frac{1}{2}$. **4.16.** -3. **4.17.** 1.

4.18. $\lg\frac{3}{2}$. **4.19.** $a^a(\lg a+1)$. **4.20.** $a^a(\lg a-1)$. **4.21.** $\frac{1}{3}$. **4.22.** $\frac{1}{3}$.

4.23. 1. **4.24.** -1. **4.25.** -4. **4.26.** $-\infty$. **4.27.** $\frac{2}{3}$. **4.28.** $1/\gamma$.

4.29. $\frac{3}{4}$. **4.30.** $a\lg A$. **4.31.** 2. **4.32.** $\frac{1}{4}$. **4.33.** 1. **4.34.** $\sqrt{2}$.

4.35. $-\frac{1}{12}$. **4.36.** 1. **4.37.** a^2/b^2. **4.38.** $-\frac{1}{8}$. **4.39.** $\sqrt{2}$. **4.40.** $16\lg 2$.

4.41. $-\infty$. **4.42.** $2\alpha/\gamma$. **4.43.** e^{-2}. **4.44.** e^{-1}. **4.45.** 1.

4.46. 1. **4.47.** $\sqrt[3]{abc}$. **4.48.** $e^{-(a+b)}$. **4.49.** e. **4.50.** $(ab)^{\alpha/2}$.

4.51. e^{-1} pro $a=\frac{1}{2}$; 0 pro $a\in(0,\frac{1}{2})$; 1 pro $a>\frac{1}{2}$.

4.52. $+\infty$ zprava, 0 zleva. **4.53.** 1. **4.54.** $e^{1/2}$. **4.55.** $e^{-1/2}$.

4.56. e^{-1}. **4.57.** 1. **4.58.** e^5. **4.59.** 1. **4.60.** e. **4.61.** 1. **4.62.** $e^{3/2}$.

4.63. e^a. **4.64.** $e^{1/2}$. **4.65.** e. **4.66.** $e^{-\alpha}$. **4.67.** $2/n(n+1)$.

4.68. $-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$. **4.69.** $12/n(n+1)(2n+1)$. **4.70.** 0. **4.71.** 0.

4.72. 1 pro $\alpha=0$; $+\infty$ pro $\alpha>0$; 0 pro $\alpha<0$.

4.73. $\frac{2}{3}$ pro $\alpha=\frac{4}{3}$; $+\infty$ pro $\alpha>\frac{4}{3}$; 0 pro $\alpha<\frac{4}{3}$.

4.74. $\frac{3}{2}$ pro $\alpha=\frac{1}{4}$; $+\infty$ pro $\alpha>\frac{1}{4}$; 0 pro $\alpha<\frac{1}{4}$.

4.75. $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)/n$. **4.76.** $2n$. **4.77.** 2^n. **4.78.** $\frac{1}{2}n(n+1)\cos\alpha$.

4.79. $-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sin\alpha$. **4.80.** $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j/k_j)$.

5. Derivace

Derivace (oboustranná, zprava, zleva) reálné funkce f reálné proměnné v bodě $a \in \mathbb{R}$ byla definována v kapitole 4 (viz řádky (9) a (9±)); tato derivace se podrobněji nazývá **derivace řádu** 1. Oboustranné derivace řádu n, kde $n > 1$ je přirozené číslo, se definují indukcí, v níž zbývá provést indukční krok:

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a má-li funkce f v každém bodě x jistého okolí $U(a)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n-1$, definujeme **derivaci** $f^{(n)}(a)$ **řádu** n **funkce** f **v bodě** a rovností

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)\,, \tag{1}$$

má-li pravá strana smysl. Dodejme, že **derivací řádu** 0 v bodě *a ležícím v definičním oboru funkce f* budeme rozumět číslo $f(a)$. Kromě názvu „derivace řádu n“ se běžně užívá i termín „derivace n-tého řádu“. *Jednostranné derivace* řádů $n > 1$ nebudeme nikde potřebovat, a proto je ani nebudeme definovat.

Říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a, existuje-li *konečná* derivace $f'(a)$; říkáme, že f je **diferencovatelná v množině** $M \subset \mathbb{R}$, je-li diferencovatelná v každém bodě této množiny. Přechod od f ke *konečné* derivaci f' se nazývá **diferencování** (funkce f).

Připomeňme, že *funkce diferencovatelná v bodě a je v tomto bodě spojitá*, že *obrácené tvrzení neplatí*, a zopakujme dobře známá základní pravidla derivování:

Věta 5.1 (o derivaci součtu a rozdílu). *Existují-li derivace $f'(a)$, $g'(a)$, je*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)\,, \quad \text{má-li pravá strana smysl.} \tag{2}$$

Analogická tvrzení platí pro derivace zprava a zleva.

Věta 5.2 (o diferencování součinu). *Jsou-li funkce f, g diferencovatelné v bodě a, platí totéž o součinu fg, přičemž*

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)\,. \tag{3}$$

Analogická tvrzení platí pro derivace zprava a zleva.

Věta 5.3 (o diferencování podílu). *Jsou-li funkce f, g diferencovatelné v bodě a a je-li $g(a) \neq 0$, je i podíl f/g diferencovatelný v bodě a, přičemž*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}\,. \tag{4}$$

Analogická tvrzení platí pro derivace zprava a zleva.

Věta 5.4 (o diferencování superpozice). *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě a a funkce g v bodě $f(a)$, je superpozice $g \circ f$ diferencovatelná v bodě a, přičemž*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a). \tag{5}$$

Poznámka 5.1. Všimněme si, že větu o derivaci součtu (rozdílu) lze *na rozdíl od vět* 5.2 – 5.4 užít i za některých situací, kdy jsou derivace *nekonečné.* [1]) Je proto zcela korektní napsat např.

$$(6) \qquad \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}\right)' = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{3}x^{-2/3}+\frac{1}{5}x^{-4/5} & \text{pro } x\neq 0 \\ +\infty+\infty=+\infty & \text{pro } x=0 \end{array} \right\}.$$

Větu 5.1 však *nelze užít* k výpočtu derivace rozdílu $h(x) := \sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}$ v bodě 0, protože bychom dostali výraz $+\infty-(+\infty)$, který nemá smysl. *To samozřejmě nevyvrací existenci této derivace*; vzhledem k tomu, že

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{x} = x^{-2/3}-x^{-4/5} = x^{-4/5}\big(x^{2/15}-1\big) \to -\infty \quad \text{pro} \quad x\to 0\,,$$

je $h'(0) = -\infty$.

Příklad 5.1. První derivací funkce $f(x) := \lg(1+x)$ v intervalu $(-1,+\infty)$ je funkce $1/(1+x)$. Předpokládáme-li platnost identity

$$(7) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{pro každé} \quad x\in(-1,+\infty)$$

a některé $n\in\mathbb{N}$, ihned vidíme, že

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n-1}\,(-n)\,\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

všude v $(-1,+\infty)$; tím je platnost (7) dokázána pro každé $n\in\mathbb{N}$.

Příklad 5.2. Jak snadno nahlédneme, platí všude v $\mathbb{R}$ a pro všechna celá čísla $n\geq 0$ identity

$$(8_1) \qquad \sin^{(4n)} = \sin,\ \ \sin^{(4n+1)} = \cos,\ \ \sin^{(4n+2)} = -\sin,\ \ \sin^{(4n+3)} = -\cos,$$

$$(8_2) \qquad \cos^{(4n)} = \cos,\ \ \cos^{(4n+1)} = -\sin,\ \ \cos^{(4n+2)} = -\cos,\ \ \cos^{(4n+3)} = \sin\,.$$

Příklad 5.3. Aplikujeme-li dvakrát větu o diferencování superpozice, dostaneme identitu

$$(\operatorname{arctg}(\exp(\operatorname{tg}x)))' = \frac{1}{\exp(2\operatorname{tg}x)+1}\cdot\exp(\operatorname{tg}x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

platnou všude v $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}(2k+1)\pi\,;k\in\mathbb{Z}\}$. V.5.4 lze užít, protože každá ze tří zúčastněných funkcí je diferencovatelná všude ve svém definičním oboru. □

[1]) Zdůraznili jsme to tím, že jsme věty 5.2 – 5.4 nazvali větami o *diferencování* součinu, podílu a superpozice.

Ve větě V.5.4 se mluví jen o „oboustranné“ diferencovatelnosti – jinou jsme ani nezavedli; *jednostranné a nekonečné derivace pomocí ní počítat nelze*. Často však lze užít následující jednoduché a velmi užitečné tvrzení, k němuž se uchylujeme zejména v případech, kdy se pro výpočet (oboustranné nebo jednostranné) derivace nehodí žádná ze zatím uvedených vět.

Věta 5.5. *Je-li $a \in \mathbb{R}$, je-li f spojitá v jistém $U(a)$ ($U^+(a)$, $U^-(a)$) a je-li limita $f'(a\pm)$ ($f'(a+)$, $f'(a-)$) rovna $A \in \mathbb{R}^*$, existuje i derivace $f'(a)$ ($f'_+(a)$, $f'_-(a)$) a rovná se A.*

Z právě uvedené věty ihned plyne, že např.

$$\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_- 1 = +\infty\,, \quad \arccos'_+(-1) = \arccos'_- 1 = -\infty\,. \tag{9}$$

Příklad 5.4. Pro každé $x \in \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle$ nechť je

$$f(x) := \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\lg \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{10}$$

Funkce $\arccos x$ a $\sqrt{1-x^2}$ jsou diferencovatelné v každém bodě $x \in (-1, 1)$, zlomek v logaritmu je kladný, je-li navíc $x \neq 0$, funkce lg je diferencovatelná v $\mathbb{R}_+$. Je-li tedy $0 < |x| < 1$, jsou splněny všechny předpoklady V.5.4 a je proto

$$\begin{aligned} f'(x) = &-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{x} - \arccos x \cdot \frac{1}{x^2} \\ &+ \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big). \end{aligned} \tag{11}$$

Při diferencování prvního zlomku v (10) jsme dali přednost větě V.5.2 před větou V.5.3; logaritmus zlomku na pravé straně jsme před diferencováním rozložili na rozdíl logaritmu čitatele a jmenovatele, což je možné, protože jak čitatel, tak i jmenovatel jsou kladné funkce. Protože výraz ve druhé řádce (11) je roven $1/\big(x\sqrt{1-x^2}\,\big)$, dokázali jsme zatím, že

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\arccos x\,, \ \text{ je-li } 0 < |x| < 1\,. \tag{12}$$

Oboustranné derivace funkce f v bodech ± 1 neexistují např. proto, že definiční obor funkce f neobsahuje žádné oboustranné okolí žádného z těchto bodů; zbývá však rozhodnout, zdali existují jednostranné derivace $f'_+(-1)$ a $f'_-(+1)$. Jak jsme již řekli, větu 5.4 nelze aplikovat. [2]) Mohli bychom se sice pokusit postupovat podle definice, ale daleko jednodušší je aplikovat V.5.5; to je možné, protože

[2]) Nejen proto, že oboustranné derivace nejsou k dispozici, ale že jednostranné derivace funkcí $\arccos x$ a $\sqrt{1-x^2}$ jsou v bodech ± 1 nekonečné. Z nemožnosti aplikovat větu 5.4 samozřejmě *neplyne*, že uvedené derivace neexistují.

1) funkce f je spojitá jak v $\langle -1,0)$, tak i v $(0,1\rangle$;

2) existují limity

$$\lim_{x\to -1+} f'(x) = -\pi, \qquad \lim_{x\to 1-} f'(x) = 0.$$

Z V.5.5 proto plyne, že $f'_+(-1) = -\pi$, $f'_-(1) = 0$. $\square$

Je-li funkce f dána nějakým „vzorcem", budeme ji vyšetřovat v maximálních intervalech, v nichž má „vzorec" smysl. Sjednocení všech těchto intervalů budeme považovat za definiční obor funkce f; označíme jej $\mathcal{D}(f)$. V dalším budeme řešit úlohy, které krátce nazveme **vyšetření spojitosti a derivace** dané funkce. Úloha se standardně bude skládat z těchto částí:

1) Nalezení definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce f.

2) Nalezení všech maximálních intervalů, v nichž je f spojitá. Nalezení všech bodů $x \in \mathcal{D}(f)$, v nichž f *není* spojitá (oboustranně, zprava, zleva). Nalezení oboustranných resp. jednostranných limit funkce f v bodech $x \in \mathcal{D}(f)$, v nichž f není spojitá a v nichž tyto limity existují.

3) Nalezení (oboustranné resp. jednostranné) derivace funkce f ve všech bodech, kde existuje.

Protože z existence konečné derivace $f'(x)$ ($f'_+(x)$, $f'_-(x)$) funkce f plyne její spojitost (zprava, zleva), není nutné o ní v takových bodech *explicite* mluvit; spojitost je však důležitá v bodech, v nichž konečná derivace neexistuje. Podobně není nutné mluvit o jednostranných derivacích v bodech, v nichž existuje derivace oboustranná. $\square$

Budeme říkat, že **funkce f je spojitá ve svém definičním oboru**, je-li spojitá v každém maximálním intervalu, z nichž se skládá její definiční obor.

Při vyšetřování spojitosti bychom se jen stěží obešli bez znalosti těchto tvrzení:

Věta 5.6. 1. *Jsou-li funkce f, g spojité (oboustranně, zprava, zleva) v bodě a, platí totéž o funkcích $|f|$, $f \pm g$, fg, a také o funkci f/g, pokud je $g(a) \neq 0$.*

2. *Jsou-li funkce f, g spojité v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, platí totéž o funkcích $|f|$, $f \pm g$, fg, a také o funkci f/g, pokud je $g \neq 0$ všude v I.*

Věta 5.7. 1. *Je-li funkce f spojitá v bodě a a funkce g v bodě $f(a)$, je superpozice $g \circ f$ spojitá v bodě a.*

2. *Je-li funkce f spojitá v intervalu I a funkce g v nějakém intervalu J obsahujícím $f(I)$, je superpozice $g \circ f$ spojitá v I.*

Poznámka 5.2. V některých případech lze při vyšetřování spojitosti a derivace využít specifických vlastností dané funkce, jako je *sudost*, *lichost* nebo *periodicita*. Přestože předpokládáme, že tyto tři pojmy jsou čtenáři dobře známy, připomeneme jejich přesné definice:

Splňuje-li množina $M \subset \mathbb{R}$ podmínku $x \in M \Rightarrow -x \in M$, říkáme, že funkce f definovaná v M je **sudá** (resp. **lichá**), platí-li pro každé $x \in M$ rovnost $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Je-li $p \in \mathbb{R}_+$ a splňuje-li množina $M \subset \mathbb{R}$ podmínku $x \in M \Rightarrow x \pm p \in M$, říkáme, že funkce f definovaná v M je p-**periodická** (nebo že má **periodu** p), platí-li pro každé $x \in M$ rovnost $f(x \pm p) = f(x)$.

Při počítání derivací nám část práce mohou ušetřit tato tři tvrzení:

Věta 5.8. *Sudá nebo lichá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je v bodě $a \in M$ spojitá zprava (zleva), právě když je spojitá v bodě $-a$ zleva (zprava).*

Důsledek. *Sudá nebo lichá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a \in M$, právě když je spojitá v bodě $-a$.*

Věta 5.9. *Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ sudá (lichá) funkce a je-li $a \in M$, je $f'_+(a) = -f'_-(-a)$ ($f'_+(a) = f'_-(-a)$), má-li jedna strana rovnosti smysl.*

Důsledek. *Je-li sudá (lichá) funkce $f : M \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v M, je f' funkce lichá (sudá).*

Věta 5.10. *Nechť $p \in \mathbb{R}_+$ a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je p-periodická funkce; pak platí tato dvě tvrzení:*

1. *Je-li f spojitá v bodě $a \in M$ zleva (zprava, oboustranně), platí totéž v každém bodě $a + np$, kde $n \in \mathbb{Z}$.*

2. *Pro každé $a \in M$ a každé $n \in \mathbb{Z}$ je $f'_+(a) = f'_+(a + np)$, $f'_-(a) = f'_-(a + np)$, $f'(a) = f'(a + np)$, má-li jedna strana příslušné rovnosti smysl.*

Příklad 5.5. Funkce

$$f(x) := \sqrt[3]{\sin x} \tag{13}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$, ale V.5.4 lze aplikovat jen v bodech $x \not\equiv 0 \bmod \pi$, protože $(\mathrm{Id}^{1/3})'(0) = +\infty$ a V.5.4 předpokládá diferencovatelnost. Protože

$$f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} \quad \text{pro všechna} \quad x \notin \{n\pi\,;\ n \in \mathbb{Z}\}, \tag{14}$$

protože $\lim_{x \to n\pi} \cos x = \cos n\pi = (-1)^n$ a protože $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ konverguje k 0 pro $x \to n\pi$ a je kladná všude kromě bodů $n\pi$, je podle V.5.5

$$f'(n\pi) = \lim_{x \to n\pi} f'(x) = \begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix} \quad \text{pro všechna } n \begin{Bmatrix} \text{sudá} \\ \text{lichá} \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

Příklad 5.6. Jednostranné derivace π-periodické funkce $f(x) := \sqrt[3]{|\sin x|}$ lze v bodě 0 počítat přímo z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} = +\infty, \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \Big(- \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} \Big) = -\infty;$$

podle V.5.10 je v důsledku toho $f'_+(n\pi) = +\infty$, $f'_-(n\pi) = -\infty$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$.

Příklad 5.7. Funkce

$$f(x) := \lg \big(|x| - \sqrt{x^2 - 1} \big) \tag{16}$$

je spojitá a sudá ve svém definičním oboru $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$; snadno zjistíme, že je

$$\left(\lg(x - \sqrt{x^2-1})\right)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{v} \quad (1, +\infty)$$

a že $f'_+(1) = f'(1+) = -\infty$. Podle V.5.9 je její derivace lichá, tedy rovná $1/\sqrt{x^2-1}$ v $(-\infty, -1)$, a navíc je $f'(-1-) = +\infty$.

Příklad 5.8. Funkce

$$f(x) := x(|\cos(\lg x)| - |\sin(\lg x)|) \tag{17}$$

je spojitá ve svém definičním oboru $\mathbb{R}_+$. Protože absolutní hodnota (identity) nemá derivaci v počátku, nelze V.5.4 aplikovat v žádném bodě $x \in \mathbb{R}_+$, v němž je buď $\cos(\lg x) = 0$, nebo $\sin(\lg x) = 0$, tedy v žádném bodě $a_n := \exp(n\pi/2)$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

Není-li $x \in \mathbb{R}_+$ rovno žádnému z čísel a_n, je

$$\begin{aligned} f'(x) &= |\cos(\lg x)| - |\sin(\lg x)| \\ -x&\Big(\operatorname{sgn}(\cos(\lg x)) \cdot \sin(\lg x) \cdot \frac{1}{x} + \operatorname{sgn}(\sin(\lg x)) \cdot \cos(\lg x) \cdot \frac{1}{x}\Big) \\ &= \operatorname{sgn}(\cos(\lg x))(\cos(\lg x) - \sin(\lg x)) \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\sin(\lg x))(\cos(\lg x) + \sin(\lg x)). \end{aligned} \tag{18}$$

Vzhledem k π-periodicitě funkcí $|\cos x|$, $|\sin x|$ platí identity

$$\begin{aligned} f(xe^{\pm\pi}) &= |\cos(\lg(xe^{\pm\pi}))| - |\sin(\lg(xe^{\pm\pi}))| \\ &= |\cos(\lg x \pm \pi)| - |\sin(\lg x \pm \pi)| = |\cos(\lg x)| - |\sin(\lg x)| = f(x) \end{aligned} \tag{19}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Z rovnosti $a_{n\pm2} = a_n e^{\pm\pi}$ (kde $n \in \mathbb{Z}$) snadno plyne platnost identity

$$f'(a_{n\pm2}-) = f'(a_n-) \quad \text{resp.} \quad f'(a_{n\pm2}+) = f'(a_n+) \tag{20}$$

za předpokladu, že jedna její strana má smysl. Podle V.5.5 jsou tato čísla rovna $f'_-(a_n)$ resp. $f'_+(a_n)$. Zřejmě proto stačí vypočítat limity $f'(a_0-)$, $f'(a_0+)$, $f'(a_1-)$, $f'(a_1+)$, pokud ovšem existují; je-li tomu tak, jsou po řadě rovny $f'_-(a_0)$, $f'_+(a_0)$, $f'_-(a_1)$, $f'_+(a_1)$ a obecněji také rovny $f'_-(a_{2n})$, $f'_+(a_{2n})$, $f'_-(a_{2n+1})$, $f'_+(a_{2n+1})$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Tím bude naše úloha úplně vyřešena.

Protože je $\operatorname{sgn}(\cos(\lg x)) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sin(\lg x)) = -1$ v (a_{-1}, a_0), je v tomto intervalu $f'(x) = 2\cos(\lg x)$ (podle (14)), a v důsledku toho $f'(a_0-) = 2\cos(\lg 1) = 2$. Podobně zjistíme, že $f'(x) = -2\sin(\lg x)$ v (a_0, a_1), takže $f'(a_0+) = 0$, $f'(a_1-) = -2$, a že $f'(x) = -2\cos(\lg x)$ v (a_1, a_2), takže $f'(a_1+) = 0$.

Tím je dokázáno, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí rovnosti

$$f'_-(a_{2n}) = 2, \quad f'_+(a_{2n}) = 0, \quad f'_-(a_{2n+1}) = -2, \quad f'_+(a_{2n+1}) = 0. \tag{21}$$

Pro výpočet derivací vyšších řádů součinu dvou funkcí lze velmi často užít toto tvrzení (připomínající binomickou větu):

Věta 5.11. (Leibnizův vzorec.) *Existují-li konečné n-té derivace $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ funkcí f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$, je v tomto bodě*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{22}$$

Příklad 5.9. Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnosti

$$\begin{aligned} \left(x^\lambda e^{\mu x}\right)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^\lambda\right)^{(k)} \left(e^{\mu x}\right)^{(n-k)} \\ &= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1) x^{\lambda-k} \mu^{n-k} \\ &= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k} \binom{\lambda}{k} x^{\lambda-k} \mu^{n-k}. \end{aligned} \tag{23}$$

Připomeňme k tomu, že tzv. **binomické koeficienty** jsou pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ definovány vzorcem

$$\binom{\lambda}{k} := \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-k+1)}{k!} & \text{pro } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{pro } k = 0 \end{array} \right\}; \tag{24}$$

všimněme si přitom, že pro každé celé číslo $\lambda \geq 0$ a pro každé $k > \lambda$ je binomický koeficient (24) rovný 0.

Příklad 5.10. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} (x^3 \sin x)^{(9)} &= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x^3)^{(k)} (\sin x)^{(9-k)} = \sum_{k=0}^{3} \binom{9}{k} (x^3)^{(k)} (\sin x)^{(9-k)} \\ &= x^3 \cos x + 9 \cdot 3x^2 \cdot \sin x - 36 \cdot 6x \cdot \cos x - 84 \cdot 6 \cdot \sin x \\ &= x(x^2 - 216)\cos x + 9(3x^2 - 56)\sin x. \end{aligned}$$

Příklad 5.11. Indukcí se snadno dokáže, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\lg^{(n)} x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{25}$$

Z toho ihned plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je např.

$$\begin{aligned} \left(x^2 \lg x\right)^{(7)} &= \binom{7}{0} x^2 (\lg x)^{(7)} + \binom{7}{1} \left(x^2\right)' (\lg x)^{(6)} + \binom{7}{2} \left(x^2\right)'' (\lg x)^{(5)} \\ &= 1 \cdot x^2 \cdot (-1)^6 \frac{6!}{x^7} + 7 \cdot 2x \cdot (-1)^5 \frac{5!}{x^6} + 21 \cdot 2 \cdot (-1)^4 \frac{4!}{x^5} = \frac{48}{x^5}. \end{aligned}$$

Cvičení

Za předpokladu, že $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, vyšetřete spojitost a derivaci těchto funkcí: [3])

5.01. $\lg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

5.02. $\lg\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

5.03. $\sqrt{x + \sqrt{x}}$

5.04. $\sqrt{x - \sqrt{x}}$

5.05. $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

5.06. $x + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

5.07. $\sqrt[3]{x^2+2x-3}$

5.08. $\lg^2 x + \lg(\lg x)$

5.09. $\operatorname{cotg}(\arcsin x)$

5.10. $|\sin^3 x|$

5.11. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$

5.12. $\sqrt{|x^2-x-2|}$

5.13. $\sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|}$

5.14. $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}$

5.15. $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

5.16. $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{2-x^2}}$

5.17. $\arccos\dfrac{1}{x}$

5.18. $\operatorname{arccotg}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

5.19. $\operatorname{argcosh}(\lg x)$

5.20. $\arcsin(\lg^3 x)$

5.21. $\arccos(\lg(2-x))$

5.22. $|\arcsin x|$

5.23. $\arcsin|x^2-1|$

5.24. $\lg(\arcsin(x^2-1))$

5.25. $\lg\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

5.26. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$

5.27. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{|x^2-2|}$

5.28. $\lg(1+|\sin x|)$

5.29. $\arcsin(\sin x)$

5.30. $\sqrt{\operatorname{arctg}(e^x-1)}$

5.31. $\sqrt[3]{\cos(x^2-1)}$

5.32. $\sqrt[3]{(\lg|x|-1)^2}$

5.33. $\arccos((1-\cos x)^2)$

5.34. x^x

5.35. $x^{1/x}$

5.36. $x^{\lg x}$

[3]) U několika příkladů může být výpočet jednostranných derivací v krajních bodech příslušných intervalů dost obtížný, smíme-li užít jen dosud vyslovené věty. Čtenář, kterému jde jen o zvládnutí základních postupů, může proto tuto část úkolu vynechat; čtenář, kterému by vadilo, že příklad nedovede rozřešit v plném rozsahu, může zkusit vrátit se k řešení, až se seznámí s obsahem kapitoly 6, v níž jsou vyloženy méně elementární metody výpočtu limit.

5.37. $(\lg x)^x$

5.38. x^{x^x}

5.39. $(\lg x)^{\lg x}$

5.40. $(\operatorname{arctg} x)^{\arccos x}$

5.41. $(\sin x)^{\cos x}$

5.42. $(e^x - 1)^{\arcsin x}$

5.43. $\left(\lg \dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\lg x}$

5.44. $\lg \sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

5.45. $\operatorname{argcosh}\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

5.46. $\sqrt{\sqrt{2} - \sin x - \cos x}$

5.47. $\lg(\lg(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}))$

5.48. $\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} - \dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2-1}}$

5.49. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \lg \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

5.50. $\lg\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)$

5.51. $\operatorname{arctg} e^x - \lg \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

5.52. $\operatorname{argsinh}(|\lg|x^2-3||)$

5.53. $\sqrt{a^2-x^2} - a \arccos \dfrac{x}{a}$

5.54. $\lg \dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$

5.55. $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5.56. $\sqrt{x^2-1} - x^2 \arccos \dfrac{1}{x}$

5.57. $\lg(1+\sin^2 x) - 2\sin x \operatorname{arctg}(\sin x)$

5.58. $2x \operatorname{arctg} x - \lg(x^2+1) - \operatorname{arctg}^2 x$

5.59. $x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$

5.60. $\dfrac{x \lg x}{\sqrt{1+x^2}} - \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

5.61. $\sqrt{3} \operatorname{arctg} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} - \lg \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

5.62. $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} + (\beta-\alpha) \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$

V bodech x uvedených v závorkách vypočítejte n-té derivace těchto funkcí:

5.63. $x^n e^{\alpha x}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

5.64. $e^x \sin x \quad (x = 0)$

5.65. $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad (x \in (-\infty, \frac{1}{2}))$

5.66. $\sin x \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$

5.67. $\lg \dfrac{1+x}{1-x} \quad (x = 0)$

5.68. $\dfrac{1}{x(x+1)} \quad (-1 \neq x \neq 0)$

5.69. Nechť

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{lll} \exp(-1/x^2) & \text{pro} & x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} & x = 0 \end{array} \right\}. \tag{26}$$

Dokažte indukcí, že existují polynomy $a_n(x)$ tak, že rovnost

$$f^{(n)}(x) = a_n\Big(\frac{1}{x}\Big) \exp\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \tag{27}$$

platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $x \neq 0$; pak dokažte, že $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. (Rada. Substitucí $x = \pm 1/\sqrt{t}$ převeďte limitu pro $x \to 0\pm$ pravé strany (27) na $\lim_{t \to +\infty} a_n(\pm\sqrt{t}\,) \exp(-t)$; podle (26) z kapitoly 4 je tato limita rovna nule. Dodefinujeme-li tedy funkci (27) v bodě 0 nulou, bude spojitá v celém $\mathbb{R}$ a stačí aplikovat V.5.5.)

5.70. Zjistěte, pro která $n \in \mathbb{N}$ má funkce

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{lll} x^n \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro} & x \neq 0 \\ 0 & \text{pro} & x = 0 \end{array} \right\} \tag{28}$$

v bodě 0 derivaci prvního resp. druhého řádu a pro která $n \in \mathbb{N}$ je první resp. druhá derivace v bodě 0 spojitá.

Řešení

Funkce z příkladů 5.01 – 5.70 značíme v tomto seznamu řešení f. *Všechny jsou spojité ve svém definičním oboru*; tuto informaci u jednotlivých příkladů již neuvádíme. [4])

5.01. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ v $\mathbb{R}$

5.02. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ v $(1, +\infty)$; $f'_+(1) = -\infty$

5.03. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = +\infty$

5.04. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}-1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ v $(1, +\infty)$; $f'_+(1) = +\infty$

5.05. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = +\infty$

[4]) V kapitole 7 budeme vyšetřovat i funkce, které v některých bodech spojité nejsou.

5.06. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty); \ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ v $\mathbb{R}_+; \ f'_+(0) = -\infty$

5.07. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}; \ f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+2x-3)^2}}$, je-li $-3 \neq x \neq 1$;

$f'(-3) = -\infty, \ f'(1) = +\infty$

5.08. $\mathcal{D}(f) = (1, +\infty); \ f'(x) = \dfrac{2\lg^2 x + 1}{x \lg x}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.09. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle; \ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, je-li $0 < |x| < 1$;

$f'_+(-1) = f'_-(1) = -\infty$

5.10. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}; \ f'(x) = 3\,\mathrm{sgn}\,(\sin x)\sin^2 x \cos x$ v $\mathbb{R}$.

P o z o r ! V.5.4 *nelze aplikovat*, je-li $x \equiv 0 \mod \pi$, ale uvedený výsledek je podle V.5.5 správný i v těchto bodech.

5.11. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2n+1)\pi; \, n \in \mathbb{Z}\}; \ f'(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.12. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}; \ f'(x) = \dfrac{\mathrm{sgn}\,(x^2-x-2)}{2\sqrt{|x^2-x-2|}}(2x-1)$, je-li $-1 \neq x \neq 2$;

$f'_-(-1) = f'_-(2) = -\infty, \ f'_+(-1) = f'_+(2) = +\infty$

5.13. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty); \ f'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{sgn}\,((x-1)/(x+2))}{\sqrt{|(x-1)(x+2)^3|}}$,

je-li $-2 \neq x \neq 1$; $f'_-(1) = -\infty, \ f'_+(1) = +\infty$

5.14. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty); \ f'(x) = -\dfrac{5}{3\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)^4}}$,

je-li $-2 \neq x \neq 3$; $f'(-2) = -\infty$

5.15. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty); \ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, je-li $x \neq 1$

5.16. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty); \ f'(x) =$

$= \dfrac{x(2+6x-x^3)}{3\sqrt[3]{(1+x^3)^2(2-x^2)^4}}$, je-li $\pm\sqrt{2} \neq x \neq -1$; $f'(-1) = +\infty$

5.17. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty); \ f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, je-li $|x| > 1$;

$f'_-(-1) = f'_+(1) = +\infty$

5.18. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{(n+\frac{1}{4})\pi\,;\ n \in \mathbb{Z}\}\,;\ f'(x) \equiv 1$ v $\mathcal{D}(f)$

5.19. $\mathcal{D}(f) = \langle e, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\lg^2 x - 1}}$ v $(e, +\infty)\,;\ f'_+(e) = +\infty$

5.20. $\mathcal{D}(f) = \langle 1/e, e\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{3\lg^2 x}{x\sqrt{1-\lg^6 x}}$ v $(1/e, e)\,;$

$f'_+(1/e) = f'_-(e) = +\infty$

5.21. $\mathcal{D}(f) = \langle 2-e, 2-1/e\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-\lg^2(2-x)}}\,,$

je-li $2-e < x < 2-1/e\,;\ f'_+(2-e) = f'_-(2-1/e) = +\infty$

5.22. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$ je-li $0 < |x| < 1\,;$

$f'_+(-1) = -\infty,\ f'_\pm(0) = \pm 1,\ f'_-(1) = +\infty$

5.23. $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{2\operatorname{sgn}(x(x^2-1))}{\sqrt{2-x^2}}\,,$ je-li $|x| < \sqrt{2}$ a

$0 \neq x \neq \pm 1\,;\ f'_\pm(\mp\sqrt{2}) = \mp\infty,\ f'_\pm(-1) = f'_\pm(1) = \pm 2,\ f'_\pm(0) = \mp\sqrt{2}$

5.24. $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}\,\rangle\,;\ f'(x) = \dfrac{2\operatorname{sgn} x}{\arcsin(x^2-1)\sqrt{2-x^2}}\,,$

je-li $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})\,;\ f'_+(-\sqrt{2}) = -\infty,\ f'_-(\sqrt{2}) = +\infty$

5.25. $\mathcal{D}(f) = (1, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{1}{2x\arccos(1/\sqrt{x})\sqrt{x-1}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.26. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+\,;\ f'(x) = f(x)\cdot\left(\lg\dfrac{a}{b} + \dfrac{b-a}{x}\right)$ v $\mathcal{D}(f)$

5.27. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}\,;\ f'(x) = \dfrac{2x\operatorname{sgn}(2-x^2)}{x^4-4x^2+5}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.28. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{1+|\sin x|}\,,$ je-li $x \not\equiv 0 \mod \pi\,;$

$f'_\pm(n\pi) = \pm 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$

5.29. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\,;\ f'(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)\,,$ je-li $x \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi\,;$

$f'_\pm\big(\frac{1}{2}(4n-1)\pi\big) = f'_\mp\big(\frac{1}{2}(4n+1)\pi\big) = \pm 1$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$

5.30. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)\,;\ f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{\operatorname{arctg}(e^x-1)}\,(e^{2x}-2e^x+2)}\,,$

je-li $x \in \mathbb{R}_+\,;\ f'_+(0) = +\infty$

5.31. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{x\sin(1-x^2)}{\sqrt[3]{\cos^2(x^2-1)}}$, je-li $x \notin \{\pm a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$,

kde $a_n := \sqrt{1 + \frac{1}{2}(2n-1)\pi}$; $f'(\pm a_{2n-1}) = \mp\infty$, $f'(\pm a_{2n}) = \pm\infty$

5.32. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; $f'(x) = \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{\lg|x| - 1}}$, je-li $0 \neq x \neq \pm e$;

$f'_\pm(-e) = f'_\pm(e) = \pm\infty$

5.33. $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle \frac{1}{2}(4n-1)\pi, \frac{1}{2}(4n+1)\pi\rangle$; $f'(x) = \dfrac{2(\cos x - 1)\sin x}{\sqrt{1-(\cos x-1)^4}}$,

je-li $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{2}(4n-1)\pi, \frac{1}{2}(4n+1)\pi)$; $f'_+(\frac{1}{2}(4n-1)\pi) = +\infty$,

$f'_-(\frac{1}{2}(4n+1)\pi) = -\infty$

5.34. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = x^x(\lg x + 1)$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = -\infty$

5.35. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = x^{1/x-2}(1-\lg x)$ v $\mathcal{D}(f)$

5.36. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = 2x^{\lg x - 1}\lg x$ v $\mathcal{D}(f)$

5.37. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = (\lg x)^{x-1}\big(\lg x\,\lg(\lg x) + 1\big)$ v $(1, +\infty)$;

$f'_+(1) = 1$

5.38. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty)$; $f'(x) = x^{x^x} x^x \Big(\lg x(\lg x + 1) + \dfrac{1}{x}\Big)$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0) = 1$

5.39. $\mathcal{D}(f) = \langle 1, +\infty)$; $f'(x) = (\lg x)^{\lg x} \cdot \dfrac{\lg(\lg x) + 1}{x}$; $f'_+(1) = -\infty$

5.40. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle$; $f'(x) = f(x)\Big(\dfrac{\arccos x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} - \dfrac{\lg(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$,

je-li $x \in (0,1)$; $f'_+(0) = 0$, $f'_-(1) = +\infty$

5.41. $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle 2n\pi, (2n+1)\pi)$; $f'(x) = f(x)\,\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x\,\lg(\sin x)}{\sin x}$

v $\mathcal{D}(f) - \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; $f'_+(2n\pi) = 1$

5.42. $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 1\rangle$; $f'(x) = f(x)\Big(\dfrac{\lg(e^x - 1)}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{e^x}{e^x - 1}\arcsin x\Big)$ v $(0,1)$;

$f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$

5.43. $\mathcal{D}(f) = (0,1)$; $f'(x) = \Big(\lg\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^{\lg x - 1}\dfrac{2\lg x}{1-x^2} + \dfrac{f(x)}{x}\lg\Big(\lg\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$

v $\mathcal{D}(f)$

5.44. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}(2n+1)\pi\,;\,n\in\mathbb{Z}\}$; $f'(x)=-\dfrac{1}{\cos x}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.45. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sinh(\frac{1}{2}x)}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.46. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{2\sqrt{\sqrt{2}-\sin x-\cos x}}$, je-li $x\not\equiv\frac{1}{4}\pi \mod 2\pi$;

$f'_{\pm}\big(2n+\frac{1}{4})\big)=\pm 1/\sqrt[4]{2}\doteq 0.84$ pro všechna $n\in\mathbb{Z}$

5.47. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}\cdot\lg\big(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\,\big)}$ v $\mathbb{R}$

5.48. $\mathcal{D}(f)=(1,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{x\lg x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.49. $\mathcal{D}(f)=(-1,1)$; $f'(x)=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.50. $\mathcal{D}(f)=\langle 0,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ v $\mathbb{R}_+$; $f'_+(0)=+\infty$

5.51. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.52. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$; $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}\cdot\dfrac{\operatorname{sgn}(\lg|x^2-3|))}{\sqrt{1+\lg^2|x^2-3|}}$,
je-li $x\in\mathcal{D}(f)-\{\pm\sqrt{2},\ \pm 2\}$;

$f'_{\pm}(-2)=f'_{\pm}(2)=\pm 4$, $f'_{\pm}(-\sqrt{2})=f'_{\pm}(\sqrt{2})=\pm 2\sqrt{2}$

5.53. $\mathcal{D}(f)=\langle -a,a\rangle$; $f'(x)=\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ v $(-a,a)$;

$f'_+(-a)=+\infty$, $f'_-(a)=0$

5.54. $\mathcal{D}(f)=(-a,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{2a^2}{(a+x)(a^2+x^2)}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.55. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.56. $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$; $f'(x)=\dfrac{x-|x|}{\sqrt{x^2-1}}-2x\arccos\dfrac{1}{x}$,

je-li $|x|>1$; $f'_-(-1)=-\infty$, $f'_+(1)=0$

5.57. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f'(x)=-2\operatorname{arctg}(\sin x)\cos x$ v $\mathbb{R}$

5.58. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f'(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}\operatorname{arctg}x$ v $\mathbb{R}$

5.59. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle$; $f'(x) = \arcsin^2 x$ v $(-1, 1)$; $f'_+(-1) = f'_-(1) = \frac{1}{4}\pi^2$

5.60. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_+$; $f'(x) = \dfrac{\lg x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.61. $\mathcal{D}(f) = (-1, +\infty)$; $f'(x) = \dfrac{3x}{x^3+1}$ v $\mathcal{D}(f)$

5.62. $\mathcal{D}(f) = \langle \alpha, \beta)$; $f'(x) = \sqrt{\dfrac{\beta - x}{x - \alpha}}$ v (α, β); $f'_+(\alpha) = +\infty$

5.63. $e^{\alpha x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \alpha^k x^k$

5.64. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$, kde $N = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(n-1) & \text{pro každé liché } n \\ \frac{1}{2}n - 1 & \text{pro každé sudé } n \end{array} \right\}$

5.65. $\dfrac{(2n-1)!!}{\sqrt{(1-2x)^{2n+1}}}$

5.66. $2^{n-1} g(x)$, kde $g(x)$ je rovno $\sin 2x$, $\cos 2x$, $-\sin 2x$, $-\cos 2x$ podle toho, zdali je n, $n-1$, $n-2$, $n-3$ dělitelné číslem 4

5.67. $f^{(n)}(0) = \left\{ \begin{array}{ll} 2\,(n-1)! & \text{pro každé liché } n \\ 0 & \text{pro každé sudé } n \end{array} \right\}$

5.68. $(-1)^n n! \left(\dfrac{1}{x^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$

5.70. $n \geq 2 \Leftrightarrow f'(0)$ existuje; $n \geq 3 \Leftrightarrow f'$ je spojitá v bodě 0;
$n \geq 4 \Leftrightarrow f''(0)$ existuje; $n \geq 5 \Leftrightarrow f''$ je spojitá v bodě 0

6. Limity funkcí – 2. část

Limita podílu dvou funkcí je rovna podílu limit těchto funkcí jen tehdy, když má podíl limit smysl. V některých případech, kdy podíl limit smysl nemá, lze limitu podílu najít např. pomocí tohoto tvrzení:

Věta 6.1. (l'Hospitalovo pravidlo.) *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť jsou splněny tyto podmínky: Funkce f, g jsou diferencovatelné v jistém $P(a)$ a*

$$\text{buď} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,, \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty\,. \tag{1}$$

Pak je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,, \quad \text{existuje-li limita vpravo.} \tag{2}$$

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava v bodech $a < +\infty$ a zleva v bodech $a > -\infty$.

Příklad 6.1. Ilustrujme užití l'Hospitalova pravidla několika typickými příklady:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \tag{3'}$$

$$\lim_{x\to0+} x \lg x = \lim_{x\to0+} \frac{\lg x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0+} x = 0\,; \tag{3''}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arccotg} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{1}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = 1\,; \tag{5}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \cos x = 1\,; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to\pi/2} (\tfrac{1}{2}\pi - x) \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = 1\,. \tag{7}$$

Příklad 6.2. Větu 6.1 lze aplikovat na podíl f/g i několikrát: Splňují-li například nejen funkce f, g, ale i jejich derivace f', g', f'', g'' předpoklady V.6.1, je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)}\,, \quad \text{existuje-li poslední limita.}$$

Například tedy je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}\,. \tag{8}$$

Jak je patrné, při praktické aplikaci l'Hospitalova pravidla píšeme rovnosti v jistém smyslu „na dluh". Zpočátku totiž nemusíme vědět, zdali platí první tři rovnosti v (8), protože na příslušné zlomky nelze aplikovat větu o limitě podílu. První čitatel $f(x) := \sin x - x$ i příslušný jmenovatel $g(x) := x^3$ však má limitu 0 a totéž platí o $f'(x)$, $g'(x)$, $f''(x)$, $g''(x)$. Platnost prvních tří rovností v (8) však (za této situace) plyne z existence limity podílu $f'''(x)/g'''(x) = -\frac{1}{6}\cos x$. [1])

Příklad 6.3. Je-li $\alpha \le 0$, je (podle věty o limitě podílu) $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha/e^x = 0$, protože čitatel $f(x) := x^\alpha$ má buď limitu 0, nebo 1, jmenovatel $g(x) := e^x$ limitu $+\infty$. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, diverguje čitatel i jmenovatel do $+\infty$; je-li n nejmenší přirozené číslo větší nebo rovné α, lze n-krát aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, protože funkce $g(x) = g'(x) = \ldots = g^{(n-1)}(x) = e^x$ má v $+\infty$ limitu $+\infty$. Dostaneme tak rovnosti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\, x^{\alpha-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}}{e^x} = \cdots \tag{9}$$
$$\cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}}{e^x} = 0;$$

poslední z nich plyne z věty o limitě podílu, protože $x^{\alpha-n}$ má buď limitu 0, nebo 1.

Poznámka 6.1. l'Hospitalovým pravidlem lze počítat nejen některé limity podílů, ale i např. rozdílů nebo součinů; před aplikací pravidla je ovšem třeba rozdíl resp. součin upravit na vhodný podíl (sr. s (3″), (4), (5), (7)). To je možné vždy, ale úprava není dána jednoznačně; označíme-li $F := 1/f$, $G := 1/g$, je například

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{G(x)} = \frac{G(x) - F(x)}{F(x)\,G(x)}\,, \tag{10′}$$

$$fg = \frac{f}{G} = \frac{g}{F}\,. \tag{10″}$$

Daný výraz se vždy snažíme upravit na zlomek, jehož čitatel i jmenovatel má co nejjednodušší derivaci. V příkladu (3″) by např. nevedlo k cíli, kdybychom – na rozdíl od uvedené úpravy – ponechali x v čitateli a do jmenovatele dali $1/\lg x$; podíl derivací by totiž v tom případě byl roven $-x\lg^2 x$, což je složitější než součin, z něhož jsme vyšli. Hlavním cílem v příkladech (3″) a (5) bylo odstranit derivováním transcendentní funkci $\lg x$ resp. $\operatorname{arccotg} x$, jejíž přítomnost způsobuje, že numerickou hodnotu příslušné limity nevidíme na první pohled. □

V Př. 6.1 jsme vypočítali limitu několika součinů; uveďme ještě příklad na limitu rozdílu:

---

[1]) Kdyby v podobné situaci limita podílu třetích derivací neexistovala, nezbylo by než konstatovat, že *l'Hospitalovo pravidlo nevede k cíli*; z toho by samozřejmě vůbec neplynulo, že výchozí limita neexistuje – sr. s Př. 6.7.

Příklad 6.4. Je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{cotg} x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} \tag{11}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=0\,.$$

Poznámka 6.2. Pomocí l'Hospitalova pravidla lze počítat i limity některých funkcí tvaru $f(x)^{g(x)} = \exp(h(x))$, kde $h(x) := g(x)\lg f(x)$. Najdeme-li limitu funkce $h(x)$, stačí uvážit, že (podle V.4.1)

$$\lim_{x\to a} h(x) = A \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{pro } A=-\infty \\ \exp A & \text{pro } A\in\mathbb{R} \\ +\infty & \text{pro } A=+\infty \end{array}\right\}. \tag{12}$$

Existují-li obě limity $\lim g(x)$, $\lim \lg f(x)$, nemá jejich součin smysl, právě když je jedna z nich rovna 0 a druhá je nekonečná; to odpovídá těmto situacím:

1) $\lim g(x) = 0$ a $\lim f(x)$ je rovna buď 0, nebo $+\infty$;

2) $\lim g(x) = \pm\infty$ a $\lim f(x) = 1$.

Doufáme, že ani čtenář, který má (např. v důsledku chybného výkladu ve škole) tendenci nahrazovat limitní přechod dosazením, nebude umocňovat čísla $\pm\infty$ na nultou a číslo 1 na $\pm\infty$ – „mocniny“ $(\pm\infty)^0$, $1^{\pm\infty}$ by měly být každému podezřelé. Připomeňme, že *tyto symboly nejsou definovány a nemělo by smysl definovat je, protože by se tím nic nezískalo.*

Skutečně velmi nebezpečná však může být pro nezkušeného studenta situace, kdy $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$*, protože výraz* 0^0 *je definován jako* 1*, zatímco* $\lim f(x)^{g(x)}$ *může být nejen rovna kterémukoli nezápornému číslu, ale nemusí vůbec existovat!*

Dokládá to nejen následující příklad, ale také Př. 6.16 a cvičení 6.77 – 6.84.

Příklad 6.5. Je-li $\alpha\in\mathbb{R}$, $f(x) := x$, $g(x) := \alpha/\lg x$ všude v $(0,1)$, je $f(0+)= g(0+) = 0$. Protože

$$x^{\alpha/\lg x} = \exp\left(\frac{\alpha\lg x}{\lg x}\right) \equiv e^{\alpha}$$

všude v $(0,1)$, je i $\lim_{x\to 0+} f(x)^{g(x)} = e^{\alpha}$, což může být jakékoli číslo z $\mathbb{R}_+$.

Je-li $f(x) := \exp(-x^2)$, $g_1(x) := 1/x$, $g_2(x) := -1/x$, mají tyto funkce v $+\infty$ limitu 0 a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g_1(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\,,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)^{g_2(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty\,.$$

Je-li $g_3(x) := (\cos x)/x$, je $g_3(+\infty-) = 0$, funkce $F(x) := f(x)^{g_3(x)} = e^{-x\cos x}$ však v $+\infty$ limitu *nemá* – např. proto, že pro $n\to\infty$ je $F(2n\pi) = \exp(-2n\pi)\to 0$ a $F((2n+1)\pi) = \exp((2n+1)\pi)\to+\infty$.

Poznámka 6.3. Je zajímavé (ale bohužel smutné), jak dlouho se na různých školách (včetně vysokých) a v nejrůznějších učebnicích a sbírkách vzorců udržuje historický termín *neurčitý výraz*. Uvádí se jich několik:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Komentujme podrobněji např. „neurčitý výraz $0/0$“, který zřejmě souvisí s limitou podílu $f(x)/g(x)$ v případě, že limita čitatele i jmenovatele je rovna nule.

Přístup k podobným otázkám se nejen v dobách, kdy žili slavní matematikové Guillaume François Antoine de l'Hospital, sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm von Leibniz, ale ještě mnohem později, zásadně lišil od nynějšího způsobu uvažování. Když se začaly počítat limity, počítaly se nutně i limity zlomků; pokud limita A čitatele byla konečná a limita B jmenovatele konečná nenulová, byla (a je) limita podílu rovna A/B. V některých případech, kdy limita čitatele byla nenulová, limita jmenovatele nulová, se též našlo jakési „řešení“ – napíšeme $A/0$ a řekneme, že je to nekonečno; se znaménkem si nebudeme příliš lámat hlavu, stejně někdy vychází zprava jiné než zleva. [2]) V případě, že i čitatel má limitu 0, budeme postupovat analogicky: napíšeme $0/0$ jako „výsledek“ a *teprve pak* začneme uvažovat, co tento záhadný symbol znamená.

Z hlediska dnešní logiky je podobný postup *naprosto nepřijatelný*. Je zřejmé, že se jedná o snahu nahradit počítání limity dosazením, což – jak čtenář již dobře ví – není obecně možné. Tím, že napíšeme $0/0$ a řekneme, že jde o neurčitý výraz, nejen že *nic neřešíme, ale zatemňujeme podstatu problému*:

Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, *nelze o* $\lim (f(x)/g(x))$ *obecně nic říci, protože limita podílu může být* (*podle situace*) *rovna jakémukoli číslu z* $\mathbb{R}^*$ *a nemusí dokonce ani existovat.*

Tuto „smutnou skutečnost“ ilustrují triviální příklady – např. podíl $\sin(\alpha x)/x$ má v bodě 0 limitu α, což může být jakékoli číslo z $\mathbb{R}$. Podíl $0/0$ *nezavádíme* (*nedefinujeme*) proto, že bychom tím zřejmě nic nezískali – ať se budeme jakkoli snažit, *nikdy nebude platit obecná věta, že limita podílu je rovna podílu limit*. V souvislosti s tím naopak říkáme, že podíl $0/0$ *nemá smysl*. *Tento „výraz“ není tedy z logického hlediska neurčitý, ale <u>nesmyslný</u>*.

Podobně je tomu s ostatními „neurčitými výrazy“ [3]), které jsme uvedli, *s výjimkou mocniny* 0^0, jejíž zařazení mezi tyto výrazy je skutečně již na pováženou, protože (jak jsme ukázali v Po. 6.2 a v Př. 6.5) může méně zkušeného studenta dovést ke zcela falešným závěrům.

---

[2]) I dnes najdeme v některých sbírkách vzorců z *reálné* analýzy rovnost $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$; některé počítačové programy v podobných případech dávají „výsledek“ ve tvaru $1/0$.

[3]) Po anglickém středověkém filozofu-scholastikovi Williamovi of Occam se *Occamovou břitvou* nazývá princip nezavádění hypotéz (obecněji: čehokoli, např. názvů, symbolů apod.), které (za dané situace) nejsou nutně potřebné. (V originále zněl princip takto: „Assumptions introduced to explain a thing must not be multiplied beyond necessity.“) Dnešní věda se tímto principem dost důsledně řídí, i když jej, jak ukazuje užívání zbytečného a navíc zavádějícího názvu „neurčitý výraz“, někteří učitelé matematiky bohužel ignorují.

Příklad 6.6. Ptejme se, pro která $n \in \mathbb{N}$ existuje limita

$$\lim_{x \to 0} (x^n + \cos x)^{1/x^2}\,; \tag{13}$$

základ má limitu 1, exponent limitu $+\infty$. Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{\lg(x^n + \cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0\pm} g_n(x), \text{ kde } g_n(x) := \frac{nx^{n-1} - \sin x}{x^n + \cos x}\,\frac{1}{2x}\,,$$

a to za předpokladu, že příslušná limita funkce g_n existuje. To však podstatně závisí na n, protože

$$\lim_{x\to 0\pm} g_1(x) = \pm\infty\,, \quad \lim_{x\to 0} g_2(x) = \tfrac{1}{2}\,, \quad \lim_{x\to 0} g_n(x) = -\tfrac{1}{2} \text{ pro všechna } n > 2\,.$$

Limita (13) pro $n = 1$ tedy neexistuje, protože příslušná limita zprava resp. zleva je rovna $+\infty$ resp. 0. Je-li $n > 1$, limita (13) existuje; je rovna $e^{1/2}$ pro $n = 2$ a $e^{-1/2}$ pro všechna $n > 2$.

Poznamenejme ještě, že

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}\,, \tag{13*}$$

protože podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}\,.$$

I v (13*) má základ limitu 1, exponent limitu $+\infty$; přidáme-li však k základu „malou“ funkci x^n (mající v bodě 0 limitu 0), výsledná limita (13) může být úplně jiná, protože nezáleží jen na tom, jakou má základ limitu, ale také na tom, „jak rychle“ se k této limitě blíží.

Tento příklad má varovat před ukvapenými úsudky typu „protože se základ změnil jen nepatrně, limita celého výrazu se asi nezmění“.

Poznámka 6.4. *Bylo by omylem domnívat se, že l'Hospitalovo pravidlo je za všech okolností nejlepší metodou výpočtu limity podílu, nebo snad dokonce jedinou známou metodou.*

Za prvé se totiž může stát, že po derivování čitatele a jmenovatele dostaneme zlomek složitější, než byl zlomek původní. Za druhé je možné, že limita podílu $f(x)/g(x)$ existuje, ale limita podílu $f'(x)/g'(x)$ neexistuje (takže není splněn jeden z předpokladů l'Hospitalova pravidla).

Za třetí je aplikace l'Hospitalova pravidla zbytečná tam, kde vystačíme se znalostí derivací. Limity $\lim_{x\to\pm\infty} x\,(3^{1/x} - 2^{1/x})$ lze najít např. takto: Napíšeme $1/x$ místo x, čímž uvedené limity převedeme na limity $\lim_{x\to 0\pm}(3^x - 2^x)/x$, což jsou – *jak bychom měli na první pohled rozeznat* – derivace funkce $3^x - 2^x$ v bodě 0 zprava a zleva. Protože je $(a^x)' = a^x \lg a$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $a \in \mathbb{R}_+$, je tedy

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\,(3^{1/x} - 2^{1/x}) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{3^x - 2^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \lg 3 - \lg 2 = \lg\frac{3}{2}\,.$$

Za čtvrté: Při výpočtu limity některých zlomků bychom museli l'Hospitalovo pravidlo užít mnohokrát, čímž by se čitatel nebo jmenovatel mohl nadměrně zkomplikovat. *Mnohdy vede pohodlnější a rychlejší cesta k výpočtu limity přes tzv. Taylorovy polynomy.*

První dvě situace budeme nyní ilustrovat jednoduchým příkladem; pak vysvětlíme, co jsou Taylorovy polynomy a jak lze pomocí nich některé limity najít rychleji a elegantněji než l'Hospitalovým pravidlem.

Příklad 6.7. Funkce $f(x) := x$, $g(x) := x + \lg x \cdot \sin x$ mají v $+\infty$ limitu $+\infty$, přičemž

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \lg x\, \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{\lg x}{x}\, \sin x} = 1\,, \tag{14}$$

protože $(\lg x)/x \to 0$ a $\sin x$ je omezená funkce. Podíl

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sin x}{x} + \lg x\, \cos x} = \frac{x}{x + \sin x + x \lg x\, \cos x}\,, \tag{14'}$$

který je složitější než podíl původní, přitom pro $x \to +\infty$ limitu nemá – např. proto, že se jeho jmenovatel anuluje v nekonečně mnoha bodech a_n divergujících do $+\infty$. [4]) Z toho je patrné, že *l'Hospitalovo pravidlo nelze v tomto případě užít, ačkoli limita* (14) *existuje.* $\square$

Je-li funkce f definována v jistém okolí $U(a)$ jistého bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje-li pro některé celé číslo $n \geq 0$ konečná derivace $f^{(n)}(a)$, nazývá se funkce

$$\mathcal{T}^f_{a,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,, \ \text{ kde } \ x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

n-tý Taylorův polynom funkce f o středu a; je-li ze souvislosti zřejmé, o kterou funkci f a o který bod a se jedná, můžeme jej stručněji značit např. $\mathcal{T}_n(x)$.

Taylorovy polynomy užijeme *k limitní aproximaci* příslušných funkcí. Několik nových pojmů a označení nám dovolí jednoduše vysvětlit, co se tím míní, a umožní nám s Taylorovými polynomy efektivně pracovat.

Je-li $a \in \mathbb{R}^*$ a jsou-li f, g dvě funkce definované v jistém $P(a)$, bude symbol

$$f(x) = o(h(x)) \ \text{ pro } \ x \to a \tag{16}$$

znamenat, že

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0\,; \tag{17}$$

---

[4]) Spojitá funkce ve jmenovateli posledního zlomku v (14′) má pro každé $n \in \mathbb{N}$ v bodě $2n\pi$ hodnotu $2n\pi(1+\lg(2n\pi)) > 0$, v bodě $(2n+1)\pi$ hodnotu $(2n+1)\pi(1-\lg((2n+1)\pi)) < 0$; někde mezi body $2n\pi$, $(2n+1)\pi$ se proto anuluje.

jsou-li f, g, h tři funkce definované v jistém $P(a)$, bude zápis

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \ \text{ pro } \ x \to a \tag{18}$$

znamenat, že

$$f(x) - g(x) = o(h(x)) \ \text{ pro } \ x \to a\,. \tag{19}$$

Analogicky se definují symboly, v nichž je buď „$x \to a+$“, nebo „$x \to a-$“ místo „$x \to a$“. Symbolické zápisy (16) resp. (18) čteme: „*$f(x)$ je malé ó $h(x)$*“ resp. „*$f(x)$ je (rovno) $g(x)$ plus malé ó $h(x)$ pro $x \to a$*“.

Poznámka 6.5. Za situace (16) jsou prakticky důležité jen případy, kdy jsou obě limity $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$ rovny buď 0, nebo $\pm\infty$. První případ odpovídá názorné představě, že „*pro $x \to a$ se $f(x)$ blíží k nule podstatně rychleji než $h(x)$*“ (graf f se „v blízkosti bodu a“ přimyká k ose x podstatně lépe než graf h); ve druhém případě však naopak „*$f(x)$ diverguje pro $x \to a$ do $\pm\infty$ podstatně pomaleji než $h(x)$*“ (bod $(x, h(x))$ je „pro x blízká k a“ podstatně dále od osy x než bod $(x, f(x))$. Jistě nemusíme připomínat, že tyto limitní pojmy nemají nic společného s *hodnotami* funkcí f a h v bodě a samém.

Při této terminologii jsou jistě srozumitelné např. tyto výroky:

A. *Je-li $\beta > \alpha > 0$, roste x^β pro $x \to +\infty$ do $+\infty$ podstatně rychleji než x^α.* (Je $x^\alpha/x^\beta \to 0$.)

B. *e^{-x} konverguje k 0 pro $x \to +\infty$ podstatně rychleji než kterákoli záporná mocnina x^a.* (Pro každé $a \in \mathbb{R}_-$ je $e^{-x}/x^a \to 0$ neboli $x^a e^x \to +\infty$.)

C. *$\lg x$ diverguje pro $x \to 0+$ do $-\infty$ podstatně pomaleji, než kterákoli záporná mocnina x^a diverguje do $+\infty$.* (Je $\lg x/x^a \to 0$ neboli $x^b \lg x \to 0$ pro každé $b \in \mathbb{R}_+$.)
□

Uveďme nyní některé základní vlastnosti symbolu „malé o“: [5])

$$f(x) = o(h(x)),\ g(x) = o(h(x)) \ \Rightarrow\ f(x) \pm g(x) = o(h(x))\,; \tag{20}$$

$$f(x) = o(h(x)),\ g(x) = o(k(x)) \ \Rightarrow\ f(x)g(x) = o(h(x)k(x))\,; \tag{21}$$

$$\textit{je-li } \ 0 \ne \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{k(x)} \ne \pm\infty,\ \textit{je } \ f(x) = o(h(x)) \ \Leftrightarrow\ f(x) = o(k(x))\,. \tag{22}$$

Dále: *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ je*

$$f(x) = o(h(x)) \ \Rightarrow\ f(x^\alpha) = o(h(x^\alpha)) \ \textit{ pro } \ x \to 0+ \ \textit{ a pro } \ x \to +\infty\,; \tag{23}$$

je-li $\alpha \in \mathbb{N}$, platí (23) pro $x \to 0$ („oboustranně“).

Příklad 6.8. Podle (4) a (3′) je

$$x = o(e^x) \ \text{ a } \ \lg x = o(x) \ \textit{ pro } \ x \to +\infty\,.$$

[5]) V relacích (20) – (22) vynecháváme pro stručnost symbol $x \to a$ ($x \to a+$, $x \to a-$).

Obecněji, pro *každá dvě čísla* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$ *je*

$$x^\beta = o(e^{\alpha x}) \quad \text{pro} \;\; x \to +\infty, \tag{24}$$

$$\lg^\beta x = o(x^\alpha) \quad \text{pro} \;\; x \to +\infty, \tag{25}$$

$$|\lg x|^\beta = o(x^{-\alpha}) \quad \text{pro} \;\; x \to 0+. \tag{26}$$

Platí též např. tyto relace:

$$\alpha < \beta \;\Rightarrow\; e^{\alpha x} = o(e^{\beta x}) \quad \text{pro} \;\; x \to +\infty, \tag{27}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}_+,\; \beta \in \mathbb{R}_+ \;\Rightarrow\; e^{\alpha x} = o(e^{\beta x^2}) \quad \text{pro} \;\; x \to +\infty. \tag{28}$$

Věta 6.2 (o limitní aproximaci funkcí polynomy). *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, *nechť* $n \geq 0$ *je celé číslo a nechť funkce* f *má v bodě* a *spojitou* n*-tou derivaci. Pak je*

$$f(x) = \mathcal{T}^f_{a,n}(x) + o((x-a)^n) \quad \text{pro} \;\; x \to a. \tag{29}$$

Obráceně: Jediný polynom p *stupně nejvýše* n, *který splňuje podmínku*

$$f(x) = p(x) + o((x-a)^n) \quad \text{pro} \;\; x \to a, \tag{30}$$

je n*-tý Taylorův polynom funkce* f *o středu* a. □

Abychom mohli pomocí Taylorových polynomů počítat běžné limity, je nutné spolehlivě znát několik základních aproximací:

Pro každé celé číslo $n \geq 0$ *je*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{31}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{32}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{33}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{34}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{35}$$

$$\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{36'}$$

$$\lg(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{pro} \;\; x \to 0; \tag{36''}$$

$$(37)\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \ \ \textit{pro} \ \ x \to 0 \ \ \textit{a každé} \ \ \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(38)\qquad \arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \ \ \textit{pro} \ \ x \to 0;$$

$$(39)\qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \ \ \textit{pro} \ \ x \to 0.$$

Poznámka 6.6. Jak snadno nahlédneme, je *n-tý Taylorův polynom součtu resp. rozdílu dvou funkcí roven součtu resp. rozdílu jejich n-tých Taylorových polynomů.*

Taylorovy polynomy lze i („zkráceně“) *násobit*, a to takto: *Jsou-li*

$$(40)\qquad \mathcal{T}^f_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_j (x-a)^j, \quad \mathcal{T}^g_{a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k$$

n-té Taylorovy polynomy funkcí f, g, je n-tý Taylorův polynom součinu fg roven součtu všech výrazů tvaru $a_j b_k (x-a)^{j+k}$, kde $j + k \le n$, tj. roven

$$(40')\qquad \mathcal{T}^{fg}_{a,n}(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} (x-a)^m .$$

Jinými slovy: Podobně jako při tzv. zkráceném násobení čísel násobíme jen ty dvojice sčítanců, u nichž je výsledný mocnitel výrazu $(x - a)$ nejvýše roven n. Všechny takové součiny sečteme a zpravidla i uspořádáme tak jako ve $(40')$.

Příklad 6.9. Abychom získali pátý Taylorův polynom funkce $e^{-x^2} \arcsin x$ o středu 0, násobíme pátý Taylorův polynom prvního faktoru pátým Taylorovým polynomem druhého faktoru, ale ponecháme si jen mocniny x^m s $m \le 5$:

$$(41)\qquad e^{-x^2} \arcsin x = \bigl(1 - x^2 + \tfrac{1}{2} x^4 + o(x^5)\bigr)\bigl(x + \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{3}{40} x^5 + o(x^5)\bigr)$$
$$= x + \bigl(-1 + \tfrac{1}{6}\bigr) x^3 + \bigl(\tfrac{3}{40} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\bigr) x^5 + o(x^5) = x - \tfrac{5}{6} x^3 + \tfrac{49}{120} x^5 + o(x^5).$$

Všechny ostatní součiny „přešly“ (podle (20) a (21)) do $o(x^5)$. □

Taylorovy polynomy lze též *dělit*:

Příklad 6.10. Pátý Taylorův polynom funkce $\operatorname{tg} x$ v bodě 0 lze získat (opět „zkráceným“) dělením pátého Taylorova polynomu funkce $\sin x$ pátým Taylorovým polynomem funkce $\cos x$. Běžným algoritmem dostaneme tento výsledek:

$$(42)\qquad \operatorname{tg} x = \bigl(x - \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{120} x^5 + o(x^5)\bigr) : \bigl(1 - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{24} x^4 + o(x^5)\bigr)$$
$$= x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 + o(x^5).$$

Poznámka 6.7. *Dělení Taylorových polynomů vede občas k funkci, která sice není polynomem, ale kterou lze přesto užít k limitní aproximaci podílu.*

Tak např. dělením pátých Taylorových polynomů funkcí $\cos x$ a $\sin x$ dostaneme tento výsledek:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} x &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^5)\big) : \big(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)\big) \\ &= x^{-1} - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{45}x^3 + o(x^4)\,; \end{aligned} \tag{43}$$

z něj např. plyne, že

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{45}x^3 + o(x^4)\,, \quad \frac{1 - x\operatorname{cotg} x}{x^2} \to \tfrac{1}{3} \ \textit{pro} \ x \to 0\,. \quad \square \tag{43'}$$

Uveďme několik příkladů situací, kdy je užití Taylorových polynomů rychlejší a pohodlnější než aplikace l'Hospitalova pravidla.

Příklad 6.11. Při výpočtu limity

$$A := \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x} \tag{44}$$

najdeme nejdříve nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro něž je n-tý Taylorův polynom jmenovatele nenulový. Protože

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x = (x + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = \tfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)\,, \tag{45}$$

je $n = 3$. Po tomto zjištění sestavíme třetí Taylorův polynom čitatele:

$$\sin x - \arcsin x = (x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - (x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = -\tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)\,. \tag{46}$$

Nakonec vydělíme rozdíl (46) rozdílem (45) a zkrátíme výrazem $\frac{1}{3}x^3$; je tedy

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + o(1)}{2 + o(1)} = -\frac{1}{2}\,.$$

Poznamenejme, že *symbol $o(1)$ znamená jakoukoli funkci konvergující k nule.*

Příklad 6.12. Při výpočtu limity

$$B := \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^3} - \sqrt{2 + x^3}}{\sqrt{3 + x^3} - \sqrt{4 + x^3}} \tag{47}$$

nelze Taylorovy polynomy užít přímo, protože výrazy pod odmocninami mají limitu $+\infty$. Po úpravě, po níž budou mít odmocňované výrazy tvar $1 + o(1)$, bude však možné užít vzorec (37).

Jmenovatel napíšeme proto ve tvaru

$$\begin{aligned}\sqrt{3+x^3}-\sqrt{4+x^3} &= \sqrt{x^3}\,\big(\sqrt{1+3x^{-3}}-\sqrt{1+4x^{-3}}\,\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(\big(1+\tfrac{3}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)-\big(1+2x^{-3}+o(x^{-3})\big)\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(-\tfrac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)\,,\end{aligned}$$

čitatel ve tvaru

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^3}-\sqrt{2+x^3} &= \sqrt{x^3}\,\big(\sqrt{1+x^{-3}}-\sqrt{1+2x^{-3}}\,\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(\big(1+\tfrac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)-\big(1+x^{-3}+o(x^{-3})\big)\big)\\ &= \sqrt{x^3}\,\big(-\tfrac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)\,.\end{aligned}$$

Z toho ihned plyne, že

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3}\,\big(-\frac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)}{\sqrt{x^3}\,\big(-\frac{1}{2}\,x^{-3}+o(x^{-3})\big)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1\,.$$

Příklad 6.13. Vypočtěme – pokud existuje – limitu pro $x\to 0$ funkce

$$\text{(48)}\qquad \Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big)^{\operatorname{cotg} x}=\exp f(x)\,,\ \text{ kde }\ f(x):=\operatorname{cotg} x\cdot\lg\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big).$$

Z identit

$$\frac{2}{\pi}\arccos x=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\Big)=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2}-(x+o(x))\Big)=1-\Big(\frac{2}{\pi}\,x+o(x)\Big)$$

podle (36″) (a (22)) plyne, že

$$\lg\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big)=-\frac{2}{\pi}\,x+o(x)\ \text{ pro }\ x\to 0\,.$$

Vzhledem k (43) je proto

$$f(x)=\Big(\frac{1}{x}+o(1)\Big)\Big(-\frac{2}{\pi}\,x+o(x)\Big)=-\frac{2}{\pi}+o(1)\to-\frac{2}{\pi}\ \text{ pro }\ x\to 0\,,$$

takže

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{2}{\pi}\arccos x\Big)^{\operatorname{cotg} x}=\lim_{x\to 0}\exp f(x)=e^{-2/\pi}\,.$$

Příklad 6.14. Je-li $\varphi(t)\to a$ pro $t\to\alpha$ a $\varphi(t)\neq a$ všude v jistém $P(\alpha)$, platí podle věty o limitě superpozice implikace

$$f(x)=g(x)+o(h(x))\ \text{ pro }\ x\to a\ \Rightarrow\ f(\varphi(t))=g(\varphi(t))+o(h(\varphi(t)))\ \text{ pro }\ t\to\alpha\,.$$

Například při výpočtu čtvrtého Taylorova polynomu funkce $\exp(\arcsin x)$ o středu 0 bude $a = \alpha = 0$ a místo $o(\arcsin^4 x)$ lze (podle (22)) psát $o(x^4)$; je tedy

$$\begin{aligned}
&\exp(\arcsin x) = \\
&= 1 + \arcsin x + \tfrac{1}{2}\arcsin^2 x + \tfrac{1}{6}\arcsin^3 x + \tfrac{1}{24}\arcsin^4 x + o(\arcsin^4 x) \\
&= 1 + \bigl(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\bigr)^2 + \tfrac{1}{6}\bigl(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\bigr)^3 \\
&\quad + \tfrac{1}{24}\bigl(x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\bigr)^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \bigl(x + \tfrac{1}{6}x^3\bigr) + \tfrac{1}{2}\bigl(x^2 + \tfrac{1}{3}x^4\bigr) + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^4) \quad \text{pro} \quad x \to 0;
\end{aligned}$$

zcela analogicky odvodíme identitu

$$\exp(\sin x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4) \quad \text{pro} \quad x \to 0.$$

Tyto dvě identity nám dovolí rozhodnout, zdali *existuje číslo* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že limita*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\arcsin x) - \exp(\sin x)}{x^n} \tag{49}$$

je konečná a nenulová. Protože se čitatel rovná

$$\begin{aligned}
&(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4)) \\
&\qquad = \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{pro} \quad x \to 0,
\end{aligned}$$

splňuje uvedenou podmínku číslo $n = 3$ a příslušná limita (49) je pak rovna $\frac{1}{3}$.

Z dokázaného výsledku dále plyne, že limita (49) je rovna 0 pro každé celé číslo $n < 3$. Pro sudá čísla $n > 3$ limita (49) neexistuje, protože příslušná limita zprava je $+\infty$ a zleva $-\infty$; pro lichá $n > 3$ je limita (49) rovna $+\infty$. [6])

Příklad 6.15. Při zjišťování, zdali existuje limita

$$A := \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(\sin^2 x) - \cosh^2(\operatorname{arctg}^2 x)}{\lg(1 + x^2 + x^4) - \lg(1 + x^2 - x^4)} \tag{50}$$

a čemu se rovná, začneme opět jmenovatelem: Protože pro $x \to 0$ je

$$\begin{aligned}
\lg(1 + x^2 + x^4) &= (x^2 + x^4) - \tfrac{1}{2}(x^2 + x^4)^2 + o((x^2 + x^4)^2) = x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4), \\
\lg(1 + x^2 - x^4) &= (x^2 - x^4) - \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)^2 + o((x^2 - x^4)^2) = x^2 - \tfrac{3}{2}x^4 + o(x^4),
\end{aligned}$$

je jmenovatel $j(x)$ zlomku v (50) roven $2x^4 + o(x^4)$; budeme proto hledat čtvrtý Taylorův polynom čitatele.

---

[6]) Pro necelé exponenty n se situace dále komplikuje, protože mocnina x^n nemusí být pro $x < 0$ definována.

Pro $y \to 0$ je

$$\cos y = 1 - \tfrac{1}{2} y^2 + o(y^2)\,, \quad \text{takže} \quad \cos^2 y = 1 - y^2 + o(y^2)\,,$$

$$\cosh y = 1 + \tfrac{1}{2} y^2 + o(y^2)\,, \quad \text{takže} \quad \cosh^2 y = 1 + y^2 + o(y^2)\,,$$

a za y máme dosadit

$$\sin^2 x = (x - \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + o(x^2)$$

resp.

$$\operatorname{arctg}^2 x = (x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3))^2 = x^2 + o(x^2)\,;$$

pro $x \to 0$ je tedy čitatel $c(x)$ zlomku v (50) roven

$$\bigl(1 - (x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4)\bigr) - \bigl(1 + (x^2 + o(x^2))^2 + o(x^4)\bigr) = -2x^4 + o(x^4)\,.$$

V důsledku toho je

$$\frac{c(x)}{j(x)} = \frac{-2x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} = \frac{-2 + o(1)}{2 + o(1)} \to -1$$

pro $x \to 0$, takže $A = -1$. Čtenář se může sám přesvědčit, že hledání této limity l'Hospitalovým pravidlem by bylo velice komplikované.

Příklad 6.16. Při výpočtu některých limit je výhodné užít jak l'Hospitalovo pravidlo, tak i Taylorovy polynomy. Například limitu

$$\lim_{x \to 0} (\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2)^{1/\lg|x|} \tag{51}$$

můžeme počítat takto: Podle l'Hospitalova pravidla je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2)}{\lg|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2(\sinh 2x^2 + \sin 2x^2)}{\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2}\,, \tag{52}$$

přičemž

$$\cosh^2 x^2 - \cos^2 x^2 = (1 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4))^2 - (1 - \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4))^2 = 2x^4 + o(x^4)\,,$$

$$2x^2(\sinh 2x^2 - \sin 2x^2) = 2x^2\,((2x^2 + o(x^2)) + (2x^2 + o(x^2))) = 8x^4 + o(x^4)\,.$$

Limita na pravé straně (52) je tedy rovna 4 a totéž platí o limitě vlevo. Z toho plyne, že se limita (51) rovná e^4.

l'Hospitalovo pravidlo nám v tomto příkladu pomohlo odstranit nepříjemný zlomek (na levé straně (52)), jehož čitatel i jmenovatel má limitu $-\infty$, zatímco podíl derivací čitatele a jmenovatele je daleko jednodušší. Před dalším derivováním čitatele a jmenovatele jsme však dali přednost Taylorovým polynomům, protože tento postup je o něco přehlednější a vede k cíli rychleji.

Cvičení

Za předpokladu, že a, b, c, α, β, γ, δ, ε jsou (konečná) reálná čísla, A, B, C kladná (konečná reálná) čísla a $n \in \mathbb{N}$, vypočítejte – užitím l'Hospitalova pravidla nebo Taylorových polynomů nebo kombinací obou – tyto limity: [7])

6.01. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$, kde $a \neq b$

6.02. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(x^2 - x + 1)}{\lg(x^{10} + x - 5)}$

6.03. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp(-\frac{1}{2}x^2)}{x^4}$

6.04. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

6.05. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{\cos ax - \cos bx}$, kde $|a| \neq |b|$

6.06. $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\pi x$

6.07. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

6.08. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x - x}{x - \sin x}$

6.09. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \lg(x(\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x))$

6.10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^n}$

6.11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2 + x) - \sin x + 3\cos x - 4}{\mathrm{arctg}^3\, x}$

6.12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

6.13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\exp x^2 - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

6.14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(\cos ax)}{\lg(\cos bx)}$, kde $b \neq 0$

[7]) U každého příkladu doporučujeme zvážit, která metoda povede snadněji a rychleji k cíli; před každým krokem je vhodné zamyslit se, zdali nelze aktuální situaci nějak zjednodušit.

6.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)\,(\exp(-x^2) - 1)^2}$

6.16. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})^2}$

6.17. $\lim\limits_{x\to a} \Big(\sin^2 \dfrac{x-a}{2}\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi x}{2a}\Big)$, kde $a \neq 0$

6.18. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (x - \frac{1}{2}\pi)\operatorname{tg} x$

6.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{\lg(1-x^2-x^4) - \lg(1-x^2+x^4)}$

6.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \operatorname{arctg} x - x}$

6.21. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\Big)$

6.22. $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-\exp(-x^2)}}$

6.23. $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{(1+x)\lg(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}\Big)$

6.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,(e^x+1) - 2\,(e^x-1)}{x^3}$

6.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\cos x} - \sqrt{1-x\cos x}}{\lg(1-x)}$

6.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x\,e^x) - \cos(x\,e^{-x})}{x^3}$

6.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2+5x^4) - \exp(x^2-3x^4)}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)}$

6.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x - \operatorname{tg} x) - 1}{(\exp(\sin^2 x) - 1)^3}$

6.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cosh x^2 - 1)\,\lg(\cos x)}{\sin^3 x\ \operatorname{tg}^3 x}$

6.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\operatorname{cotg}(\sin x) - 1}{x^2}$

6.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt[3]{1+\sin 3x}}{x\,(\lg(1+x) - \lg(1-x))}$

6.32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(1+x\,e^x)\,\sin 2x^2}{\lg(\cosh^2 x)}$

6.33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(2\sin x + \sqrt{1-4\,\mathrm{tg}^2\,x}\,)}{\lg(\mathrm{tg}\,x + \sqrt{1-x^2}\,)}$

6.34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 x - x^2\,\mathrm{tg}^2\,x}{(\cosh x - \exp\frac{1}{2}x^2)^2}$

6.35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\,e^x\sin x} - \sqrt[3]{1+3\,e^x\sin x}}{\sinh(\arcsin x^2)}$

6.36. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x-4x^2+x^3)\,e^x - \sqrt{1+4x-x^2}}{1-\sqrt{1+x^3}}$

6.37. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\sqrt{x^2+\alpha x+\beta} - \sqrt[3]{x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon}\,\big)$

6.38. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x\,\arccos a^{-x}}{(1-\cos\sqrt{x}\,)\,\arccos(1-x)}$, kde $a>1$

6.39. $\lim\limits_{x\to 0} \arccos \dfrac{(\cos x-1)\,(\mathrm{arctg}\,x - x)}{(\arcsin x - x)\,(\exp x^2 - 1)}$

6.40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+\mathrm{argsinh}\,5x} - \sqrt[3]{1+\sinh 3x}}{\cos ax - \cos bx}$, kde $|a| \neq |b|$

6.41. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\big(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}\,\big)$

6.42. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n\big(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+4} - 2\sqrt{x^2+3}\,\big)$

6.43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg^2(1+\sin x) - \lg^2(1+\arcsin x)}{x^n}$

6.44. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,\exp x - \exp(\sin x) - \exp(\arcsin x)}{x^n}$

6.45. $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^{1/x}$

6.46. $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^{1/x^2}$

6.47. $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{2\arccos x}{\pi}\Big)^{1/x}$

6.48. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \big(\mathrm{tg}\,x\big)^{\mathrm{tg}\,2x}$

6.49. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$

6.50. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

6.51. $\lim\limits_{x\to 0}\big(\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi - x)\big)^{\operatorname{cotg} x}$

6.52. $\lim\limits_{x\to \pi/2+}(1-\cos x)^{\operatorname{tg}^2 x}$

6.53. $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\dfrac{4\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^{1/\arccos^2 x}$

6.54. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sinh x)^{\operatorname{arctg}(1/x)}$

6.55. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6\,(x-\sin x)}{\sin^3 x}\right)^{1/x^2}$

6.56. $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+x^2\big)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}$

6.57. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\lg x+1}{2\lg^2 x-\lg x+1}\right)^{1/\sin \pi x}$

6.58. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arctg}(1/x)}\right)^{1/x^3}$

6.59. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+1}{2e^{2x}-e^x+1}\right)^{1/\lg(1+x)}$

6.60. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{1/(4x-\pi)}$

6.61. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$

6.62. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

6.63. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

6.64. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{A^x+B^x+C^x}{3}\right)^{1/x}$

6.65. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\exp\dfrac{\sin x}{x^2+1}-1\right)^{(x^2+1)/\arcsin x}$

6.66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$

6.67. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin x}{x}+\lg(1+x^2)\Big)^{1/x^2}$

6.68. $\lim\limits_{x\to 1}\big(1+\sin\pi x\big)^{\operatorname{cotg}\pi x}$

6.69. $\lim\limits_{x\to +\infty}\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2+4}\Big)^{1/\operatorname{arccotg}^2 x}$

6.70. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(5\exp\dfrac{x}{x+2}-4\Big)^{x+2/x}$

6.71. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{2(1-\cos\sqrt{x})}{x}\Big)^{1/\lg(1-x)}$

6.72. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(2\,\dfrac{\sin x-x}{\operatorname{arctg}x-x}\Big)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

6.73. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\operatorname{arctg}x}\Big)^{\sin x/(\exp x^2-1)}$

6.74. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1-\cos x}{\sqrt[4]{1+2x^2}-1}\Big)^{\operatorname{cotg}x/\operatorname{arctg}x}$

6.75. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+\dfrac{1-\cos x}{\arcsin x}\Big)^{x^2/(x-\operatorname{arctg}x)}$

6.76. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{\sin x}{\arcsin x}\Big)^{1/(\arcsin x-\sin x)}$

6.77. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cotg}x\Big)^{x\lg^2 x}$

6.78. $\lim\limits_{x\to 0+}\Big(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{\arcsin x}\Big)^{1/\lg x}$

6.79. $\lim\limits_{x\to 0+}(\sin x)^{a/\lg x}$

6.80. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{a/\lg|x|}$

6.81. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{arccotg}x)^{1/\lg(\lg x)}$

6.82. $\lim\limits_{x\to 0+}(\arcsin x-\sin x)^{1/\lg(\operatorname{arctg}x)}$

6.83. $\lim\limits_{x\to +\infty}\Big(\dfrac{\lg(\lg x)}{\lg x}\Big)^{1/\lg(\lg(\lg x))}$

6.84. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}(\operatorname{arccotg}e^{x-1}-\operatorname{arccotg}e^{x+1})^{1/x}$

6.85. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} \operatorname{cotg}^2 x$

6.86. $\lim\limits_{x\to 0+} \exp(-\lg^2 x) \operatorname{cotg}^2 x$

6.87. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha((1+x)^{1/x} - x^{1/x})$

6.88. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha(\lg^2(x+1) - \lg^2 x)$

6.89. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \lg \dfrac{\operatorname{arctg}(x+1)}{\operatorname{arctg} x}$

6.90. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \lg \dfrac{\lg(x+1)}{\lg x}$

Řešení

Pro funkce závislé na $n \in \mathbb{N}$ nebo na $\alpha \in \mathbb{R}$ (jako jsou např. funkce z příkladů 6.10 a 6.87 – 6.90) podává následující seznam řešení numerické hodnoty limit jen pro některá n resp. α, pro něž je limita konečná (což je např. v 6.10 hodnota 1/6 pro $n = 3$). Řešení pro ostatní n resp. α jsou z technických důvodů uvedena až na konci seznamu.

6.01. 1
6.02. $\frac{1}{5}$
6.03. $-\frac{1}{12}$
6.04. $\frac{3}{4}$
6.05. $1/(b^2 - a^2)$
6.06. $2/\pi$
6.07. $\frac{1}{4}$
6.08. 2
6.09. $\lg 2$
6.10. $\frac{1}{6}$ $(n = 3)$
6.11. $\frac{4}{3}$
6.12. $\frac{1}{2}$
6.13. $\frac{1}{9}$
6.14. a^2/b^2
6.15. $-\frac{1}{4}$
6.16. 1
6.17. a^2/π^2
6.18. -1
6.19. $-\frac{1}{4}$
6.20. $-\frac{1}{11}$
6.21. $\frac{1}{2}$
6.22. ± 1
6.23. $\frac{1}{2}$
6.24. $\frac{1}{6}$
6.25. -1
6.26. -2
6.27. -32
6.28. $-\frac{1}{18}$
6.29. $-\frac{1}{4}$
6.30. $-\frac{1}{6}$
6.31. $\frac{1}{4}$
6.32. 0
6.33. 2
6.34. $-\infty$
6.35. $\frac{1}{2}$
6.36. $\frac{44}{3}$
6.37. $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\gamma$
6.38. $2\sqrt{\lg a}$
6.39. 0
6.40. $2/(a^2 - b^2)$
6.41. $\frac{1}{2}$
6.42. $-\frac{1}{4}$ $(n = 3)$
6.43. $-\frac{2}{3}$ $(n = 4)$
6.44. $-\frac{1}{12}$ $(n = 5)$
6.45. e^2

6.46. $e^{-1/6}$	**6.47.** $e^{-2/\pi}$	**6.48.** e^{-1}
6.49. $e^{-1/3}$	**6.50.** 1	**6.51.** e^{-2}
6.52. $+\infty$	**6.53.** $e^{-1/\pi}$	**6.54.** e
6.55. $e^{9/20}$	**6.56.** e	**6.57.** $e^{-2/\pi}$
6.58. $e^{-1/\pi}$	**6.59.** e^{-1}	**6.60.** $e^{1/2}$
6.61. $e^{2/\pi}$	**6.62.** e	**6.63.** $+\infty$
6.64. $\sqrt[3]{ABC}$	**6.65.** e^2	**6.66.** $e^{1/2}$
6.67. $e^{5/6}$	**6.68.** e^{-1}	**6.69.** e^{-3}
6.70. e^5	**6.71.** $e^{1/12}$	**6.72.** $e^{11/20}$
6.73. $e^{-1/2}$	**6.74.** $e^{2/3}$	**6.75.** $e^{-3/2}$
6.76. 0	**6.77.** 1	**6.78.** e
6.79. e^a	**6.80.** e^{2a}	**6.81.** 0
6.82. e^3	**6.83.** 0	**6.84.** $e^{\mp 1}$
6.85. 0	**6.86.** 0	**6.87.** 1 $(\alpha = 2)$
6.88. 0 $(\alpha < 1)$	**6.89.** $2/\pi$ $(\alpha = 2)$	**6.90.** 0 $(\alpha \le 1)$

Doplňky řešení

6.10. Limita je rovna 0 pro $n = 1$ a $n = 2$; je rovna $+\infty$ pro *lichá* $n > 3$ a neexistuje pro *sudá* $n > 3$, protože pak se limita zprava (zleva) rovná $+\infty$ $(-\infty)$.

6.42. Limita je rovna 0 pro $n = 1$ a $n = 2$; rovná se $+\infty$ pro všechna $n > 3$.

6.43. Limita je je rovna 0 pro $n = 1, 2, 3$; rovná se $-\infty$ pro *sudá* $n > 4$, neexistuje pro *lichá* $n > 4$.

6.44. Limita je rovna 0, je-li $1 \le n \le 4$; rovná se $-\infty$ pro *sudá* $n > 5$, neexistuje pro *lichá* $n > 5$.

6.87. Limita je rovna 0 pro $\alpha < 2$ a $+\infty$ pro $\alpha > 2$.

6.88. Limita je rovna $+\infty$ pro $\alpha \ge 1$.

6.89. Limita je rovna 0 pro $\alpha < 2$ a $+\infty$ pro $\alpha > 2$.

6.90. Limita je rovna $+\infty$ pro $\alpha > 1$.

7. Průběh funkce

Grafem reálné funkce f reálné proměnné rozumíme množinu

$$\operatorname{gr} f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathcal{D}(f)\}. \tag{1}$$

Má-li funkce f v bodě a (z definičního oboru) konečnou nebo nekonečnou derivaci $f'(a)$, říkáme, že **graf funkce f má v bodě a tečnu**. **Tečna** (**grafu f v bodě** a) je pak definována takto: Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, je to přímka o rovnici $y = f(a) + f'(a)(x-a)$; je-li $f'(a) = \pm\infty$, je to přímka o rovnici $x = a$. [1])

Je-li $f'_+(a) \neq f'_-(a)$ (tj. existují-li obě jednostranné derivace, ale oboustranná ne), říkáme, že **graf funkce f má v bodě a hrot**.

Vyšetřením průběhu funkce budeme rozumět nalezení zejména těch jejích vlastností, které potřebujeme k nakreslení jejího grafu s požadovanou přesností. Budou nás proto zajímat především tyto informace [2]):

1) *Definiční obor* $\mathcal{D}(f)$ dané funkce f. Opakujme znovu, že pokud je $f(x)$ dáno nějakým „vzorcem“, považujeme za definiční obor sjednocení všech maximálních intervalů, v jejichž každém bodě má „vzorec“ smysl.

2) *Sudost*, *lichost*, *periodicita* funkce f.

3) Všechny body resp. intervaly, v nichž je f *spojitá*. V bodech, v nichž spojitá není, existence a hodnota příslušné *limity* (oboustranné, zprava, zleva).

4) Body resp. intervaly (obsažené v $\mathcal{D}(f)$), v nichž má f *oboustrannou derivaci*, a výpočet této derivace. V bodech $x \in \mathcal{D}(f)$, v nichž $f'(x)$ neexistuje, existence a hodnota *derivací jednostranných*. V bodech $x \notin \mathcal{D}(f)$, které mají prstencové okolí (oboustranné, jednostranné) obsažené v $\mathcal{D}(f)$, je kromě znalosti limity $f(x\pm)$ (resp. $f(x+)$, $f(x-)$) důležitá i znalost *limity* $f'(x\pm)$ (resp. $f'(x+)$, $f'(x-)$), protože pak víme, *ke které hodnotě se $f(x)$ blíží* a navíc *ze kterého směru se k ní blíží*.

5) Zásadní význam má nalezení *maximálních intervalů, v nichž je f buď* (*ryze*) *monotónní, nebo konstantní*. V jednodušších případech hledáme i *maximální intervaly, v nichž je f* (*ryze*) *konvexní, konkávní nebo lineární*.

6) Nalezení (absolutních) *extrémů* funkce f v $\mathcal{D}(f)$ (nebo podrobněji v každém z maximálních intervalů, z nichž se $\mathcal{D}(f)$ „skládá“); tím rozumíme nalezení jejího *absolutního maxima* a *minima*, pokud existují, a v případě, že tomu tak není, příslušného *suprema* a *infima*.

7) V některých případech lze vyšetření průběhu funkce ještě doplnit např. nalezením jejích *asymptot* a *inflexních bodů*. □

---

[1]) V obou případech prochází tečna bodem $(a, f(a))$, nikoli bodem a, jak by bylo možné soudit z trochu neobratného termínu „tečna v bodě a“. Bodem a samozřejmě procházet nemůže (což uvedený název trochu omlouvá), protože tento bod neleží v rovině $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obsahující $\operatorname{gr} f$.

[2]) Pokud některý pojem uvedený v bodech 1) – 7) nebyl zatím definován, bude to na vhodném místě provedeno.

Definice funkce *monotónní* (*neklesající, nerostoucí*), *ryze monotónní* (*rostoucí, klesající*) a *konstantní* jsme již zopakovali v kapitole 3. Nyní připomeňme tuto velmi dobře známou a důležitou větu:

Věta 7.1. *Předpokládejme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a < b$ a že má všude v (a,b) derivaci. Pak*

$$\left\{\begin{matrix} f' > 0 \\ f' \geq 0 \\ f' < 0 \\ f' \leq 0 \\ f' = 0 \end{matrix}\right\} \text{ všude v } (a,b) \Rightarrow f \text{ je } \left\{\begin{matrix} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{konstantní} \end{matrix}\right\} \text{ v } I.$$

Spolu s větou 7.1 se při vyšetřování průběhu funkce potřebují zejména tato další tvrzení:

Věta 7.2. *Je-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jsou-li $\alpha \neq \beta$ dva body intervalu I a platí-li nerovnost $f(\alpha) \leq C \leq f(\beta)$, existuje v intervalu s krajními body α, β bod γ, v němž je $f(\gamma) = C$.* [3]

D ů s l e d e k : Je-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je $f(I)$ buď interval, nebo jednobodová množina.

Věta 7.3. *Je-li funkce f spojitá v kompaktním* [4] *intervalu $I \subset \mathbb{R}$, nabývá v I jak svého maxima, tak i svého minima.*

Věta 7.4. *Je-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a < b$ a je-li $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, je f ryze monotónní v I.*

Poznamenejme, že body, v nichž je $f'(x) = 0$, se nazývají **stacionární body** funkce f. Předcházející větu lze proto vyslovit i takto:

Věta 7.4′. *Má-li funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ s krajními body $a < b$ všude v (a,b) derivaci, ale nemá tam žádné stacionární body, je v I ryze monotónní.*

Věta 7.5. *Je-li funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monotónní, existují limity $f(a+)$, $f(b-)$.*

P o d r o b n ě j i : Je-li f neklesající v (a,b), je

$$f(a+) = \inf f((a,b)), \quad f(b-) = \sup f((a,b));$$

je-li f v (a,b) nerostoucí, je

$$f(a+) = \sup f((a,b)), \quad f(b-) = \inf f((a,b)).$$

[3]) Platnost právě vysloveného tvrzení se nazývá *Darbouxova vlastnost* funkce f. Často se uvádí i v této podobě: *Nabývá-li funkce f v bodech $\alpha \in I$ a $\beta \in I$ hodnot A a B, nabývá v bodech ležících mezi α, β i všech hodnot ležících mezi A a B.* (Říkáme přitom, že *číslo μ leží mezi čísly λ a ν*, je-li buď $\lambda \leq \mu \leq \nu$, nebo $\lambda \geq \mu \geq \nu$.)

[4]) *Kompaktním* intervalem rozumíme interval, který je *zároveň uzavřený a omezený*.

Poznámka 7.1 (důležitá). Studenti se velmi často (od učitelů i z učebnic) dovídají, že k tomu, aby našli extrémy dané (spojité) funkce f v intervalu I, *musí* po vyřešení rovnice $f'(x) = 0$, tedy po nalezení všech stacionárních bodů funkce f *u každého z nich rozhodnout, zdali v něm funkce f má své lokální maximum resp. minimum*. Aby zjistili, ve kterých intervalech $J \subset I$ je f ryze monotónní, *musí* údajně *rozřešit nerovnice* $f'(x) > 0$ *a* $f'(x) < 0$.

Pravdivá je z toho však jen část o nalezení všech stacionárních bodů funkce f, přičemž je ovšem třeba najít i všechny body (definičního oboru), v nichž f derivaci nemá. *Znalost tzv. lokálních extrémů však není k úspěšnému zjištění průběhu funkce potřebná a nerovnice* $f'(x) \gtrless 0$ *není nutné řešit téměř nikdy.*

To, co jsme právě řekli, *prokážeme* vysvětlením jednoduchého algoritmu zjišťování průběhu funkce a řadou konkrétních příkladů, které jej budou ilustrovat.

Algoritmus vyšetření průběhu funkce: Budeme předpokládat, že funkce f je spojitá v intervalu I s krajními body $a < b$ a že množina N všech $x \in (a, b)$, v nichž je buď $f'(x) = 0$, nebo v nichž f derivaci nemá, je konečná. [5])

Pak je konečná i množina $N \cup \{a, b\}$; uspořádáme-li body této množiny podle velikosti, dostaneme jisté dělení

$$\mathcal{V} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b \tag{2}$$

intervalu I, kde $p \in \mathbb{N}$; případ $p = 1$ odpovídá situaci, kdy funkce f má nenulovou derivaci všude v (a, b). Z definice dělení $\mathcal{V}$ ihned plyne, že derivace f' existuje a je nenulová v každém bodě každého intervalu (x_{k-1}, x_k), $1 \le k \le p$. Podle V.7.4 je f proto v každém intervalu $I_k := \langle x_{k-1}, x_k\rangle \cap I$ ryze monotónní a podle V.7.5 existují tedy limity $y_0 := f(a+)$, $y_p := f(b-)$. Pokud některý z bodů a, b leží v I, je příslušná limita rovna hodnotě v tomto bodě. Označíme-li ještě $y_k := f(x_k)$ pro každé $k = 1, \ldots, p-1$, platí zřejmě tyto implikace:

$$\textit{Je-li} \ \begin{Bmatrix} y_{k-1} < y_k \\ y_{k-1} > y_k \end{Bmatrix}, \ \textit{je } f \ \begin{Bmatrix} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \end{Bmatrix} \ \text{v } I_k. \tag{3}$$

Intervaly ryzí monotonie funkce f jsme tedy našli bez řešení nerovnic $f(x) \gtrless 0$. *Maximální* takové intervaly získáme případným spojováním sousedních intervalů: *Je-li f rostoucí (klesající) v I_k i v I_{k+1}, je rostoucí (klesající) v intervalu $I_k \cup I_{k+1}$.*

Vzhledem k ryzí monotonii funkce f v každém intervalu I_k je zřejmé, že *funkce f nemá extrém v žádném bodě žádného otevřeného intervalu (x_{k-1}, x_k) dělení $\mathcal{V}$; může tedy mít extrém jen v některém z bodů x_k*, tedy buď v některém krajním

[5]) I když mnoho funkcí tento předpoklad splňuje, existují i zcela jednoduché funkce, u nichž tomu tak není. (Příklad: Funkce konstantní nebo např. sinus a kosinus mají v $\mathbb{R}$ nekonečně mnoho stacionárních bodů.) Algoritmus lze snadno zobecnit na případ, kdy množina N je sice nekonečná, ale nemá v (a, b) žádný *hromadný bod*, tj. kdy každý bod $x \in (a, b)$ má okolí $P(x)$, jehož průnik s N je prázdný. (Příklad: $\mathbb{Z}$ nemá v $\mathbb{R}$ žádný hromadný bod.) Kromě toho lze někdy při vyšetřování průběhu funkcí (např. funkcí sinus a kosinus) využít jejich periodicity; v intervalech, jejichž délka se rovná periodě dané funkce, je náš předpoklad mnohdy již splněn. Vyšetření průběhu funkcí, které předpoklad (ani s uvedenými výhradami) nesplňují, může být značně obtížné, ne-li nemožné.

bodě intervalu I (pokud do I patří), nebo v některém stacionárním bodě $x \in (a, b)$, nebo v některém bodě $x \in (a, b)$, v němž nemá derivaci. [6])

Jistě je také zřejmé, že

$$m := \min\{\, y_k \,;\; 0 \le k \le p \,\} = \inf f(I)\,, \quad M := \max\{\, y_k \,;\; 0 \le k \le p \,\} = \sup f(I)\,.$$

Dále: *Je-li pro některé* $k = 0, \dots, p$ *zároveň* $x_k \in I$ a $f(x_k) = m$ (*resp.* $= M$), *nabývá* f *v bodě* x_k *svého minima* (*resp. maxima*); *pokud takové* k *neexistuje, minimum* (*maximum*) *neexistuje.*

Jak je patrné, *lokální extrémy jsme nikde nepotřebovali*; k jejich nalezení se tradičně užívají derivace vyšších řádů, bez nichž se tedy zatím také obejdeme.

Porovnejme ještě naše výsledky s výsledky tradiční metody. Výrok, že funkce f má v bodě $x_k \in (a, b)$ (ostré) lokální maximum, znamená, že *existuje* $\delta > 0$ tak, že $x \in P(x_k, \delta) \Rightarrow f(x) < f(k_k)$, takže $f(x_k)$ je největší ze všech hodnot, kterých funkce f nabývá v příslušném $U(x_k, \delta)$; *velikost čísla* δ *zůstává ovšem neznámá.* Zde jsme na rozdíl od toho dospěli k těmto závěrům: Je-li $y_{k-1} < y_k > y_{k+1}$ (takže funkce f v intervalu I_k roste, v intervalu I_{k+1} klesá), je hodnota $f(x_k)$ největší ze všech hodnot, kterých f nabývá v intervalu $I_k \cup I_{k+1}$.

Čtenář jistě sám posoudí, která z těchto dvou informací je konkrétnější. Nelogické spojování lokálních extrémů se zjišťováním průběhu funkce je historicky přežité, zbytečné a matoucí; podle Occamovy břitvy mělo být již dávno opuštěno.

Podstatné je nalezení všech stacionárních bodů a bodů, v nichž daná funkce nemá derivaci; tyto dvě kategorie bodů jsou důležité nejen z hlediska problematiky této kapitoly, ale i v mnohých aplikacích analýzy v jiných vědních disciplínách. Někdy se jim říká „*výjimečné body*“ – proto jsme dělení (2) označili písmenem $\mathcal{V}$ (skriptové „V“); jsou-li důležité hodnoty i v jiných bodech, často je k $\mathcal{V}$ přidáváme.

Příklad 7.1. Funkce

$$f(x) := 5 \sin x \cos^3 x \tag{4}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$ a lichá; protože je π-periodická, stačí vyšetřit ji např. v intervalu $I := \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Její derivace

$$f'(x) = 5 \cos^2 x \,(\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \tag{4'}$$

existuje všude v $\mathbb{R}$ a anuluje se v bodě $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, právě když je $x = \pm\frac{1}{6}\pi$.

---

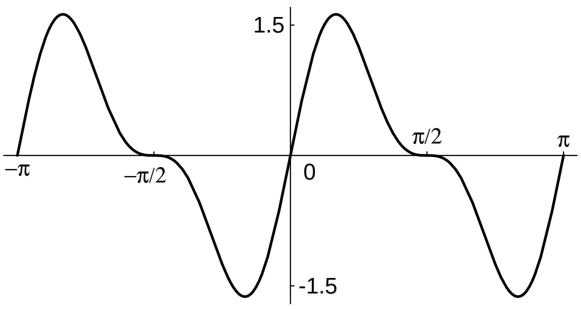
[6]) Pozoruhodně často slyšíme zdánlivě moudrý výrok typu: „Je-li $f'(c) = 0$, může mít f v bodě c extrém.“ Kritický čtenář, který váží význam každého slova, ihned vidí, že tento výrok je z logického hlediska *zcela triviální a bezobsažný*, protože slovo „může“, k němuž můžeme přidat „ale nemusí“, naznačuje, že cosi buď nastane, nebo nenastane. K tomu však, abychom mohli tvrdit, že jakýsi výrok W buď platí, nebo neplatí, *nepotřebujeme žádné předpoklady*, neboť jde o jeden ze základních zákonů běžné logiky. Stejnou (nulovou) „cenu“ jako citovaný výrok má tedy např. výrok, že „funkce f může mít extrém v každém bodě svého definičního oboru“. Naproti tomu výrok, že „*funkce diferencovatelná v každém bodě otevřeného intervalu* (a, b) *může mít extrém jen v některém svém stacionárním bodě*“, má značnou informační hodnotu. Jak je patrné, jde „jen o maličkost“ – jen o slůvko „jen“.

V následující tabulce jsou přehledně uvedeny základní informace; v první řádce jsou vypsány všechny výjimečné body, pod nimi jsou ve druhé řádce příslušné hodnoty funkce f, přičemž $a := 15\sqrt{3}/16 \doteq 1.6238$.

$$\begin{array}{lcccc} \mathcal{V}: & -\frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{6}\pi & \frac{1}{6}\pi & \frac{1}{2}\pi \\ f: & 0 & -a & a & 0 \end{array}$$

Podle V.7.4 je f ryze monotónní v každém uzavřeném intervalu dělení $\mathcal{V}$. Klesá v $\langle -\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi \rangle$ a v $\langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, protože $f(-\frac{1}{2}\pi) = 0 > -a = f(-\frac{1}{6}\pi)$ a $f(\frac{1}{6}\pi) = a > 0 = f(\frac{1}{2}\pi)$; roste v $\langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi \rangle$, protože $f(-\frac{1}{6}\pi) = -a < a = f(\frac{1}{6}\pi)$. Vzhledem k tomu, že f je π-periodická funkce, klesá i v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle$. Z toho plyne, že jedním z maximálních intervalů obsažených v $\mathbb{R}$, v nichž f klesá, je interval $J_0 := \langle \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi \rangle$, a $J_k := \langle (k + \frac{1}{6})\pi, (k + \frac{5}{6})\pi \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou právě všechny maximální intervaly, v nichž f klesá. Analogicky: $K_k := \langle (k - \frac{1}{6})\pi, (k + \frac{1}{6})\pi \rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$, jsou právě všechny maximální intervaly, v nichž f roste.

f nabývá svého maxima a právě ve všech bodech $(k + \frac{1}{6})\pi$, svého minima $-a$ právě ve všech bodech $(k - \frac{1}{6})\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.



Graf funkce f z příkladu 7.1

Příklad 7.2. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $|2x| \le x^2 + 1$, tedy i nerovnosti $-1 \le 2x/(x^2 + 1) \le 1$, je funkce

$$f(x) := \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1} \tag{5}$$

definována v celém $\mathbb{R}$; podle V.5.7 je tam f spojitá. Protože $|2x| = x^2 + 1$, právě když $x = \pm 1$, lze větu o diferencování superpozice aplikovat jen v bodech $x \neq \pm 1$, v nichž pak je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}} \, \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn}(1 - x^2)}{x^2 + 1} \,. \tag{5'}$$

Podle věty V.5.5 je

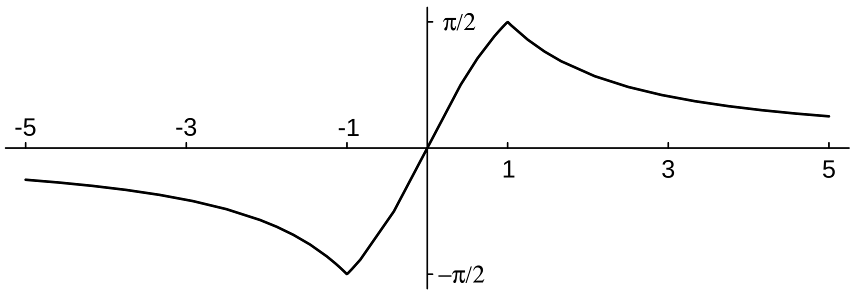
$$f'_{-}(-1) = f'_{+}(1) = -1, \quad f'_{+}(-1) = f'_{-}(1) = 1, \tag{6}$$

což dokazuje, že gr f má v bodech ± 1 hroty.

K výjimečným bodům přidáme tentokrát nulu (a ponecháme označení $\mathcal{V}$), protože rovnost $f(0) = 0$ je důležitá pro správné načrtnutí grafu funkce f.

$\mathcal{V}$:	$-\infty+$	-1	0	1	$+\infty-$
f :	0	$-\frac{1}{2}\pi$	0	$\frac{1}{2}\pi$	0

Jak je patrné, funkce f klesá v intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$, roste v intervalu $\langle -1, 1\rangle$; nabývá svého maxima $\frac{1}{2}\pi$ v bodě $+1$, minima $-\frac{1}{2}\pi$ v bodě -1. Je-li $x \neq \pm 1$, je $-1 < f(x) < 1$. Dodejme ještě, že funkce f je lichá.



Graf funkce f z příkladu 7.2

Příklad 7.3. Funkce

$$f(x) := \operatorname{arccotg} \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right| \tag{7}$$

je definována všude v $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; je sudá a spojitá ve svém definičním oboru rovném sjednocení intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Užijeme-li identitu $|x|' = \operatorname{sgn} x$ platnou pro každé $x \neq 0$ a aplikujeme-li větu o diferencování superpozice, dostaneme po snadné úpravě tento výsledek:

$$0 \neq x \neq \pm 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} \cdot \operatorname{sgn} \frac{x}{x^2 - 1}\,. \tag{7'}$$

Graf f má v bodě 0 hrot, protože podle V.5.5 je

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \mp 1. \tag{8$_1$}$$

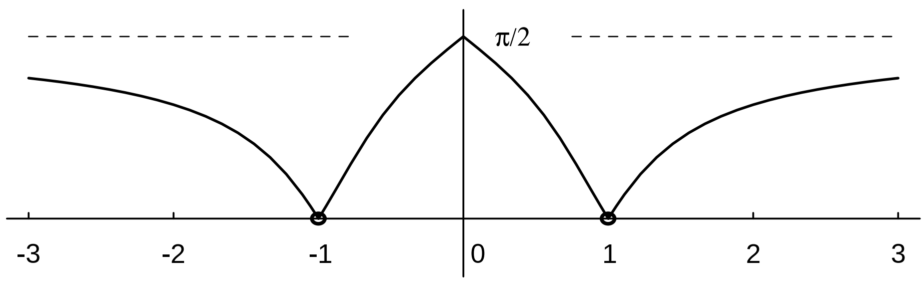
Protože $\lim_{x \to \pm 1} |x/(x^2 - 1)| = +\infty$ a $\operatorname{arccotg}(+\infty-) = 0$, existují limity $f(-1\pm)$, $f(1\pm)$ a rovnají se 0; kromě toho je $f'(\pm 1+) = 2$, $f'(\pm 1-) = -2$. Kdybychom tedy položili $f(\pm 1) := 0$, dostali bychom funkci spojitou v celém $\mathbb{R}$. Její graf by měl v bodech ± 1 hroty, protože by podle V.5.5 platily rovnosti

$$f'_-(\pm 1) = f'(\pm 1-) = -2\,, \quad f'_+(\pm 1) = f'(\pm +) = 2\,. \tag{8_2}$$

My ovšem máme vyšetřit původní funkci f, která v bodech ± 1 definována není (což na grafu vyznačujeme malým prázdným kolečkem). Původní funkce samozřejmě v těchto bodech ani není spojitá, ani v nich nemá jednostranné derivace; rovnosti $f'(\pm 1-) = -2$, $f'(\pm 1+) = 2$ však naznačují, jaký je sklon grafu v blízkosti bodů ± 1. Pro větší přehled vytvoříme ještě tuto tabulku:

$\mathcal{V}$:	$-\infty+$	$-1-$	$-1+$	$0-$	0	$0+$	$1-$	$1+$	$+\infty-$
f :	$\frac{1}{2}\pi$	0	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	0	0	$\frac{1}{2}\pi$
f' :	0	-1	1	1	$-$	-1	-1	1	0

Tabulka ukazuje, že f roste v intervalech $(-1, 0\rangle$, $(1, +\infty)$, klesá v intervalech $(-\infty, -1)$, $\langle 0, 1)$. Má maximum rovné $\frac{1}{2}\pi$ a nabývá je v bodě 0 (a nikde jinde); minimum však nemá, infimum je rovno 0.



Graf funkce f z příkladu 7.3

Příklad 7.4. Funkce

$$f(x) := \operatorname{arctg} \frac{|\lg x|}{\lg x - 1} \tag{9}$$

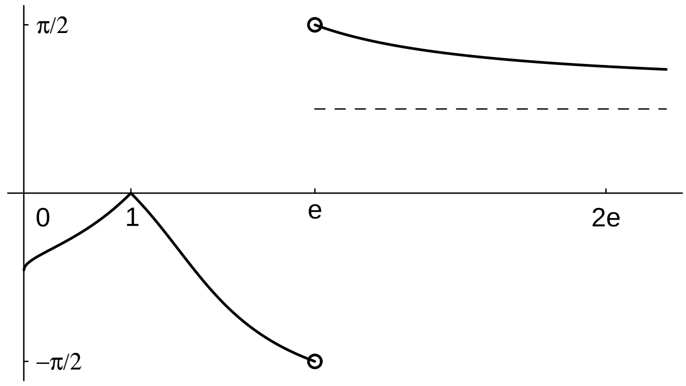
je spojitá ve svém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = (0, e) \cup (e, +\infty)$; diferencovatelná je ve všech bodech $x \in \mathcal{D}(f)$ až snad na bod $x = 1$, v němž nelze aplikovat větu o diferencování superpozice. Je-li $1 \neq x \in \mathcal{D}(f)$, je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \dfrac{\lg^2 x}{(\lg x - 1)^2}} \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\lg x) \cdot x^{-1} \cdot (\lg x - 1) - |\lg x| \cdot x^{-1}}{(\lg x - 1)^2} \\ &= \frac{-\operatorname{sgn}(\lg x)}{x\,(2\lg^2 x - 2\lg x + 1)}\,. \end{aligned} \tag{$9'$}$$

Podle V.5.5 je $f'_{\pm}(1) = \mp 1$, takže graf f má v bodě 1 hrot. Tabulka hodnot a limit vypadá nyní takto:

$\mathcal{V}$	:	$0+$	$1-$	1	$1+$	$e-$	$e+$	$+\infty-$
f	:	$-\frac{1}{4}\pi$	0	0	0	$-\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
f'	:	$+\infty$	1	$-$	-1	$-e^{-1}$	$-e^{-1}$	0

Funkce f roste v intervalu $(0,1\rangle$, klesá v intervalech $\langle 1,e)$, $(e,+\infty)$. Ačkoli je omezená, nemá ani minimum, ani maximum; její infimum resp. supremum je rovno $-\frac{1}{2}\pi$ resp. $\frac{1}{2}\pi$.



Graf funkce f z příkladu 7.4

Příklad 7.5. Funkce

$$f(x) := \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^2}{8x}} \tag{10}$$

je lichá a spojitá ve svém definičním oboru $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, přičemž

$$f(0+) = f(+\infty-) = +\infty, \quad f(0-) = f(-\infty+) = -\infty.$$

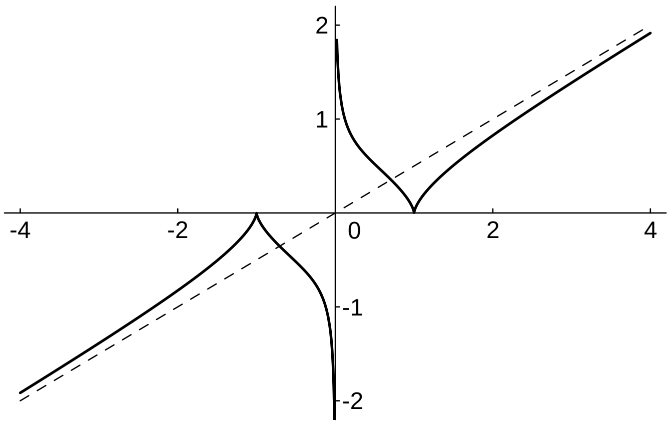
Z toho ihned plyne, že f nemá ani minimum, ani maximum, a že její infimum resp. supremum je rovno $-\infty$ resp. $+\infty$.

Protože funkce $\mathrm{Id}^{1/3}$ je diferencovatelná všude v $\mathbb{R}$ kromě počátku, je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(x^2-1)^2}{x}\right)^{-2/3} \cdot \frac{2\,(x^2-1)\cdot 2x^2 - (x^2-1)^2}{x^2} \\ &= \frac{3x^2+1}{6\sqrt[3]{x^4\,(x^2-1)}} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R} - \{0,\ \pm 1\}. \end{aligned} \tag{10'}$$

Protože je $f' < 0$ v $(0,1)$ a $f' > 0$ v $(1,+\infty)$, funkce f v $(0,1\rangle$ klesá, v $\langle 1,+\infty)$ roste; funkce $f\,|\,\mathbb{R}_+$ má tedy v bodě 1 minimum. Protože f je lichá funkce, plyne z toho, že roste v $(-\infty,-1\rangle$, klesá v $\langle -1,0)$, takže funkce $f\,|\,\mathbb{R}_-$ má v bodě -1 maximum. Protože je $f'_\pm(-1) = \mp\infty$, $f'_\pm(1) = \pm\infty$, má graf f v bodech ± 1 („velmi ostré“) hroty. □

Další příklad bude poněkud obtížnější, ale vysvětlíme v něm užitečnou metodu, pomocí níž se někdy dá zjistit znaménko derivace.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.5

Příklad 7.6. Funkce f definovaná v intervalu $\langle -1,1\rangle$ podmínkami

$$f(x) := \frac{\arcsin x}{x} - 1 \quad \text{pro všechna} \quad x \neq 0, \qquad f(0) := 0, \tag{11}$$

je zřejmě sudá a spojitá v intervalu $\langle -1,1\rangle$. Kromě toho platí:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0, \tag{12_1}$$

$$0 < |\,x\,| < 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}, \quad \text{kde} \quad g(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x. \tag{12_2}$$

Snadno zjistíme, že v $(-1,1)$ je

$$g'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \tag{13}$$

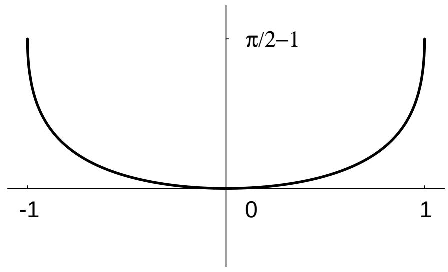
derivace g' je tedy kladná všude v $(-1,1)$ kromě bodu 0, a v důsledku toho g roste jak v $(-1,0\rangle$, tak i v $\langle 0,1)$. Protože $g(0) = 0$, plyne z toho, že je $g < 0$ v $(-1,0)$ a $g > 0$ v $(0,1)$. Vzhledem k (12_2) je tedy i $f' < 0$ v $(-1,0)$ a $f' > 0$ v $(0,1)$; protože f je spojitá v $\langle -1,1\rangle$, plyne z toho, že v $\langle -1,0\rangle$ klesá, v $\langle 0,1\rangle$

roste. Minima rovného 0 nabývá proto v bodě 0, maxima rovného $\frac{1}{2}\pi - 1$ v bodech ± 1. Je-li $0 \neq x \neq \pm 1$, je $0 < f(x) < 1$.

Všimněme si, že jsme ke zjištění znaménka funkce f', která byla (v $(-1, 0)$ i v $(0, 1)$) rozdílem dvou funkcí téhož znaménka, užili jistou pomocnou funkci g. Rozklad v (12_2), pokud měl problém rozřešit, musel být ovšem „správně" zvolen:

1) Znaménko funkce $g(x)$ muselo jednoduchým způsobem souviset se znaménkem funkce $f'(x)$ – v našem případě bylo stejné.

2) Funkci $g(x)$ bylo možné snadno diferencovat a hlavně se ve výsledku již nesměla objevit transcendentní funkce $\arcsin x$, která byla od začátku příčinou všech komplikací. Využili jsme toho, že funkce $\arcsin x$, jejíž hodnoty se jen obtížně srovnávají s hodnotami např. mocnin, má „jednoduchou" derivaci [7]; proto jsme $f'(x)$ rozložili tak, aby $\arcsin x$ byl v $g(x)$ samostatným sčítancem.



GRAF FUNKCE f Z PŘÍKLADU 7.6

* * *

V jednoduchých případech můžeme soubor informací o funkci, jejíž průběh vyšetřujeme, dále rozšířit; zopakujme proto definice několika dobře známých pojmů.

Funkce f definovaná v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se nazývá **ryze konvexní** (v I), platí-li pro každé tři body x, y, z z I implikace

$$x < y < z \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \tag{14}$$

Změníme-li znaménko „$<$" v závěru této implikace na „$\leq$" resp. „$>$" resp. „$\geq$", dostaneme definici funkce **konvexní** resp. **ryze konkávní** resp. **konkávní** (v I).

Poznámka 7.2. Snadno nahlédneme, že implikace (14) je ekvivalentní s implikací

$$x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) + \frac{f(z) - f(x)}{z - x}(y - x). \tag{14*}$$

Ve (14) se porovnávají směrnice sečen grafu f procházejících body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ resp. body $(y, f(y))$ a $(z, f(z))$, zatímco (14*) znamená, že bod $(y, f(y))$ leží pod sečnou procházející body $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$.

[7]) Všimněme si, že podobně je tomu i s derivacemi transcendentních funkcí $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, $\lg(1 \pm x)$, $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$.

Věta 7.6. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a < b$ a nechť funkce $f : I \to \mathbb{R}$, spojitá v I, má derivaci všude v (a, b). Pak platí:*

$$\text{Je-li } f' \left\{ \begin{array}{c} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \end{array} \right\} \text{ v } (a,b), \text{ je } f \left\{ \begin{array}{c} \text{ryze konvexní} \\ \text{konvexní} \\ \text{ryze konkávní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right\} \text{ v } I.$$

Poznámka 7.3. Monotonie resp. ryzí monotonie funkce f' souvisí podle V. 7. 1 se znaménkem f''; platí proto např. toto tvrzení:

(15) *Je-li f spojitá v I a je-li $f'' > 0$ všude v (a, b), je f ryze konvexní v I.*

Z podmínky $f'' > 0$ všude v (a, b) totiž plyne, že f' je v (a, b) rostoucí, což (spolu se spojitostí f v I) má podle V. 7. 6 za následek, že funkce f je v I ryze konvexní.

Z V. 7. 6 je však patrné, že *není pravda* (jak se někdy studenti na školách učí), že k tomu, abychom mohli vyšetřit konvexnost – konkávnost dané funkce, *musíme* najít druhou derivaci; *je-li zřejmá monotonie funkce f', <u>není důvod</u> hledat f''.*

P ř í k l a d : Protože funkce $\lg' x = 1/x$ v $\mathbb{R}_+$ zřejmě klesá, je zbytečné počítat druhou derivaci jen proto, abychom zjistili, že funkce lg je v $\mathbb{R}_+$ ryze konkávní.

Podobně je zcela zbytečné počítat $f''(x)$, je-li např. $f(x) := \operatorname{arctg} x$; její derivace $f'(x) = 1/(x^2 + 1)$ totiž zřejmě klesá v $\langle 0, +\infty)$ a roste v $(-\infty, 0\rangle$. Funkce arctg je tedy v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ ryze konvexní, v intervalu $\langle 0, +\infty)$ ryze konkávní. □

Říkáme, že $a \in \mathbb{R}$ je **inflexní bod** funkce f (nebo: grafu funkce f), existuje-li derivace $f'(a)$ a existuje-li takové $\delta \in \mathbb{R}_+$, že f je v jednom z intervalů $(a - \delta, a\rangle$, $\langle a, a + \delta)$ ryze konvexní, zatímco ve druhém z nich je ryze konkávní.

Poznámka 7.4. Známe-li tedy všechny maximální intervaly, v nichž je daná funkce f ryze konvexní resp. konkávní, známe automaticky i všechny její inflexní body: *Postupujeme-li, jak se názorně říká, po ose* x *zleva doprava, pak tam, kde se mění ryzí konvexnost v ryzí konkávnost, nebo naopak, je inflexní bod.*

Obráceně však: Neznáme-li maximální intervaly konvexnosti – konkávnosti, nebude nám znalost inflexních bodů příliš platná; při kreslení grafu nám nepomůže, protože nebudeme vědět, *v jak velkém* intervalu začínajícím nebo končícím inflexním bodem je funkce konvexní resp. konkávní. Proto nelze nalezení inflexních bodů funkce považovat samo o sobě za přílišné obohacení našich poznatků o dané funkci; v žádném případě *není prioritou* vyšetřování průběhu funkce. □

Říkáme, že přímka popsaná rovnicí $y = Ax + B$ je **asymptota** grafu funkce f **v** $+\infty$, je-li

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = A \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - Ax) = B; \tag{16}$$

napíšeme-li všude $-\infty$ místo $+\infty$, dostaneme definici **asymptoty v** $-\infty$.

Dodatek k příkladu 7.1. Jak snadno ověříme, je druhá derivace funkce (4) rovna

$$f''(x) = 10 \sin x \cos x \,(3 \sin^2 x - 5 \cos^2 x) \tag{17}$$

všude v $\mathbb{R}$; v $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ se anuluje právě ve všech bodech dělení

$$\mathcal{V}_1 : -\tfrac{1}{2}\pi < -A < 0 < A < \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{kde} \quad A := \operatorname{arctg} \sqrt{5/3} \doteq 0.9117.$$

V prvním a ve třetím otevřeném intervalu tohoto dělení je $f'' < 0$, ve druhém a ve čtvrtém intervalu je naopak $f'' > 0$. V prvních dvou jmenovaných intervalech f' klesá, takže f je v příslušných uzavřených intervalech ryze konkávní; ve druhých dvou intervalech je f z podobných důvodů ryze konvexní. Analogicky je tomu v intervalech, které vzniknou z intervalů dělení $\mathcal{V}_1$ posunutím o celé násobky čísla π, periody funkce f. Inflexními body funkce f v $\mathbb{R}$ jsou právě všechny body, které vzniknou z bodů dělení $\mathcal{V}_1$ posunutím o $k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Asymptoty graf funkce f nemá. [8])

Dodatek k příkladu 7.2. Druhou derivaci funkce (5) by bylo zcela zbytečné počítat, protože monotonii její první derivace (5′) lze snadno zjistit bez ní: Protože funkce $1/(1 + x^2)$ klesá v intervalu $\langle 0, +\infty)$, platí totéž o $f'(x)$ v intervalu $(0, 1)$ (kde je $\operatorname{sgn}(1 - x^2) > 0$); v intervalu $(1, +\infty)$ funkce f' naopak roste. Protože f' je sudá funkce, klesá v intervalu $(-\infty, -1)$ a roste v intervalu $(-1, 0)$.

Funkce f je proto ryze konkávní v intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ a ryze konvexní v intervalech $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 1, +\infty)$. Nula je jejím jediným inflexním bodem a rovnosti $f(\pm\infty\mp) = f'(\pm\infty\mp) = 0$ ukazují, že osa x je asymptotou grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

Dodatek k příkladu 7.3. Funkce (7) má druhou derivaci všude v $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ a pro všechna x z této množiny je

$$f''(x) = -\frac{2x\,(x^4 + 2x^2 - 2)}{(x^4 - x^2 + 1)^2} \cdot \operatorname{sgn} \frac{x}{x^2 - 1}\,. \tag{18}$$

Bikvadratická rovnice $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$ má dva (pro nás nezajímavé) imaginární kořeny a dva reálné kořeny $\pm B$, kde $B := \sqrt{\sqrt{3} - 1} \doteq 0.8556$. V každém otevřeném intervalu dělení

$$\mathcal{V}_2 : \; -\infty < -1 < -B < 0 < B < 1 < +\infty$$

je $\operatorname{sgn} f''$ konstantní. V prvním, třetím, čtvrtém a šestém z nich je f'' záporná, ve druhém a v pátém intervalu kladná. Funkce f je proto ryze konkávní v intervalech $(-\infty, -1)$, $\langle -B, 0\rangle$, $\langle 0, B\rangle$, $(1, +\infty)$ a ryze konvexní v intervalech $(-1, -B\rangle$, $\langle B, 1)$; $\pm B$ jsou její jediné inflexní body. [9]) Protože je $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}\pi$ a $f'(\pm\infty\mp) = 0$, je vodorovná přímka $y = \frac{1}{2}\pi$ asymptotou grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

---

[8]) Obecněji platí: *Graf žádné nekonstantní periodické funkce nemá asymptoty.*

[9]) Při pohledu na graf lze konvexitu v intervalech $(-1, -B\rangle$ a $\langle B, 1)$ snadno přehlédnout a dojít k závěru, že f je ryze konkávní v celém intervalu $(-1, 1)$. Podobné situace dokumentují, proč je tak nutné při výuce matematiky neustále zdůrazňovat *rozdíl mezi obrázkem a důkazem.*

Příklad funkce $|\sin x|$, která je ryze konkávní v $\langle -\pi, 0\rangle$ i v $\langle 0, \pi\rangle$, ale není konkávní v $\langle -\pi, \pi\rangle$, ukazuje, že žádné obecné tvrzení typu *„Je-li f konkávní v intervalech $\langle a, b\rangle$ a $\langle b, c\rangle$, je konkávní i v intervalu $\langle a, c\rangle$"* neplatí.

V našem případě však třetí a čtvrtý interval dělení $\mathcal{V}_2$ spojit lze – funkce f je ryze konkávní v celém intervalu $\langle -B, B\rangle$. Abychom pro každou trojici bodů $x < y < z$ z intervalu $\langle -B, B\rangle$ dokázali nerovnost

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\,, \tag{19}$$

rozlišujme několik případů: Je-li $z \le 0$ nebo $x \ge 0$, plyne (19) z ryzí konkávnosti funkce f v $\langle -B, 0\rangle$ resp. v $\langle 0, B\rangle$. Je-li $x < y \le 0 < z$, platí z téhož důvodu nerovnost $(f(y)-f(x))/(y-x) \ge (f(0)-f(x))/(0-x)$; protože je navíc $f(0) > f(z)$ a $0 < 0-x < z-x$, je $(f(0)-f(x))/(0-x) > (f(z)-f(x))/(z-x)$, takže nerovnost (19) opět platí. Podobně je tomu v případě, že $x < 0 \le y < z$.

Dodatek k příkladu 7.4. Funkce (9) má druhou derivaci všude v $\mathbb{R}_+ - \{1, e\}$, přičemž pro všechna x z této množiny je

$$f''(x) = \frac{2\lg^2 x + 2\lg x - 1}{x^2\,(2\lg^2 x - 2\lg x + 1)^2} \cdot \operatorname{sgn}(\lg x)\,. \tag{20}$$

Protože rovnice $2y^2+2y-1 = 0$ má kořeny $c := -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$ a $d := \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$, má rovnice $f''(x) = 0$ kořeny $C := \exp c \doteq 0.255$ a $D := \exp d \doteq 1.442$. V intervalech $(C, 1)$, (D, e), $(e, +\infty)$ je derivace f'' kladná, v intervalech $(0, C)$, $(1, D)$ záporná. Z toho plyne, že f je ryze konvexní v intervalech $\langle C, 1\rangle$, $\langle D, e)$, $(e, +\infty)$, ryze konkávní v intervalech $(0, C\rangle$, $\langle 1, D\rangle$; C a D jsou její (jediné) inflexní body.

Protože je $f(+\infty-) = \frac{1}{4}\pi$ a $f'(+\infty-) = 0$, je vodorovná přímka $y = \frac{1}{4}\pi$ asymptotou grafu f v $+\infty$.

Dodatek k příkladu 7.5. Druhá derivace

$$f''(x) = \frac{2\,(1 - 3x^2)}{9\sqrt[3]{x^7(1 - x^2)^4}} \tag{21}$$

funkce (10) existuje všude v $\mathbb{R}$ až na body ± 1 a 0, je kladná v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, -\alpha)$, $(0, \alpha)$, kde $\alpha := 1/\sqrt{3} \doteq 0.57735$, záporná v intervalech $(-\alpha, 0)$, $(\alpha, 1)$, $(1, +\infty)$. V důsledku toho je funkce f ryze konvexní v intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle -1, -\alpha\rangle$, $(0, \alpha\rangle$, ryze konkávní v intervalech $\langle -\alpha, 0)$, $\langle \alpha, 1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$, není však konvexní v $(-\infty, -\alpha\rangle$ ani konkávní v $\langle \alpha, +\infty)$; graf f má dva inflexní body $\pm\alpha$.

Protože $f'(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}$ a $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x) = 0$, je přímka $y = \frac{1}{2}x$ asymptotou grafu f v $+\infty$ i v $-\infty$.

Dodatek k příkladu 7.6. Druhá derivace funkce (11) je rovna

$$f''(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^2\,(1 - x^2)^{3/2}} + \frac{2\arcsin x}{x^3}\,, \text{ je-li } 0 < |x| < 1\,. \tag{22}$$

Znaménko této derivace v $P(0, \sqrt{2/3})$ není na první pohled patrné, protože první sčítanec je tam záporný, druhý kladný; další komplikací je, že oba sčítance mají v bodě 0 nekonečné limity. Budeme proto postupovat analogicky jako při zjišťování znaménka první derivace: Nechť

$$h(x) := 2 \arcsin x + \frac{(3x^2-2)\,x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \quad \text{pro všechna } x \in (-1,1)\,. \tag{23}$$

Tato pomocná funkce je spojitá v $(-1,1) = U(0,1)$ a v $P(0,1)$ platí relace

$$f''(x) = \frac{h(x)}{x^3}\,, \quad h'(x) = \frac{(2x^2+1)\,x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}} > 0\,. \tag{24}$$

Ze druhé z nich a ze spojitosti funkce h plyne, že h roste v $(-1,1)$; vzhledem k tomu, že $h(0) = 0$, je proto $h < 0$ v $(-1,0)$ a $h > 0$ v $(0,1)$. Odtud a z první identity v (24) vyplývá, že je $f'' > 0$ všude v $P(0,1)$. Funkce f' je zřejmě spojitá v každém bodě $x \in P(0,1)$; vzhledem k (12_1) a vzhledem k rovnostem

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{x^2}\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x\Big) &= \frac{1}{x^2}\big((x + \tfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)) - (x + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3))\big) \\ &= \tfrac{1}{3}x + o(x) \to 0 = f(0) \ \text{ pro } \ x \to 0 \end{aligned}$$

je však f' spojitá i v bodě 0. Ze spojitosti f' v $(-1,1)$, kterou jsme právě ověřili, a z nerovnosti $f'' > 0$ platné všude v $P(0,1)$ ihned vyplývá, že f' roste v celém intervalu $(-1,1)$. V důsledku toho je f ryze konvexní v intervalu $\langle -1,1 \rangle$.

Čtenář si jistě všiml, že pomocnou funkci jsme opět volili tak, aby její derivace neobsahovala výraz $\arcsin x$; tím se podstatná část nelehkého problému vyřešila.

Cvičení

Vyšetřete průběh těchto funkcí, a to včetně konvexnosti a konkávnosti, je-li u čísla příkladu hvězdička:

7.01.* $x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

7.02.* $x^4 - 4x^3$

7.03.* $x^4 - x^2 - 2$

7.04.* $\dfrac{1-2x}{3x^2}$

7.05.* $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

7.06.* $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

7.07. $(x^2)^x$

7.08.* $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+3}$

7.09.* $\dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)$

7.10.* $ex - \lg x$

7.11.* $|x-3| + |x+1|$

7.12.* $|x+4| - |x-2|$

7.13.* $|x^2 - x - 6|$

7.14.* $|x^2 + x - 2| - |x^2 + 2x - 3|$

7.15.* $\sqrt{x^2 + x - 6}$

7.16. $|2x + 1| + |2 - x| - |3x + 5|$

7.17.* $|x| - |x^2 - 1|$

7.18.* $|x^2 + 2x| + |x^2 + 2x - 3| - 2$

7.19.* $|x^2 - 1| - |x^2 - 4|$

7.20. $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

7.21.* $\dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

7.22.* $\sqrt[3]{x^2 - x - 2}$

7.23.* $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$

7.24.* $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}$

7.25.* $\sqrt[3]{(x - 2)^2} - \sqrt[3]{(x + 2)^2}$

7.26. $\sqrt[3]{x - \dfrac{1}{x}}$

7.27.* $x - 2\sqrt[3]{x^2}$

7.28.* $\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x - 2)^4}$

7.29.* $x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$

7.30. $3\,(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{|x^2 - 1|})$

7.31. $3\sqrt[3]{\dfrac{x\,(x + 6)}{x - 2}}$

7.32. $\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}\right)^2}$

7.33.* $\sqrt[3]{x}\, e^{-x}$

7.34. $(2x + 1)\, e^{-|x^2 - 1|}$

7.35. $7x\left(e^{-|x-1|} - e^{-|x+1|}\right)$

7.36. $8\exp\left(-\left|\dfrac{x}{x - 2}\right|\right)$

7.37.* $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

7.38.* $\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

7.39.* $e^{-x} - |e^{-x} - 1|$

7.40.* $e^x - |e^x - e|$

7.41.* $3\,(\cosh x - |\sinh x|)$

7.42. $\sin x + \cos^2 x$

7.43. $\sin^3 x + \cos^3 x$

7.44. $\sin^3 x - |\cos^3 x|$

7.45. $2|\sin x| + |\cos 2x|$

7.46. $\sin 2x + 2|\cos x|$

7.47.* $3|\sin^3 x|$

7.48. $2|\sin x|\cos^3 x$

7.49.* x^x

7.50. $x^{1/x}$

7.51. $\frac{1}{3}(1 + x)^x$

7.52. $(1 + x)^{1/x}$

7.53.* $\lg x \lg(1-x)$

7.54.* $\lg|\lg x|$

7.55. $x^a \lg x \quad (a \in \mathbb{R}_+)$

7.56.* $\frac{1}{2}\lg(1-|x-1|)$

7.57. $\lg(1+|x-x^2|)$

7.58. $\dfrac{\lg^3 x-2}{\lg^2 x+1}$

7.59.* $\lg\dfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^x+1}$

7.60. $\lg\dfrac{3\,e^{2x}+e^x+10}{e^x+1}$

7.61.* $\operatorname{arctg}(\lg x)$

7.62.* $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$

7.63.* $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$

7.64.* $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

7.65.* $x\operatorname{arccotg} x$

7.66.* $x\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$

7.67.* $\frac{1}{2}\arccos(1-\lg^2 x)$

7.68.* $5\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

7.69.* $2\arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

7.70. $\operatorname{arccotg}(\cos x)-\operatorname{arctg}(\sin x)$

7.71. $2\arcsin\dfrac{1-|x^2-1|}{1+|x^2-1|}$

7.72.* $\arcsin\dfrac{2\lg x}{\lg^2 x+1}$

7.73. $\cos\left(\lg\dfrac{1}{x^{10}+1}\right)$

7.74. $\arccos\dfrac{1}{3\lg x}$

7.75.* $\arcsin(x^2-|x^2-1|)$

7.76.* $x+\sqrt{4-x^2}\cdot\arccos\frac{1}{2}x$

7.77.* $\operatorname{arccotg}\dfrac{x}{x^2-1}$

7.78. $2\operatorname{arctg}\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$

7.79.* $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

7.80. $\arccos\dfrac{x^3}{x^6+1}-1$

7.81. $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

7.82. $\arcsin(\sin 2x)$

7.83.* $\arcsin\sqrt{1-\sin^4 x}$

7.84. $\arcsin(1-\sin^4 x)$

7.85. $\arcsin(1-\sin^4 x)^2$

7.86. $\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2-1}$

7.87. $\sin(2\operatorname{arccotg} x)$

7.88.* $\arccos(1-x^2)$

7.89.* $\arccos(1-x^4)$

7.90. $\arccos(1-x^2)^2$

7.91.* $\arccos(1-x)^2$

7.92.* $\arccos(1-x)^4$

7.93*. $f(x) := \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x}$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) := 0$

7.94*. $f(x) := \exp(-x^{-2})$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.95. $f(x) := (x-6)\exp(-x^{-2})$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.96*. $f(x) := x^2 \lg|x|$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.97*. $f(x) := x^2(\lg x^2 - 4)$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.98. $f(x) := \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.99. $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0\,,\ f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7.100. $f(x) := \Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^x$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

Řešení

Řešení každého příkladu je ilustrováno grafem. [10]) Má-li funkce omezený definiční obor a je-li v něm omezená, je graf nakreslen celý; v ostatních případech je zakreslena jen „zajímavá část“ grafu. Tam, kde to poměr vodorovného a svislého rozměru obrázku dovoluje, užíváme stejné měřítko na obou osách; pak jsou správně zobrazeny např. i všechny úhly.

U jednotlivých příkladů jsou uvedeny zpravidla tyto údaje: *Definiční obor* $\mathcal{D}(f)$ příslušné funkce f s případným dodatkem, že funkce f je *sudá*, *lichá* nebo *periodická* ; „p-per.“ znamená, že p je nejmenší kladná perioda dané funkce. Informaci, že f *je spojitá v* $\mathcal{D}(f)$, neuvádíme; v opačném případě jsou však vyjmenovány všechny *body nespojitosti* funkce f. Podobně jako v rozřešených příkladech této kapitoly upozorňujeme na všechny „výjimečné body“. Za značkou K' jsou vypsány všechny *kořeny funkce* f' ; za nimi v závorkách většinou následují i příslušné hodnoty funkce. Nemá-li f' žádné kořeny, množinu K' neuvádíme. *Limity* se značí běžným způsobem, za jednostrannými limitami první derivace je upozornění „(hr.)“, jde-li o *hroty* grafu f. Za značkou $\nearrow$ resp. $\searrow$ následuje seznam maximálních intervalů, v nichž je f *rostoucí* resp. *klesající*. U příkladů označených hvězdičkou jsou za značkou K'' vypsány *kořeny funkce* f'', pokud existují a jsou k vyšetření průběhu potřebné; za značkou $\smile$ resp. $\frown$ následují seznamy maximálních intervalů, v nichž je f *ryze konvexní* resp. *ryze konkávní*. Má-li $\operatorname{gr} f$ *inflexní body*, jsou uvedeny za značkou $\sim$. Má-li $\operatorname{gr} f$ *asymptotu* v $-\infty$ resp. v $+\infty$, napíšeme za symbol „$\mathrm{as}_{-\infty}$:“ resp. „$\mathrm{as}_{+\infty}$:“ příslušnou rovnici; rovnici společné asymptoty v $-\infty$ a v $+\infty$ píšeme za znakem „$\mathrm{as}_{\pm\infty}$:“. V obrázcích vyznačujeme asymptoty tečkovanými linkami.

[10]) Z technických důvodů jsme všechny obrázky umístili na konec této kapitoly.

Řešení každého příkladu obsahuje i hodnoty *infima* a *suprema dané funkce* f *v jejím definičním oboru* $\mathcal{D}(f)$. Je-li toto infimum rovno A, píšeme $\inf = A$, *nemá-li* f *v* $\mathcal{D}(f)$ *minimum*; má-li je, píšeme $\min = A$. Podobně v případě suprema a maxima.

V některých případech se od právě popsaného schématu poněkud odchýlíme. Některé informace, dobře patrné z grafu, nemusí být explicite uvedeny. V komentáři k příkladům mohou být naopak uvedeny i některé další důležité nebo zajímavé skutečnosti.

Příklad. Řešení příkladu 7.5 bychom zapsali takto:

7.5. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; lichá; $f(0\pm) = f(\pm\infty\mp) = \pm\infty$; $f'_\pm(-1) = \pm\infty$, $f'_\pm(1) = \mp\infty$ (hr.); $\nearrow : (-\infty, -1\rangle, \langle 1, +\infty)$; $\searrow : \langle -1, 0)$, $(0, 1\rangle$; $K'' : \pm\alpha$, kde $\alpha = \sqrt{1/3} \doteq 0.577$; $\smile : (-\infty, -1\rangle$, $\langle -1, -\alpha\rangle$, $(0, \alpha\rangle$; $\frown : \langle -\alpha, 0)$, $\langle \alpha, 1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$; $\sim : \pm\alpha$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}x$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

* * *

7.01.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : -3, 1$ ($f(-3) = 17$, $f(1) = -15$); $\nearrow : (-\infty, -3\rangle$, $\langle 1, +\infty)$; $\searrow : \langle -3, 1\rangle$; $K'' : -1$; $\smile : \langle -1, +\infty)$; $\frown : (-\infty, -1\rangle$; $\sim : -1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.02.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : 0, 3$ ($f(0) = 0$, $f(3) = -27$); $\nearrow : \langle 3, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, 3\rangle$; $K'' : 0, 2$; $\smile : (-\infty, 0\rangle$, $\langle 2, +\infty)$; $\frown : \langle 0, 2\rangle$; $\sim : 0, 2$; $\min = -27$, $\sup = +\infty$.

7.03.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : x_1 := -1/\sqrt{2}$, 0, $x_2 := 1/\sqrt{2}$ ($f(\pm 1/\sqrt{2}) = -\frac{9}{4}$, $f(0) = -2$); $\nearrow : \langle x_1, 0\rangle$, $\langle x_2, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, x_1\rangle$, $\langle 0, x_2\rangle$; $K'' : \pm x_3$, kde $x_3 := 1/\sqrt{6} \doteq 0.408$; $\smile : (-\infty, -x_3\rangle$, $\langle x_3, +\infty)$; $\frown : \langle -x_3, x_3\rangle$; $\sim : \pm x_3$; $\min = -\frac{9}{4}$, $\sup = +\infty$.

7.04.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; $f(0\pm) = +\infty$; $K' : 1$ ($f(1) = -\frac{1}{3}$); $\nearrow : \mathbb{R}_-$, $\langle 1, +\infty)$; $\searrow : (0, 1\rangle$; $K'' : \frac{3}{2}$; $\smile : \mathbb{R}_-, (0, \frac{3}{2}\rangle$; $\frown : \langle \frac{3}{2}, +\infty)$; $\sim : \frac{3}{2}$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -\frac{1}{3}$, $\sup = +\infty$.

7.05.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : 0$ ($f(0) = -1$); $\nearrow : \langle 0, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, 0\rangle$; $K'' : \pm a$, kde $a = \sqrt{1/3} \doteq 0.577$; $\smile : \langle -a, a\rangle$; $\frown : (-\infty, -a\rangle$, $\langle a, +\infty)$; $\sim : \pm a$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\min = -1, \sup = 1$.

7.06.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; sudá; $K' : 0$ ($f(0) = -1$); $\nearrow : (-\infty, -1)$, $(-1, 0\rangle$; $\searrow : \langle 0, 1)$, $(1, +\infty)$; $\smile : (-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$; $\frown : (-1, 1)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.07. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \pm 1/e \doteq \pm 0.368$ ($f(-1/e) = e^{2/e} \doteq 2.087$, $f(1/e) = e^{-2/e} \doteq 0.479$); $f'(0) = -\infty$; $\nearrow : (-\infty, -1/e\rangle$, $\langle 1/e, +\infty)$; $\searrow : \langle -1/e, 1/e\rangle$; $\mathrm{as}_{-\infty} : y = 0$; $\inf = 0$, $\sup = +\infty$. [11])

---

[11]) Poznamenejme, že $f(x)$ nesmíme přepsat na tvar x^{2x}, protože bychom z definičního oboru vyloučili $\mathbb{R}_-$; je však $f(x) = |x|^{2x}$. Transcendentní rovnice $f''(x) = f(x)\,((\lg x^2 + 2)^2 + 2/x) = 0$ má jediný kořen $\alpha \doteq -0.80790675$, který lze (přibližně) vypočítat vhodnou numerickou metodou; $f(\alpha) \doteq 1.4115$; $\smile : (-\infty, \alpha\rangle$, $(0, +\infty)$; $\frown : \langle \alpha, 0)$; $\sim : \alpha, 0$.

7.08.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; K' : $x_1=-(\sqrt{2}+1)\doteq -2.41, x_2=\sqrt{2}-1\doteq 0.41$ ($f(x_1)=$ max $=1+1/\sqrt{2}\doteq 1.7071$, $f(x_2)=$ min $=1-1/\sqrt{2}\doteq 0.2929$); $\nearrow$: $(-\infty,x_1\rangle$, $\langle x_2,+\infty)$; $\searrow$: $\langle x_1,x_2\rangle$; K'' : $x_3=-(\sqrt{6}+1)\doteq -3.45, -1, x_4=\sqrt{6}-1\doteq 1.45$; $\smile$: $(-\infty,x_3\rangle$, $\langle -1,x_4\rangle$; $\frown$: $\langle x_3,-1\rangle$, $\langle x_4,+\infty)$; $\sim$: x_3, -1, x_4; as$_{\pm\infty}$: $y=1$.

7.09.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$; lichá; K' : ± 1 ($f(\pm 1)=\pm 1$); $\nearrow$: $(-\infty,-1\rangle$, $\langle 1,+\infty)$; $\searrow$: $\langle -1,0)$, $(0,1\rangle$; $\smile$: $\mathbb{R}_+$; $\frown$: $\mathbb{R}_-$; as$_{\pm\infty}$: $y=\frac{1}{2}x$; inf $=-\infty$, sup $=+\infty$.

7.10.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; $f(0+)=f(+\infty-)=+\infty$; K' : $1/e$ ($f(1/e)=2=$ min); $f'(0+)=-\infty$, $f'(+\infty-)=e$; $\nearrow$: $\langle 1/e,+\infty)$; $\searrow$: $(0,1/e\rangle$; $\smile$: $\mathbb{R}_+$; sup $=+\infty$.

7.11.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(x)=-2(x-1)$ pro $x\le -1, f(x)=4$ v $\langle -1,3\rangle, f(x)=2(x-1)$ pro $x\ge 3$; hroty: -1, 3; min $=4$, sup $=+\infty$.

7.12.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(x)=-6$ pro $x\le -4$, $f(x)=2(x+1)$ v $\langle -4,2\rangle$, $f(x)=6$ pro $x\ge 2$; hroty: -4, 2; min $=-6$, max $=6$.

7.13.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; K' : $\frac{1}{2}$ ($f(\frac{1}{2})=\frac{25}{4}$); $f'_\pm(-2)=f'_\pm(3)=\pm 5$ (hr.); $\nearrow$: $\langle -2,\frac{1}{2}\rangle$, $\langle 3,+\infty)$; $\searrow$: $(-\infty,-2\rangle$, $\langle \frac{1}{2},3\rangle$; $\smile$: $(-\infty,-2\rangle$, $\langle 3,+\infty)$; $\frown$: $\langle -2,3\rangle$; min $=0$, sup $=+\infty$.

7.14.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(x)=1-x$ v $(-\infty,-3\rangle\cup\langle 1,+\infty)$, $f(x)=2x^2+3x-5$ v $\langle -3,-2\rangle$, $f(x)=x-1$ v $\langle -2,1\rangle$; hroty: -3, -2, 1; $\smile$: $\langle -3,-2\rangle$; as$_{\pm\infty}$: $y=1-x$.

7.15.* $\mathcal{D}(f)=(-\infty,-3\rangle\cup\langle 2,+\infty)$; $\nearrow$: $\langle 2,+\infty)$; $\searrow$: $(-\infty,-3\rangle$; $f'_-(-3)=-\infty$, $f'_+(2)=+\infty$; $\frown$: $(-\infty,-3\rangle$, $\langle 2,+\infty)$; as$_{-\infty}$: $y=-(x+\frac{1}{2})$, as$_{+\infty}$: $y=x+\frac{1}{2}$; min $=0$, sup $=+\infty$.

7.16. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(x)=6$ v $(-\infty,-\frac{5}{3}\rangle$, $f(x)=-2(3x+2)$ v $\langle -\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\rangle$, $f(x)=-2(x+1)$ v $\langle -\frac{1}{2},2\rangle$, $f(x)=-6$ v $\langle 2,+\infty)$; hroty: $-\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 2.

7.17.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; sudá; $f(x)=1-x-x^2$ v $(-\infty,-1\rangle$, $f(x)=x^2-x-1$ v $\langle -1,0\rangle$, $f(x)=x^2+x-1$ v $\langle 0,1\rangle$, $f(x)=1+x-x^2$ v $\langle 1,+\infty)$; $f'_-(-1)=1$, $f'_+(-1)=-3$, $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$, $f'_-(1)=3$, $f'_+(1)=-1$ (hr.); $\smile$: $\langle -1,1\rangle$; $\frown$: $(-\infty,-1\rangle$, $\langle 1,+\infty)$; inf $=-\infty$, max $=1$.

7.18.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(x)=2x^2+4x-5$, je-li buď $x\le -3$, nebo $x\ge 1$, $f(x)=1$, je-li buď $-3\le x\le -2$, nebo $0\le x\le 1$, $f(x)=1-4x-2x^2$, je-li $-2\le x\le 0$; $f'_+(-3)=f'_-(-2)=f'_+(0)=f'_-(1)=0$, $f'_-(-3)=-8$, $f'_+(-2)=4$, $f'_-(0)=-4$, $f'_+(1)=8$ (hr.); $\smile$: $(-\infty,-3\rangle$, $\langle 1,+\infty)$; $\frown$: $\langle -2,0\rangle$; min $=1$, sup $=+\infty$.

7.19.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; sudá; $f(x)=3$, je-li $|x|\ge 2$, $f(x)=2x^2-5$, je-li $1\le |x|\le 2$, $f(x)=-3$, je-li $|x|\le 1$; $f'_-(-2)=f'_+(-1)=f'_-(1)=f'_+(2)=0$, $f'_+(-2)=-8$, $f'_-(-1)=-4$, $f'_+(1)=4$, $f'_-(2)=8$ (hr.); $\smile$: $\langle -2,-1\rangle$, $\langle 1,2\rangle$; min $=-3$, max $=3$.

7.20.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; lichá; $f(\pm\infty\mp)=\pm 1$; $\nearrow$: $\mathbb{R}$; $\smile$: $(-\infty,0\rangle$; $\frown$: $\langle 0,+\infty)$; $\sim$: 0; as$_{\pm\infty}$: $y=\pm 1$; inf $=-1$, sup $=1$.

7.21.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; K' : $-\frac{1}{2}$ ($f(-\frac{1}{2})=-\sqrt{5}$); $\nearrow$: $\langle -\frac{1}{2},+\infty)$; $\searrow$: $(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$; K'' : $x_1=-\frac{1}{8}(3+\sqrt{41})\doteq -1.175$, $x_2=\frac{1}{8}(-3+\sqrt{41})\doteq 0.425$; $\smile$: $\langle x_1,x_2\rangle$; $\frown$: $(-\infty,x_1\rangle$, $\langle x_2,+\infty)$; $\sim$: x_1, x_2; as$_{\pm\infty}$: $y=\pm 1$; min $=-\sqrt{5}$; sup $=1$.

7.22.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \frac{1}{2}$ $(f(\frac{1}{2}) = -\sqrt[3]{9/4} \doteq -1.3104 = \min)$; $f'(-1) = -\infty$, $f'(2) = +\infty$; $\nearrow : \langle \frac{1}{2}, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, \frac{1}{2}\rangle$; $f'' < 0$ v $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, $f'' > 0$ v $(-1, 2)$; $\smile : \langle -1, 2\rangle$; $\frown : (-\infty, -1\rangle, \langle 2, +\infty)$; $\sup = +\infty$.

7.23.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $K' : 0$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $K'' : 0, \pm 1$; $\smile : (-\infty, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle$; $\frown : \langle -1, 0\rangle, \langle 1, +\infty)$; $\sim : -1,\ 0,\ 1$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = x$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.24.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f'(-1) = f'(1) = +\infty$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $\smile : (-\infty, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle$; $\frown : \langle -1, 0\rangle, \langle 1, +\infty)$; $\sim : -1,\ 0,\ 1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.25.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f'_{\pm}(-2) = \mp\infty$, $f'_{\pm}(2) = \pm\infty$ (hr.) $(f(-2) = -f(2) = 2\sqrt[3]{2} \doteq 2.52)$; $\nearrow : (-\infty, -2\rangle, \langle 2, +\infty)$; $\searrow : \langle -2, 2\rangle$; $\smile : (-\infty, -2\rangle, \langle -2, 0\rangle$; $\frown : \langle 0, 2\rangle, \langle 2, +\infty)$; $\sim : 0$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = f(2)$, $\max = f(-2)$.

7.26. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$; lichá; $f(0\pm) = \mp\infty$; $f'(\pm 1) = +\infty$; $\nearrow : \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.27.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \alpha = 64/27 \doteq 2.370$ $(f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha)$, $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$ (hr.); $\nearrow : (-\infty, 0\rangle, \langle \alpha, +\infty)$; $\searrow : \langle 0, \alpha\rangle$; $\smile : (-\infty, 0\rangle, \langle 0, +\infty)$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.28.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\nearrow : \mathbb{R}$; $K'' : 1$; $f''(0) = +\infty$, $f''(2) = -\infty$; $\smile : (-\infty, 1\rangle$; $\frown : \langle 1, +\infty)$; $\sim : 1$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.29.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : \pm\beta = \pm\sqrt[4]{64/27} \doteq \pm 1.24$ $(f(\pm\beta) = -\frac{16}{9}\sqrt{3} \doteq -3.08 = \min)$; $f'_{\pm}(0) = \mp\infty$ (hr.); $\nearrow : \langle -\beta, 0\rangle, \langle \beta, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, -\beta\rangle, \langle 0, \beta\rangle$; $\smile : (-\infty, 0\rangle, \langle 0, +\infty)$; $\sup = +\infty$.

7.30. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f'_{\pm}(-1) = f'_{\pm}(1) = \mp\infty$, $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$ (hr., $f(\pm 1) = 3$, $f(0) = -3$); $\nearrow : (-\infty, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle$; $\searrow : \langle -1, 0\rangle, \langle 1, +\infty)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -3$, $\max = 3$.

7.31. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $f(2\pm) = \pm\infty$; $K' : -2, 6$ $(f(-2) = 3\sqrt[3]{2} \doteq 3.78$, $f(6) = 3\sqrt[3]{18} \doteq 7.86)$; $f'(-6) = +\infty$, $f'(0) = -\infty$; $\nearrow : (-\infty, -2\rangle, \langle 6, +\infty)$; $\searrow : \langle -2, 2)$, $(2, 6\rangle$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$; $\max f((-\infty, 2)) = f(-2)$, $\min((2, +\infty)) = f(6)$.

7.32. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; sudá; $f(-1\pm) = f(1\pm) = +\infty$; $K' : 0$ $(f(0) = \sqrt[5]{16} \doteq 1.74)$; $f'_{\pm}(-2) = f'_{\pm}(2) = \pm\infty$ (hr.); $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\min = f(\pm 2) = 0$, $\sup = +\infty$.

7.33.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : \frac{1}{3}$ $(f(\frac{1}{3}) = 1/\sqrt[3]{3e} \doteq 0.4968)$; $f'(0) = +\infty$; $K'' : x_1 := \frac{1}{3}(1 - \sqrt{3}) \doteq -0.24402$, $x_2 := \frac{1}{3}(1 + \sqrt{3}) \doteq 0.91068$; $\nearrow : (-\infty, \frac{1}{3}\rangle$; $\searrow : \langle \frac{1}{3}, +\infty)$; $\smile : \langle x_1, 0\rangle, \langle x_2, +\infty)$; $\frown : (-\infty, x_1\rangle, \langle 0, x_2\rangle$; $\sim : x_1,\ 0,\ x_2$; $\mathrm{as}_{+\infty} : y = 0$; $\inf = -\infty$, $\max = f(\frac{1}{3})$.

7.34. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $f'_-(-1) = 0$, $f'_+(-1) = 4$, $f'_-(1) = 8$, $f'_+(1) = -4$ (hr., $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$); $\nearrow : \langle -1, 1\rangle$; $\searrow : (-\infty, -1\rangle, \langle 1, +\infty)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -1$, $\max = 3$.

7.35. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $K' : 0$ $(f(0) = 0)$; $f'_-(-1) = f'_+(1) = 0$, $f'_+(-1) = -14$, $f'_-(1) = 14$ (hr., $f(\pm 1) = 7(1 - e^{-2}) \doteq 6.05$); $\nearrow : (-\infty, -1\rangle, \langle 0, 1\rangle$; $\searrow : \langle -1, 0\rangle, \langle 1, +\infty)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = 0$, $\max = f(\pm 1)$.

7.36. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{2\}$; $f(2\pm)=0$, $f'(2\pm)=0$; $f'_{\pm}(0)=\mp 4$ (hr., $f(0)=8$); $\nearrow:(-\infty,0\rangle$, $(2,+\infty)$; $\searrow:\langle 0,2)$; $\text{as}_{\pm\infty}: y=8/e\doteq 2.943$; $\inf=0$, $\max=f(0)$.

7.37*. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; lichá; $\nearrow:\mathbb{R}$; K'': 0; $\smile:(-\infty,0\rangle$; $\frown:\langle 0,+\infty)$; $\sim:0$; $\text{as}_{-\infty}: y=-1$, $\text{as}_{+\infty}: y=1$; $\inf=-1$, $\sup=1$.

7.38*. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+$; lichá; $f(0\pm)=\pm\infty$; $\searrow:\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$; $\smile:\mathbb{R}_+$; $\frown:\mathbb{R}_-$; $\text{as}_{-\infty}: y=-1$, $\text{as}_{+\infty}: y=1$; $\inf=-\infty$, $\sup=+\infty$.

7.39*. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f\equiv 1$ v $(-\infty,0\rangle$, $f(x)=2e^{-x}-1$ v $\langle 0,+\infty)$; $\searrow:\langle 0,+\infty)$; $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=-2$ (hr.); $\smile:\langle 0,+\infty)$; $\text{as}_{-\infty}: y=1$, $\text{as}_{+\infty}: y=-1$; $\inf=-1$, $\max=1$.

7.40*. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(x)=2e^x-e$ v $(-\infty,1\rangle$, $f\equiv e$ v $\langle 1,+\infty)$; $f'_-(1)=2e$, $f'_+(1)=0$ (hr.); $\nearrow:(-\infty,1\rangle$; $\smile:(-\infty,1\rangle$; $\text{as}_{-\infty}: y=-e$, $\text{as}_{+\infty}: y=e$; $\inf=-e$, $\max=e$.

7.41*. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; sudá; $\nearrow:(-\infty,0\rangle$; $\searrow:\langle 0,+\infty)$; $f'_{\pm}(0)=\mp 3$ (hr., $f(0)=3$); $\smile:(-\infty,0\rangle$, $\langle 0,+\infty)$; $\text{as}_{\pm\infty}: y=0$; $\inf=0$, $\max=3$.

7.42. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; 2π-per.; kořeny f' v $\langle 0,2\pi\rangle:\frac16\pi$, $\frac12\pi$, $\frac56\pi$, $\frac32\pi$, příslušné hodnoty funkce f: $\frac54, 1, \frac54, -1$; $f(0)=f(2\pi)=1$; $\nearrow:\langle 0,\frac16\pi\rangle$, $\langle\frac12\pi,\frac56\pi\rangle$, $\langle\frac32\pi,2\pi\rangle$ (tedy: $\nearrow:\langle-\frac12\pi,\frac16\pi\rangle$); $\searrow:\langle\frac16\pi,\frac12\pi\rangle$, $\langle\frac56\pi,\frac32\pi\rangle$; $\min=-1$, $\max=\frac54$.

7.43. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; 2π-per.; kořeny f' v $\langle 0,2\pi\rangle: 0, \frac14\pi, \frac12\pi, \pi, \frac54\pi, \frac32\pi, 2\pi$, příslušné hodnoty funkce f: $1, \frac12\sqrt2, 1, -1, -\frac12\sqrt2, -1, 1$; $\nearrow:\langle\frac14\pi,\frac12\pi\rangle$, $\langle\pi,\frac54\pi\rangle$, $\langle\frac32\pi,2\pi\rangle$; $\searrow:\langle 0,\frac14\pi\rangle$, $\langle\frac12\pi,\pi\rangle$, $\langle\frac54\pi,\frac32\pi\rangle$; $\min=-1$, $\max=1$.

7.44. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; 2π-per.; kořeny f' v $\langle 0,2\pi\rangle: 0, \frac12\pi, \pi, \frac54\pi, \frac32\pi, \frac74\pi, 2\pi$, příslušné hodnoty funkce f: $-1, 1, -1, -\frac12\sqrt2, -1, -\frac12\sqrt2, -1$; $\nearrow:\langle 0,\frac12\pi\rangle$, $\langle\pi,\frac54\pi\rangle$, $\langle\frac32\pi,\frac74\pi\rangle$; $\searrow:\langle\frac12\pi,\pi\rangle$, $\langle\frac54\pi,\frac32\pi\rangle$, $\langle\frac74\pi,2\pi\rangle$; $\min=-1$, $\max=1$. (Poznámka. Větu o diferencování superpozice nelze užít v bodech x, v nichž je $\cos x=0$, podle V.5.5 však rovnost $f'(x)=3\sin x\cos x\,(\sin x+|\cos x|)$ platí i v těchto bodech.)

7.45. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; π-per.; kořeny f' v $\langle 0,\pi\rangle:\frac16\pi$, $\frac12\pi$, $\frac56\pi$; $f'_{\pm}(0)=f'_{\pm}(\pi)=\mp 2$, $f'_-(\frac14\pi)=\sqrt2-2$, $f'_+(\frac14\pi)=\sqrt2+2$, $f'_-(\frac34\pi)=-\sqrt2-2$, $f'_+(\frac34\pi)=-\sqrt2+2$ (hr.); hodnoty funkce f v bodech 0, $\frac16\pi$, $\frac14\pi$, $\frac12\pi$, $\frac34\pi$, $\frac56\pi$, π jsou 1, $\frac32$, $\sqrt2$, 3, $\sqrt2$, $\frac32$, 1; $\nearrow:\langle 0,\frac16\pi\rangle$, $\langle\frac14\pi,\frac12\pi\rangle$, $\langle\frac34\pi,\frac56\pi\rangle$; $\searrow:\langle\frac16\pi,\frac14\pi\rangle$, $\langle\frac12\pi,\frac34\pi\rangle$, $\langle\frac56\pi,\pi\rangle$; $\min=1$, $\max=3$.

7.46. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; π-per.; (jediný) kořen f' v $\langle 0,\pi\rangle:\frac16\pi$; $f'_-(\frac12\pi)=-4$, $f'_+(\frac12\pi)=0$ (hr.); $f'(0)=f'(\pi)=2$; hodnoty funkce f v bodech 0, $\frac16\pi$, $\frac12\pi$, π jsou 2, $\frac32\sqrt3\doteq 2.598$, 0, 2; maximální intervaly monotonie v $\langle-\frac12\pi,\frac12\pi\rangle$: $\nearrow:\langle-\frac12\pi,\frac16\pi\rangle$; $\searrow:\langle\frac16\pi,\frac12\pi\rangle$; $\min=0$, $\max=\frac32\sqrt3$.

7.47*. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; π-per.; kořeny f' v $\langle 0,\pi\rangle$: 0, $\frac12\pi$, π, příslušné hodnoty funkce f: 0, 3, 0; $\nearrow:\langle 0,\frac12\pi\rangle$; $\searrow:\langle\frac12\pi,\pi\rangle$; $\smile:\langle -b,b\rangle$, $\frown:\langle b,\pi-b\rangle$, kde $b:=\operatorname{arctg}\sqrt2\doteq 0.9553$; $\sim:\pm b$; $\min=0$, $\max=3$. (Poznámka. Větu o diferencování superpozice nelze užít v bodech $x\equiv 0 \bmod \pi$, podle V.5.5 však rovnosti $f'(x)=9\sin x|\sin x|\cos x$, $f''(x)=9|\sin x|(2\cos^2 x-\sin^2 x)$ platí i v nich.)

7.48. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; 2π-per.; kořeny f' v $\langle 0,2\pi)$: $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$; $f'_{\pm}(0)$ $(=f'_{\pm}(2\pi))=\pm 2$, $f'_{\pm}(\pi)=\mp 2$ (hr.); hodnoty funkce f ve výjimečných bodech 0, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, 2π jsou 0, γ, 0, $-\gamma$, 0, $-\gamma$, 0, γ, 0, kde $\gamma:=\frac{3}{8}\sqrt{3}\doteq 0.6495$; $\nearrow$: $\langle 0,\frac{1}{6}\pi\rangle$, $\langle\frac{5}{6}\pi,\pi\rangle$, $\langle\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi\rangle$; $\searrow$: $\langle\frac{1}{6}\pi,\frac{5}{6}\pi\rangle$, $\langle\pi,\frac{7}{6}\pi\rangle$, $\langle\frac{11}{6}\pi,2\pi\rangle$; min $=-\gamma$, max $=\gamma$.

7.49.* $\mathcal{D}(f)=\langle 0,+\infty)$ (v $\mathbb{R}_+$ je $f(x)=\exp(x\lg x), f(0)=0^0=1=f(0+)$); K' : $1/e$ $(f(1/e)=(1/e)^{1/e}\doteq 0.692201)$; $f'_+(0)=f'(0+)=-\infty$; $\nearrow$: $\langle 1/e,+\infty)$; $\searrow$: $\langle 0,1/e\rangle$; $\smile$: $\langle 0,+\infty)$; min $=f(1/e)$, sup $=+\infty$.

7.50. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; K' : e $(f(e)=e^{1/e}\doteq 1.44467)$; $f(x)\to 0$, $f'(x)\to 0$ pro $x\to 0+$; $\nearrow$: $(0,e\rangle$; $\searrow$: $\langle e,+\infty)$; as$_{+\infty}$: $y=1$; inf $=0$, max $=f(e)$. [12])

7.51. $\mathcal{D}(f)=(-1,+\infty)$; $f(-1+)=f(+\infty-)=+\infty$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, protože $f'(x)=f(x)\varphi(x)$, kde $\varphi(x):=x/(x+1)+\lg(1+x)$ v $\mathcal{D}(f)$ roste a splňuje podmínku $\varphi(0)=0$; $\nearrow$: $\langle 0,+\infty)$; $\searrow$: $(-1,0\rangle$; min $=\frac{1}{3}$, sup $=+\infty$.

7.52. $\mathcal{D}(f)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$; $f(0\pm)=e$; je $f'<0$ v $\mathcal{D}(f)$, protože $f'(x)=x^{-2}f(x)\psi(x)$, kde $\psi(x):=x/(1+x)-\lg(1+x)$ v $(-1,+\infty)$, $\psi'(x)=-x/(1+x)^2$, $\psi(0)=0$, takže $\psi<0$ v $\mathcal{D}(f)$; $\searrow$: $(-1,0)$, $\mathbb{R}_+$; as$_{+\infty}$: $y=1$; sup $f((-1,0))=+\infty$, inf $f((-1,0))=\sup f(\mathbb{R}_+)=e$, inf $f(\mathbb{R}_+)=1$. (Poznámka. Položíme-li $f(0):=e$, bude f spojitá, klesající a ryze konvexní v $(-1,+\infty)$, $f'(0)=f'(0\pm)=-2/e$.)

7.53.* $\mathcal{D}(f)=(0,1)$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x=\frac{1}{2}$, $f(0+)=f(1-)=0$; K' : $\frac{1}{2}$ $(f(\frac{1}{2})=\lg^2(\frac{1}{2})\doteq 0.480453)$; $f'(0+)=+\infty$, $f'(1-)=-\infty$; $\nearrow$: $(0,\frac{1}{2}\rangle$; $\searrow$: $\langle\frac{1}{2},1)$; $\frown$: $(0,1)$; inf $=0$, max $=f(\frac{1}{2})$.

7.54.* $\mathcal{D}(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$; $f(0+)=f(+\infty-)=+\infty$, $f(1\pm)=-\infty$, $f(x)=0\Leftrightarrow(x=1/e)\vee(x=e)$; $\nearrow$: $(1,+\infty)$; $\searrow$: $(0,1)$; $\smile$: $(0,1/e\rangle$; $\frown$: $\langle 1/e,1)$, $(1,+\infty)$; $\sim$: $1/e$; inf $=-\infty$, sup $=+\infty$.

7.55. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; $f(0+)=0, f(+\infty-)=+\infty$; K' : $x_a:=e^{-1/a}$ $(f(x_a)=-1/ae)$; $\nearrow$: $\langle x_a,+\infty)$; $\searrow$: $(0,x_a\rangle$; min $=f(x_a)$, sup $=+\infty$. (Na obrázku jsou části grafů funkcí odpovídajících hodnotám $a=\frac{1}{2}k$, kde $1\le k\le 5$.)

7.56.* $\mathcal{D}(f)=(0,2)$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x=1$, $f(0+)=f(2-)=-\infty$; $f'_{\pm}(1)=\mp\frac{1}{2}$ (hr., $f(1)=0$); $\nearrow$: $(0,1\rangle$; $\searrow$: $\langle 1,2)$; $\frown$: $(0,2)$; inf $=-\infty$, max $=0$. [13])

7.57. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x=\frac{1}{2}$; K' : $\frac{1}{2}$ $(f(\frac{1}{2})=\lg\frac{5}{4}\doteq 0.223)$, $f'_{\pm}(0)=f'_{\pm}(1)=\pm 1$ (hr., $f(0)=f(1)=0$); $\nearrow$: $\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$, $\langle 1,+\infty)$; $\searrow$: $(-\infty,0\rangle$, $\langle\frac{1}{2},1\rangle$; min $=0$, sup $=+\infty$.

7.58. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; $f(0+)=-\infty$ $(=\inf)$, $f(+\infty-)=+\infty$ $(=\sup)$, jediný kořen f : $\exp\sqrt[3]{2}\doteq 3.52514$; K' : $1/e,1$ $(f(1/e)=-\frac{3}{2}$, $f(1)=-2)$; $\nearrow$: $(0,1/e\rangle$, $\langle 1,+\infty)$; $\searrow$: $\langle 1/e,1\rangle$.

---

[12]) Řešení bychom mohli doplnit ještě takto: Derivace f'' má v $\mathbb{R}_+$ právě dva kořeny $\alpha<\beta$; numerickým řešením transcendentní rovnice $\lg^2 x+2(x-1)\lg x=3x-1$ lze získat jejich přibližné hodnoty: $\alpha\doteq 0.5819327056$, $\beta\doteq 4.3677709671$. Je $\smile$: $(0,\alpha\rangle$, $\langle\beta,+\infty)$, $\frown$: $\langle\alpha,\beta\rangle$; $\sim$: α, β.

[13]) V Dodatku k Př. 7.3 je vyloženo, jak lze někdy dokázat ryzí konkávnost (a podobně konvexnost), není-li možné užít přímo V. 7.6.

7.59.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $\nearrow:\mathbb{R}$; $\smile:\mathbb{R}$; $\mathrm{as}_{-\infty}: y=0$, $\mathrm{as}_{+\infty}: y=x$; $\inf=0$, $\sup=+\infty$.

7.60. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(-\infty+)=\lg 10\doteq 2.30259$, $f(+\infty-)=+\infty$; $K':0$ $(f(0)=\lg 7\doteq 1.94591)$, $f'(-\infty+)=0$, $f'(+\infty-)=1$; $\nearrow:\langle 0,+\infty)$; $\searrow:(-\infty,0\rangle$; $\mathrm{as}_{-\infty}: y=\lg 10$, $\mathrm{as}_{+\infty}: y=x+\lg 3$ $(\lg 3\doteq 1.0986)$; $\min=f(0)$, $\sup=+\infty$.

7.61.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; $f(0+)=-\frac{1}{2}\pi$, $f'(0+)=+\infty$, $f(+\infty-)=\frac{1}{2}\pi$; $\nearrow:\mathbb{R}_+$; $\frown:\mathbb{R}_+$; $\mathrm{as}_{+\infty}: y=\frac{1}{2}\pi$; $\inf=-\frac{1}{2}\pi$, $\sup=\frac{1}{2}\pi$.

7.62.* $\mathcal{D}(f)=(-1,1)$; sudá; $f(\pm 1\mp)=\frac{1}{2}\pi$; $f'(\pm 1\mp)=\pm\infty$, $f'_\pm(0)=\pm 1$ (hr., $f(0)=0$); $\nearrow:\langle 0,1)$; $\searrow:(-1,0\rangle$; $\smile:(-1,1)$; $\min=0$, $\sup=\frac{1}{2}\pi$.[13]

7.63.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+$; sudá; $f(0\pm)=\pi$; $f'(0\pm)=0$; $\nearrow:\mathbb{R}_-$; $\searrow:\mathbb{R}_+$; $\smile:(-\infty,-a\rangle$, $\langle a,+\infty)$, kde $a:=1/\sqrt[4]{3}\doteq 0.759836$; $\frown:\langle -a,0)$, $(0,a\rangle$; $\sim:\pm a$; $\mathrm{as}_{\pm\infty}: y=0$; $\inf=0$, $\sup=\pi$. (Poznámka. Kdybychom definovali $f(0):=0$, bylo by $f'(0)=0$, f by v bodě 0 měla maximum a byla by ryze konkávní v $\langle -a,a\rangle$.)

7.64.* $\mathcal{D}(f)=\langle -1,1\rangle$; $f'_+(-1)=+\infty$, $f'_-(1)=0$; $\nearrow:\langle -1,1\rangle$; $\frown:\langle -1,1\rangle$; $\min=-\frac{1}{2}\pi$, $\max=\frac{1}{2}\pi$. (Poznámka. $f(x)$ má jediný kořen, jehož přibližná hodnota je -0.67361203.)

7.65.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $f(-\infty+)=-\infty$, $f(+\infty-)=1$; $f'(+\infty-)=0$, $f''<0$, takže $f'>0$ v $\mathbb{R}$; $\nearrow:\mathbb{R}$; $\frown:\mathbb{R}$; $\mathrm{as}_{-\infty}: y=\pi x+1$, $\mathrm{as}_{+\infty}: y=1$; $\inf=-\infty$, $\sup=1$.

7.66.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+$; $f(0\pm)=0$, $f'(0-)=\pi$, $f'(0+)=0$ (kdybychom tedy položili $f(0):=0$, měl by graf v bodě 0 hrot); $\nearrow:\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$; $\smile:\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$; $\mathrm{as}_{\pm\infty}: y=\frac{1}{2}\pi x-1$; $\inf=-\infty$, $\sup=+\infty$.

7.67.* $\mathcal{D}(f)=\langle a,b\rangle$, kde $a:=\exp(-\sqrt{2})\doteq 0.243$, $b=\exp\sqrt{2}\doteq 4.113$; $f'_\pm(1)=\pm 1/\sqrt{2}$ (hr., $f(1)=0$); $f'_+(a)=-\infty$, $f'_-(b)=+\infty$; $\nearrow:\langle 1,b\rangle$; $\searrow:\langle a,1\rangle$; $\smile:\langle a,1\rangle$, $\langle e,b\rangle$; $\frown:\langle 1,e\rangle$; $\sim: e$; $\min=0$, $\max=f(a)=f(b)=\frac{1}{2}\pi$.

7.68.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; graf je symetrický vzhledem k přímce $x=-2$; $f'_\pm(-2)=\mp 5$ (hr., $f(-2)=\frac{5}{2}\pi$); $\nearrow:(-\infty,-2\rangle$; $\searrow:\langle -2,+\infty)$; $\smile:(-\infty,-2\rangle$, $\langle -2,+\infty)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty}: y=0$; $\inf=0$, $\max=\frac{5}{2}\pi$.

7.69.* $\mathcal{D}(f)=\langle 0,+\infty)$; $f(0)=\pi$, $f(+\infty-)=0$; $f'(0+)=-\infty$, $f'(+\infty-)=0$; $\searrow:\langle 0,+\infty)$; $\smile:\langle 0,+\infty)$; $\mathrm{as}_{+\infty}: y=0$; $\inf=0$, $\max=\pi$.

7.70. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; 2π-per.; kořeny f' v $\langle 0,2\pi)$: $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ $(f(\frac{1}{4}\pi)=\frac{1}{2}\pi-2c\doteq 0.339837$, $f(\frac{5}{4}\pi)=\frac{1}{2}\pi+2c)\doteq 2.801756$, kde $c:=\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}\sqrt{2})\doteq 0.6154797)$; $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\ \nearrow:\langle\frac{1}{4}\pi+2k\pi,\frac{5}{4}\pi+2k\pi\rangle$; $\searrow:\langle -\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\frac{1}{4}\pi+2k\pi\rangle$; $\min=f(\frac{1}{4}\pi)$, $\max=f(\frac{5}{4}\pi)$.

7.71. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; sudá; $K':0$; $f'_\pm(-1)=f'_\pm(1)=\mp\infty$ (hr., $f(\pm 1)=\pi$); $\nearrow:(-\infty,-1\rangle$, $\langle 0,1\rangle$; $\searrow:\langle -1,0\rangle$, $\langle 1,+\infty)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty}: y=-\pi$; $\inf=-\pi$, $\max=\pi$.

7.72.* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}_+$; $f(0+)=0$, $f(+\infty-)=0$; $f'(0+)=-\infty$, $f'(+\infty-)=0$; $f'_\pm(1/e)=\pm e$, $f'_\pm(e)=\mp 1/e$ (hr., $f(1/e)=-\frac{1}{2}\pi=\min$, $f(e)=\frac{1}{2}\pi=\max$); $\nearrow:\langle 1/e,e\rangle$; $\searrow:(0,1/e\rangle$, $\langle e,+\infty)$; $\smile:(0,1/e\rangle$, $\langle e,+\infty)$; $\frown:\langle 1/e,e\rangle$; $\mathrm{as}_{+\infty}: y=0$.

7.73. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$; $K': x_0:=0$, $x_{\pm n}:=\pm\sqrt[10]{\exp(|n|\pi)-1}$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ $(x_1\doteq 1.363$, $x_2\doteq 1.874$, $x_3\doteq 2.566$, $x_4\doteq 3.514$, $x_5\doteq 4.810$, $x_6\doteq 6.586$, $x_7\doteq 9.107$, $x_8\doteq 12.345$, $x_9\doteq 16.902$, $x_{10}\doteq 23.141$, $x_{20}\doteq 535.492$, $x_{30}\doteq 12391.6$,

$x_{40} \doteq 286751$, $x_{50} \doteq 6.6356 \cdot 10^6$, $\dots$, $x_n \to +\infty$ pro $n \to \infty$, $f(x_n) = (-1)^n$); $\nearrow : \langle x_{2n-1}, x_{2n} \rangle$; $\searrow : \langle x_{2n}, x_{2n+1} \rangle$; min $= -1$, max $= 1$.

7.74. $\mathcal{D}(f) = (0, 1/a\rangle \cup \langle a, +\infty)$, kde $a := \sqrt[3]{e} \doteq 1.3956$, $1/a \doteq 0.7165$; $f(0+) = \frac{1}{2}\pi$, $f(1/a) = \pi =$ max, $f(a) = 0 =$ min, $f(+\infty-) = \frac{1}{2}\pi$; $f'(0+) = f'_-(1/a) = f'_+(a) = +\infty$; $\nearrow : (0, 1/a\rangle$, $\langle a, +\infty)$; as$_{+\infty}$: $y = \frac{1}{2}\pi$.

7.75*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $|x| \geq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\pi$ $=$ max; $0 < |x| < 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \operatorname{sgn} x / \sqrt{1 - x^2}$; $f'_-(-1) = f'_+(1) = 0$, $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, $f'_\pm(0) = \pm 2$ (hr.); $\nearrow : \langle 0, 1\rangle$; $\searrow : \langle -1, 0\rangle$; $\smile : \langle -1, 1\rangle$; as$_{\pm\infty}$: $y = \frac{1}{2}\pi$; min $= f(0) = -\frac{1}{2}\pi$. [13])

7.76*. $\mathcal{D}(f) = \langle -2, 2\rangle$; $K' : 0$ ($f(0) = \pi =$ max), $f'_+(-2) = +\infty$, $f'_-(2) = -1$; $\nearrow : \langle -2, 0\rangle$; $\searrow : \langle 0, 2\rangle$; $\frown : \langle -2, 2\rangle$ (Návod: $f''(x) = g(x)(4 - x^2)^{-3/2}$, kde $g(x) := x\sqrt{4 - x^2} - 4 \arccos \frac{1}{2}x$ roste v $\langle -2, 2\rangle$, protože $g'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} > 0$ v $(-2, 2)$; protože $g(2) = 0$, je $g < 0$ a $f'' < 0$ v $(-2, 2)$.); min $= f(-2) = -2$.

7.77*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; $f(\pm 1-) = \pi$, $f(\pm 1+) = 0$, $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}\pi$; f' je sudá, $f'(-1\pm) = f'(1\pm) = 2$; $\nearrow : (-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$; $\smile : (-\infty, -1)$, $(-1, -a\rangle$, $\langle 0, a\rangle$; $\frown : \langle -a, 0\rangle$, $\langle a, 1)$, $(1, +\infty)$, kde $a := (\sqrt{3} - 1)^{1/2} \doteq 0.8556$; $\sim : \pm a, 0$; as$_{\pm\infty}$: $y = \frac{1}{2}\pi$; inf $= 0$, sup $= \pi$. [14])

7.78. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; sudá; $f(-1\pm) = f(1\pm) = \pi$, $f(\pm\infty\mp) = 0$; $f'_\pm(0) = \pm 2$ (hr.), $f'(\pm 1-) = 4$, $f'(\pm 1+) = -4$; $\nearrow : (-\infty, -1)$, $\langle 0, 1)$; $\searrow : (-1, 0\rangle$, $(1, +\infty)$; as$_{\pm\infty}$: $y = 0$; min $= 0$, sup $= \pi$.

7.79*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f'_\pm(0) = \pm 2$ (hr., $f(0) = 0$); $\nearrow : \langle 0, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, 0\rangle$; $\frown : (-\infty, 0\rangle$, $\langle 0, +\infty)$); as$_{\pm\infty}$: $y = \pi$; min $= 0$, sup $= \pi$. ($f(x) = 2|\operatorname{arctg} x|$.)

7.80. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $K' : -1, 0, 1$ ($f(-1) = \frac{2}{3}\pi - 1$, $f(0) = \frac{1}{2}\pi - 1$, $f(1) = \frac{1}{3}\pi - 1$); $\nearrow : (-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$; $\searrow : \langle -1, 1\rangle$; as$_{\pm\infty}$: $y = \frac{1}{2}\pi - 1$; min $= f(1)$, max $= f(-1)$.

7.81. $\mathcal{D}(f) = (-1, 1)$; $f(-1+) = +\infty$, $f(0) = \frac{1}{2}\pi$, $f(1-) = 1$; $|x| < 1 \Rightarrow f'(x) = \varphi(x)(1 - x^2)^{-3/2}$, kde $\varphi(x) := x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$ v $\langle -1, 1\rangle$, $\varphi'(x) = \arccos x > 0$ v $(-1, 1)$, $\varphi(1) = 0$, takže $\varphi(x) < 0$ a $f'(x) < 0$ v $(-1, 1)$; např. substitucí $x = \cos y$ zjistíme, že $f'(1-) = -\frac{1}{3}$; $\searrow : (-1, 1)$; inf $= 0$, sup $= +\infty$.

7.82. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π-per., lichá; lineární se směrnicí $+2$ resp. -2 v každém intervalu $\langle a_{2k-1}, a_{2k}\rangle$ resp. $\langle a_{2k}, a_{2k+1}\rangle$, kde $a_k := \frac{1}{4}(2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; všechny body a_k jsou hroty grafu; $f(a_{2k-1}) = -\frac{1}{2}\pi =$ min, $f(a_{2k}) = \frac{1}{2}\pi =$ max.

7.83*. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π-per., sudá; $K' : k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(k\pi) = \frac{1}{2}\pi =$ max; body $b_k := \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$ jsou hroty, $f'_\pm(b_k) = \pm\sqrt{2}$, $f(b_k) = 0 =$ min; $\nearrow : \langle b_{k-1}, k\pi\rangle$; $\searrow : \langle k\pi, b_k\rangle$; $\frown : \langle b_k, b_{k+1}\rangle$.

---

14) Sr. s podobným Př. 7.5. Někteří studenti derivují bohužel formálně, tj. *bez ověření příslušných předpokladů*, a z toho, kde takto získaný výsledek má smysl, teprve dodatečně usuzují, kde platí. (Nejznámějším příkladem této *zvrácené logiky* je rovnost $(\lg(\lg(\sin x)))' = \operatorname{cotg} x / \lg(\sin x)$, kterou lze získat i na počítači a jejíž pravá strana má smysl ve sjednocení intervalů $(2k\pi, (2k{+}1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, levá strana nikde.) Podle této pseudometody by zde bylo $f'(x) = (x^2 + 1)/(x^4 - x^2 + 1)$ všude v $\mathbb{R}$, tedy i v bodech ± 1, kde f nejen není definována, ale kde ji ani nelze spojitě dodefinovat. Hloubavému čtenáři doporučujeme zamyslit se nad vztahem $f(x)$ k funkci $g(x) := \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3})$, jejíž derivace je rovna $(x^2 + 1)/(x^4 - x^2 + 1)$ opravdu v celém $\mathbb{R}$.

7.84. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; π-per., sudá; $K' : c_k := \frac{1}{2}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($f(c_{2k}) = \frac{1}{2}\pi = \max$, $f(c_{2k+1}) = 0 = \min$); na rozdíl od Př. 7.83 *nemá graf hroty*, v bodech $k\pi$ však *nelze užít větu o diferencování superpozice*; $\nearrow : \langle c_{2k-1}, c_{2k}\rangle$; $\searrow : \langle c_{2k}, c_{2k+1}\rangle$. (Je $f(x) = 2(x - c_{2k+1})^2 + o((x - c_{2k+1})^2)$ pro $x \to c_{2k+1}$.)

7.85. Jako v Př. 7.84, ale graf f se nyní v bodech c_{2k+1} „více přimyká“ k ose x. (Je $f(x) = 4(x - c_{2k+1})^4 + o((x - c_{2k+1})^4)$ pro $x \to c_{2k+1}$.)

7.86. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; sudá; $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{2}\pi$; $K' : 0$ ($f(0) = -\frac{1}{4}\pi$), $f'(\pm 1) = \pm\infty$; $\nearrow : \langle 0, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, 0\rangle$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{2}\pi$; $\min = -\frac{1}{4}\pi$, $\sup = \frac{1}{2}\pi$.

7.87. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; lichá; $f(\pm\infty\mp) = 0$; $K' : \pm 1$ ($f(\pm 1) = \pm 1$); $\nearrow : \langle -1, 1\rangle$; $\searrow : (-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 0$; $\min = -1$, $\max = 1$.

7.88.* $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\rangle$; sudá; $f'_{\pm}(0) = \pm\sqrt{2}$ (hr., $f(0) = 0$), $f'_{+}(-\sqrt{2}) = -\infty$, $f'_{-}(\sqrt{2}) = +\infty$; $\nearrow : \langle 0, \sqrt{2}\,\rangle$; $\searrow : \langle -\sqrt{2}, 0\rangle$; $\smile : \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\rangle$; $\min = 0$, $\max = f(\pm\sqrt{2}) = \pi$.[13]

7.89.* $\mathcal{D}(f) = \langle -a, a\rangle$, kde $a := \sqrt[4]{2} \doteq 1.1892$; sudá; $K' : 0$, *větu o diferencování superpozice nelze v bodě* 0 *užít*, na rozdíl od Př. 7.88 tam graf *nemá hrot*; $f'_{+}(-a) = -\infty$, $f'_{-}(a) = +\infty$; $\nearrow : \langle 0, a\rangle$; $\searrow : \langle -a, 0\rangle$; $\smile : \langle -a, a\rangle$; $\min = 0$, $\max = \pi$.

7.90. $\mathcal{D}(f) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\rangle$; sudá; $K' : \pm 1$ ($f(\pm 1) = \frac{1}{2}\pi = \max$); $f'_{\pm}(0) = \pm 2$ (hr., $f(0) = 0 = \min$); $f'_{+}(-\sqrt{2}) = +\infty$, $f'_{-}(\sqrt{2}) = -\infty$ ($f(\pm\sqrt{2}\,) = 0 = \min$); $\nearrow : \langle -\sqrt{2}, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$; $\searrow : \langle -1, 0\rangle$, $\langle 1, \sqrt{2}\rangle$.

7.91.* $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 2\rangle$; graf f je symetrický vzhledem k přímce $x = 1$, $f(0) = f(2) = 0 = \min$; $K' : 1$ ($f(1) = \frac{1}{2}\pi = \max$); $f'_{+}(0) = +\infty$, $f'_{-}(2) = -\infty$; $\nearrow : \langle 0, 1\rangle$; $\searrow : \langle 1, 2\rangle$; $\frown : \langle 0, 2\rangle$. (Je $f(x) = \frac{1}{2}\pi - (x-1)^2 + o((x-1)^2)$ pro $x \to 1$.)

7.92.* Jako v Př. 7.91, graf f se však nyní „více přimyká“ k tečně v bodě 1. (Je $f(x) = \frac{1}{2}\pi - (x-1)^4 + o((x-1)^4)$ pro $x \to 1$.)

7.93.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; f není spojitá v bodě 0, $f(0-) = \frac{1}{2}\pi$, $f(0+) = -\frac{1}{2}\pi$, $f'(0) = -\infty$, ale $f'(0\pm) = 1$; $f(\pm\infty\mp) = \frac{1}{4}\pi$; $\nearrow : \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_+$; $\smile : \mathbb{R}_-$, $(0, \frac{1}{2}\rangle$; $\frown : \langle \frac{1}{2}, +\infty)$; $\sim : \frac{1}{2}$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = \frac{1}{4}\pi$; $\inf = -\frac{1}{2}\pi$, $\sup = \frac{1}{2}\pi$.

7.94.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = 1$; $K' : 0$; $\nearrow : \langle 0, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, 0\rangle$; $\smile : \langle -\alpha, \alpha\rangle$, kde $\alpha := \sqrt{2/3} \doteq 0.8165$; $\frown : (-\infty, -\alpha\rangle$, $\langle \alpha, +\infty)$; $\sim : \pm\alpha$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = 1$; $\min = 0$, $\sup = 1$. (Poznámka. Je $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(0\pm) = 0$ pro všechna $k \geq 0$, takže se graf f přimyká k ose x lépe než graf kterékoli mocniny x^k; všechny Taylorovy polynomy funkce f o středu 0 jsou (identicky) nulové.)

7.95. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); $f^{(k)}(0)$ jako v Př. 7.94, nyní však $K' : 0, 2$ ($f(2) = -4e^{-1/4} \doteq -3.1152$); $\nearrow : (-\infty, 0\rangle$, $\langle 2, +\infty)$; $\searrow : \langle 0, 2\rangle$; $\mathrm{as}_{\pm\infty} : y = x - 6$; $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$.

7.96.* $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ ($f(0) = 0$); sudá; $f(\pm\infty\mp) = +\infty$; $K' : 0$, $\pm\alpha$, kde $\alpha := e^{-1/2} \doteq 0.6065$ ($f(\pm\alpha) = -1/2e \doteq -0.1839$); $\nearrow : \langle -\alpha, 0\rangle$, $\langle \alpha, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, -\alpha\rangle$, $\langle 0, \alpha\rangle$; $\smile : (-\infty, -\beta\rangle$, $\langle \beta, +\infty)$, kde $\beta := e^{-3/2} \doteq 0.2231$; $\frown : \langle -\beta, \beta\rangle$; $\sim : \pm\beta$; $\min = -1/2e$, $\sup = +\infty$.

7.97* $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\ (f(0)=0)$; sudá; $f(\pm\infty\mp)=+\infty$; K' : $0, \pm\gamma$, kde $\gamma := e^{3/2} \doteq 4.4817$; $\nearrow : \langle -\gamma, 0\rangle$, $\langle \gamma, +\infty)$; $\searrow : (-\infty, -\gamma\rangle$, $\langle 0, \gamma\rangle$; K'' : $\pm\delta$, kde $\delta := \sqrt{e} \doteq 1.6487$; $\smile$: $(-\infty, -\delta\rangle$, $\langle \delta, +\infty)$; $\frown$: $\langle \delta, \delta\rangle$; $\sim$: $\pm\delta$; $\min = f(\pm\gamma) = -e^3 \doteq -20.0855$, $\sup = +\infty$. (Poznámka. $f''(0) = -\infty$.)

7.98. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\ (f(0)=1)$; sudá; $f(\pm\infty\mp)=0$; $x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=g(x)/x^2$, kde $g(x) := x/(x^2+1) - \operatorname{arctg} x = (x - x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ pro $x \to 0$, takže $f'(x) = -\frac{2}{3}x + o(x)$ a $f'(0) = f'(0\pm) = 0$; protože $g(0) = 0$ a $g'(x) < 0$ pro všechna $x \neq 0$, je $g > 0$ v $\mathbb{R}_-$, $g < 0$ v $\mathbb{R}_+$, tedy i $f' > 0$ v $\mathbb{R}_-$, $f' < 0$ v $\mathbb{R}_+$; $\nearrow : (-\infty, 0\rangle$; $\searrow : \langle 0, +\infty)$; $\inf = 0$, $\max = 1$.

7.99. $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}\ (f(0)=1)$; sudá; $f(\pm\infty\mp)=0$; $x\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\varphi(x)/x^2 \to 0$ pro $x \to 0$, protože $\varphi(x) := (x\cos x - \sin x) = o(x^2)$; odtud: $f'(0) = f'(0\pm) = 0$; protože φ v $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ klesá, nemá tam f' žádný další kořen. Kořenem f' není ani žádný lichý násobek čísla $\frac{1}{2}\pi$.

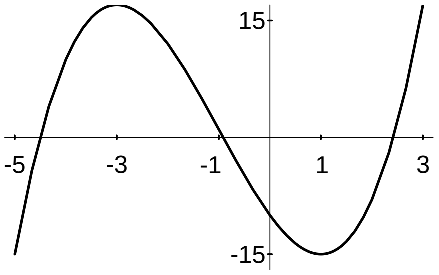
Položíme-li $I_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\psi(x) := x - \operatorname{tg} x$ pro každé $x \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi$, je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = 0$. Protože ψ je spojitá a klesá v každém I_k, přičemž $\psi(\frac{1}{2}(2k-1)\pi+) = +\infty$, $\psi(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) = -\infty$, má ψ v každém I_k právě jeden kořen – označme jej x_k; totéž platí o f'. Protože $\psi(k\pi) = k\pi > 0$, je $x_k \in (k\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$. Přibližné hodnoty čísel x_k lze získat numerickým řešením (transcendentní) rovnice $x = \operatorname{tg}(x)$; dostaneme:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 \doteq \frac{3}{2}\pi - 0.21898 \doteq 4.49341, & & f(x_1) \doteq -0.21723 \\
x_2 \doteq \frac{5}{2}\pi - 0.12873 \doteq 7.72525, & & f(x_2) \doteq 0.12837 \\
x_3 \doteq \frac{7}{2}\pi - 0.09145 \doteq 10.90412, & & f(x_3) \doteq -0.09133 \\
x_4 \doteq \frac{9}{2}\pi - 0.07097 \doteq 14.06619, & & f(x_4) \doteq 0.07091 \\
x_5 \doteq \frac{11}{2}\pi - 0.05800 \doteq 17.22076, & & f(x_5) \doteq -0.05797 \\
x_6 \doteq \frac{13}{2}\pi - 0.04905 \doteq 20.37130, & & f(x_6) \doteq 0.04903 \\
x_7 \doteq \frac{15}{2}\pi - 0.04249 \doteq 23.51945, & & f(x_7) \doteq -0.04248 \\
x_8 \doteq \frac{17}{2}\pi - 0.03748 \doteq 26.66605, & & f(x_8) \doteq 0.03747 \\
x_9 \doteq \frac{19}{2}\pi - 0.03353 \doteq 29.81160, & & f(x_9) \doteq -0.03353 \\
x_{10} \doteq \frac{21}{2}\pi - 0.03033 \doteq 32.95639, & & f(x_{10}) \doteq 0.03033
\end{array}
$$

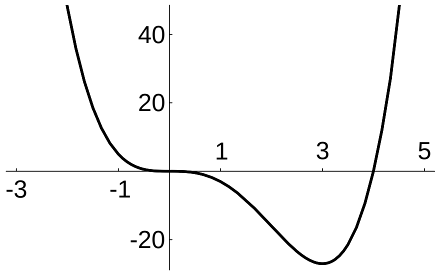
Protože f je sudá, jsou $x_{-k} := -x_k$ právě všechny záporné kořeny f'. Položíme-li ještě $x_0 := 0$, je $\nearrow : \langle x_{2k-1}, x_{2k}\rangle$; $\searrow : \langle x_{2k}, x_{2k+1}\rangle$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$; $\min = f(x_{\pm 1})$, $\max = f(0) = 1$.

7.100. $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -1) \cup \mathbb{R}_+$; $f(\pm\infty\mp) = e$, $f(-1-) = +\infty$, $f(0+) = 1$; je $f'(x) = f(x)g(x)$, kde $g(x) := \lg(1 + 1/x) - 1/(x+1) \to 0$ pro $x \to \pm\infty$, $g' > 0$ v $(-\infty, -1)$, $g' < 0$ v $\mathbb{R}_+$, takže $g > 0$ a $f' > 0$ všude v $\mathcal{D}(f)$; $\nearrow : (-\infty, -1)$, $\mathbb{R}_+$; $\mathrm{as}_{\pm\infty}$: $y = e$. (Poznámka. $f'(0+) = +\infty$ a ovšem též $f'(-1-) = +\infty$.)

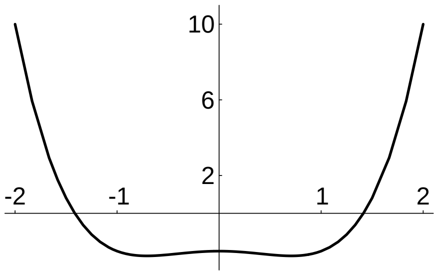
7.01



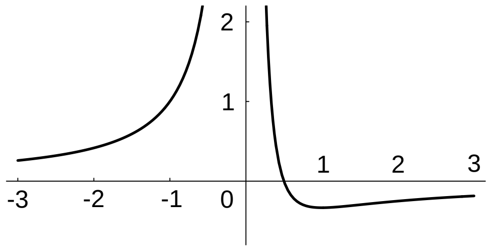
7.02



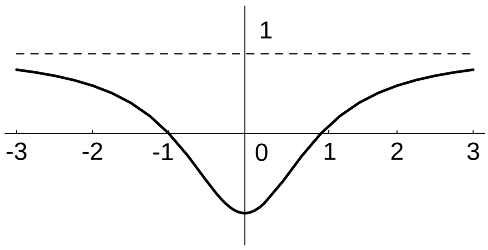
7.03



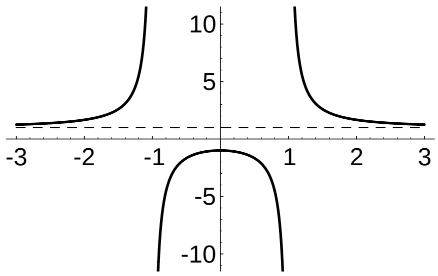
7.04



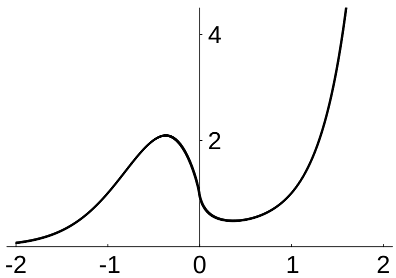
7.05



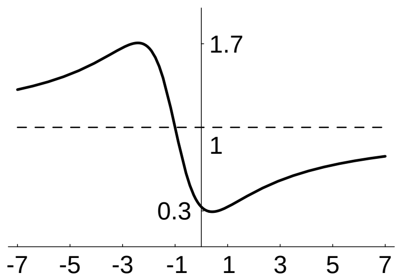
7.06



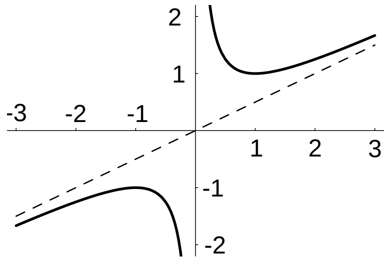
7.07



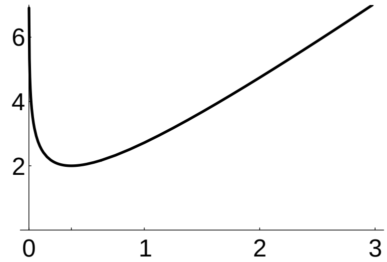
7.08



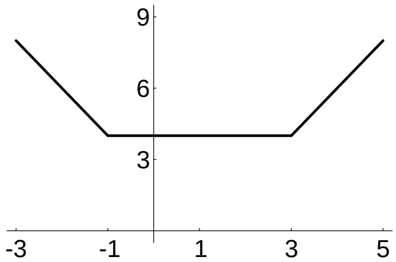
7.09



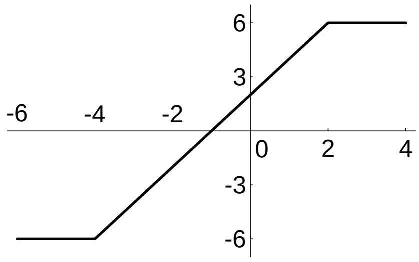
7.10



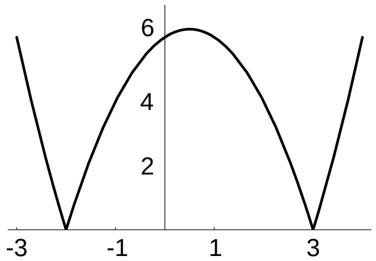
7.11



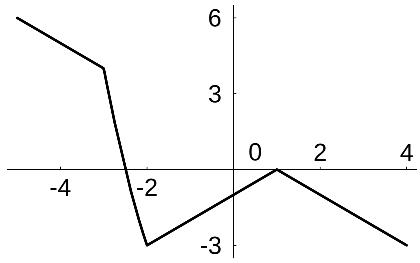
7.12



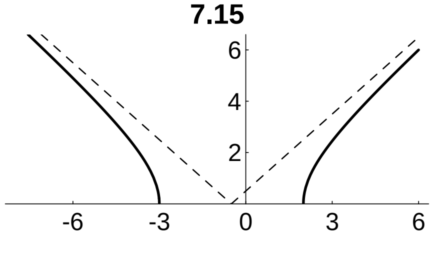
7.13



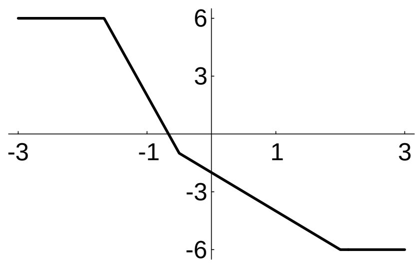
7.14



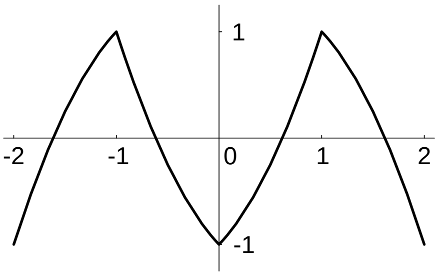
7.15



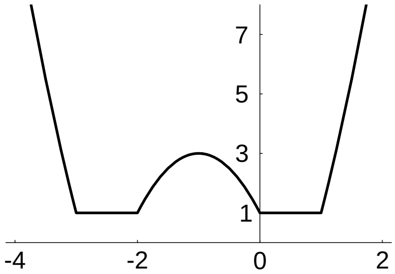
7.16



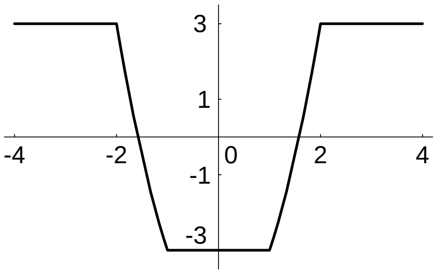
7.17



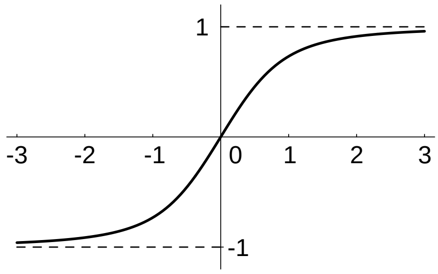
7.18



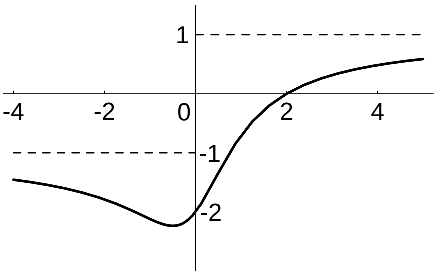
7.19



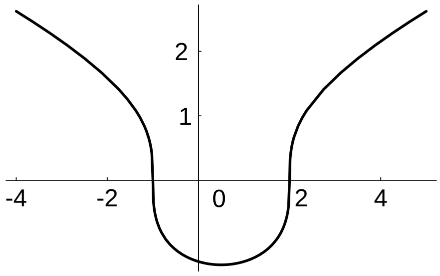
7.20



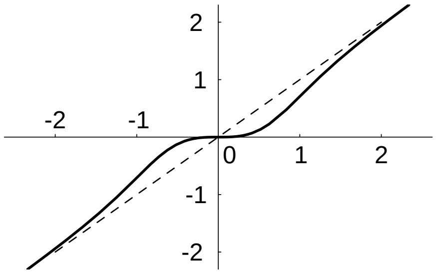
7.21



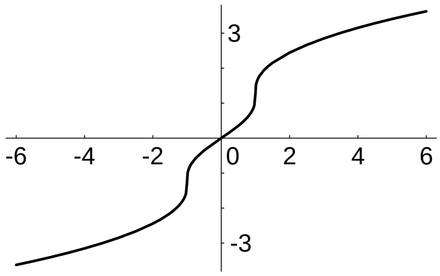
7.22



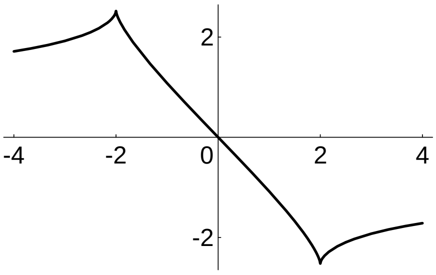
7.23



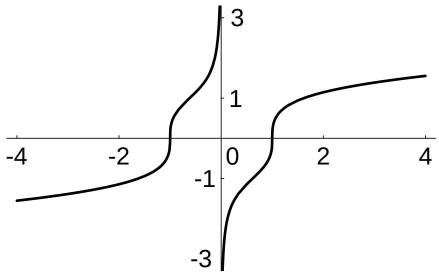
7.24



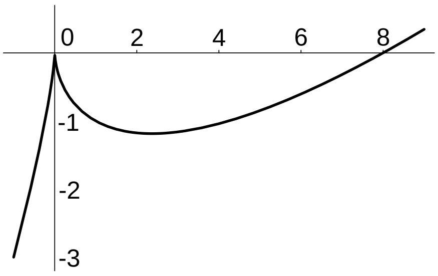
7.25



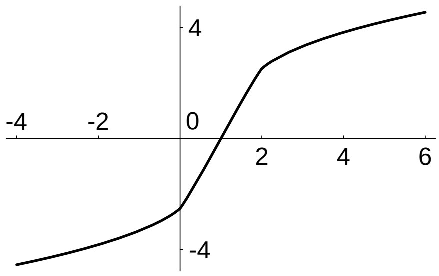
7.26



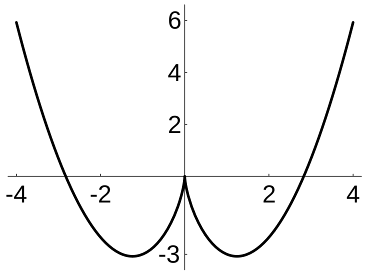
7.27



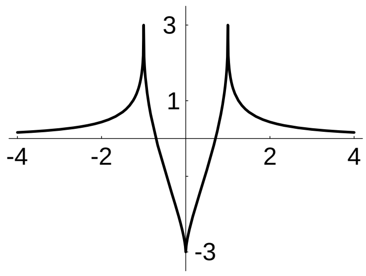
7.28



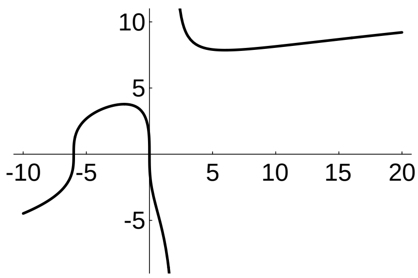
7.29



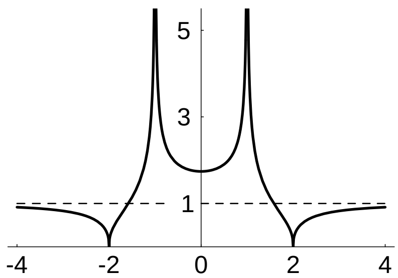
7.30



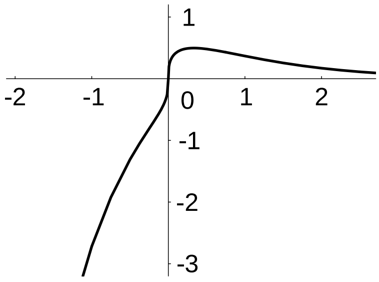
7.31



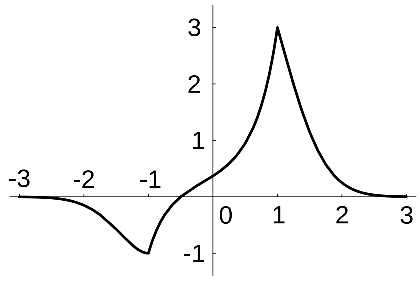
7.32



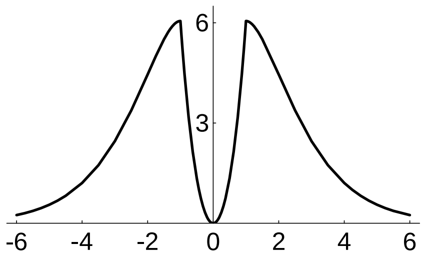
7.33



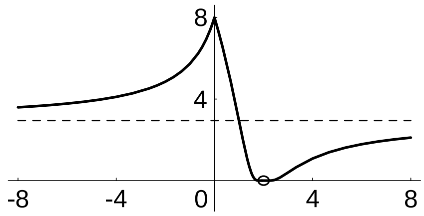
7.34



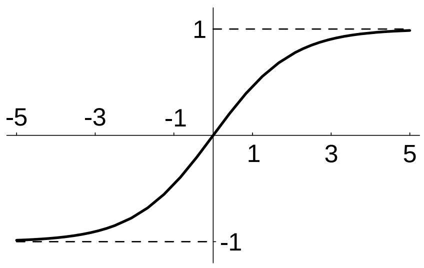
7.35



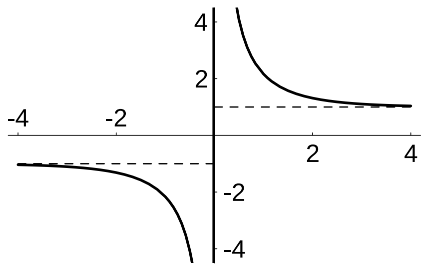
7.36



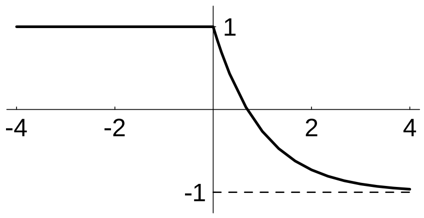
7.37



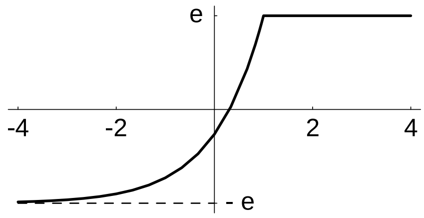
7.38



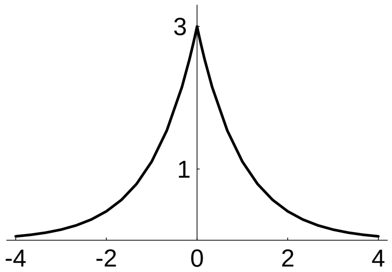
7.39



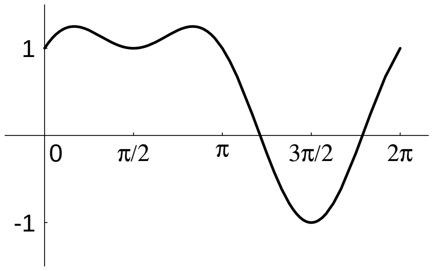
7.40



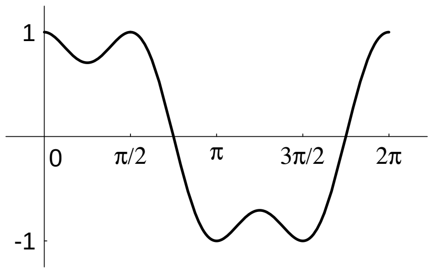
7.41



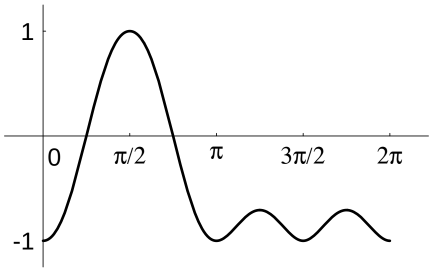
7.42



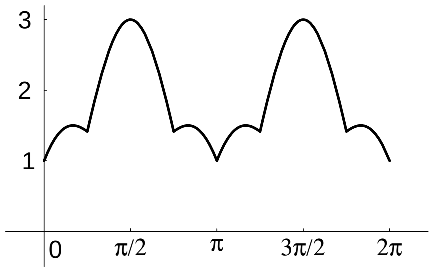
7.43



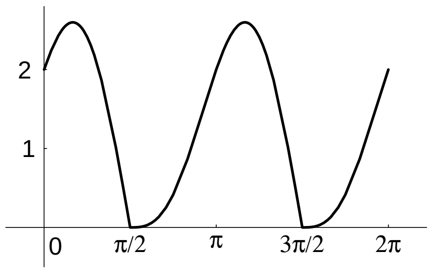
7.44



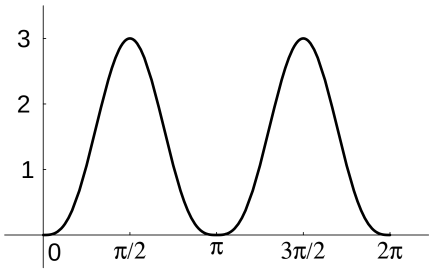
7.45



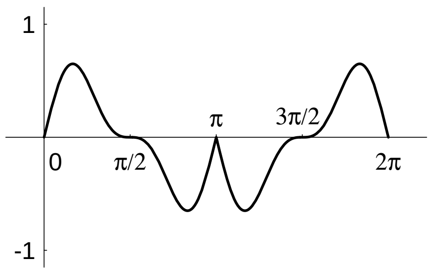
7.46



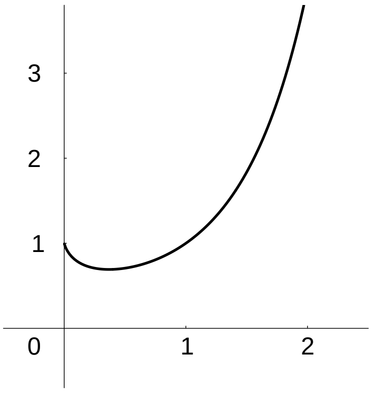
7.47



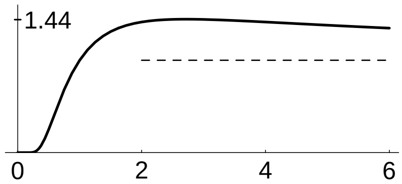
7.48



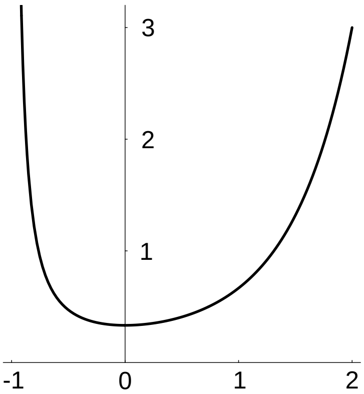
7.49



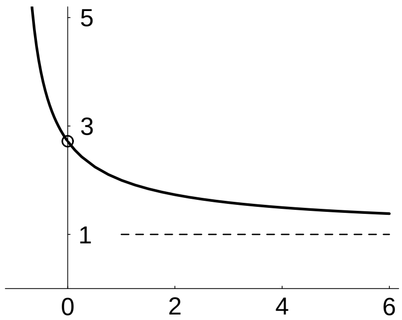
7.50



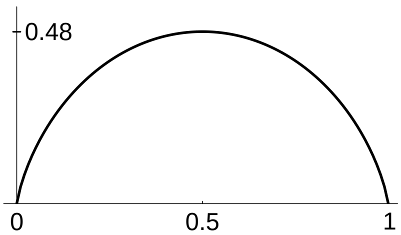
7.51



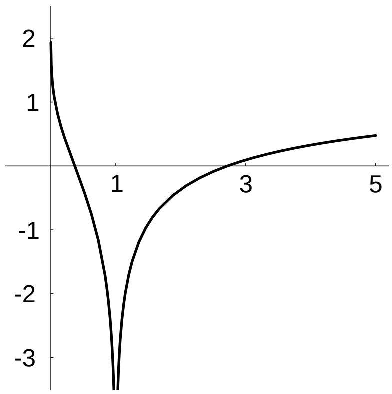
7.52



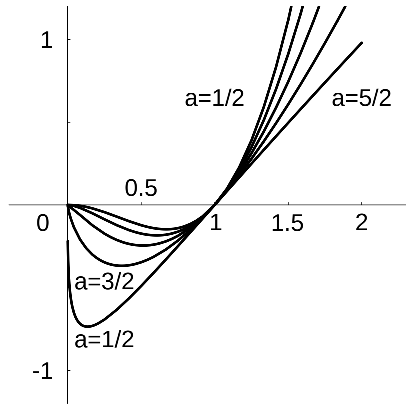
7.53



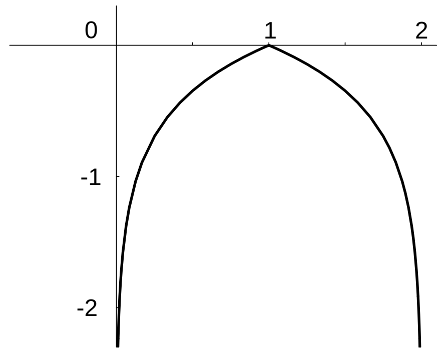
7.54



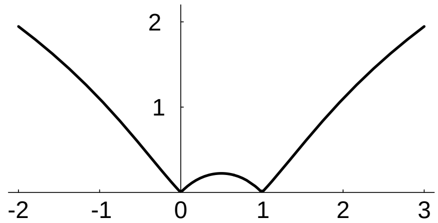
7.55



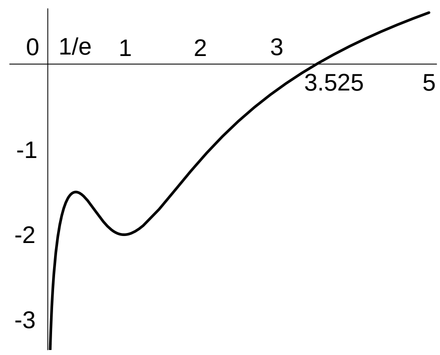
7.56



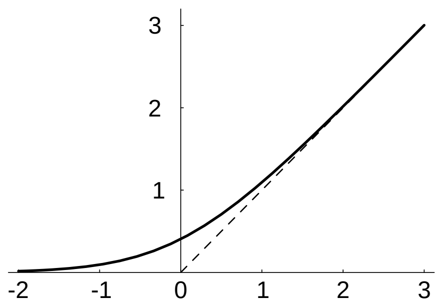
7.57



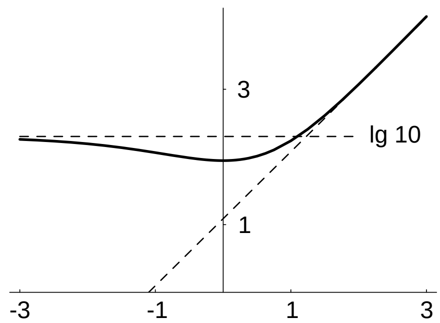
7.58



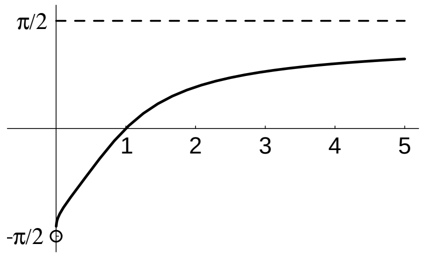
7.59



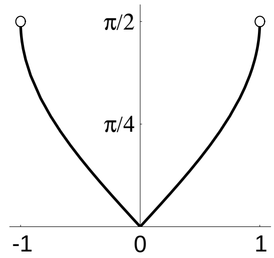
7.60



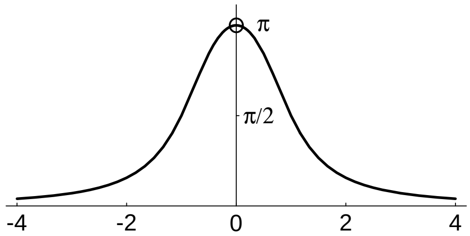
7.61



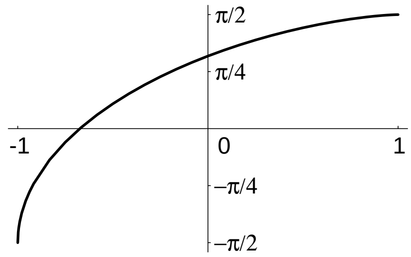
7.62



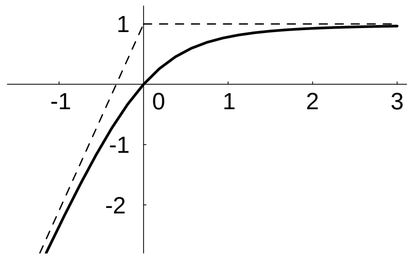
7.63



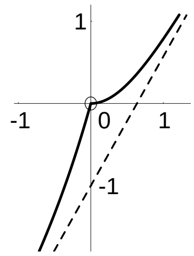
7.64



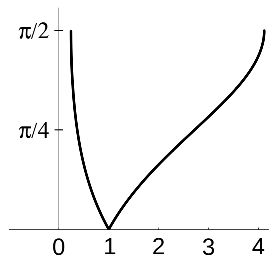
7.65



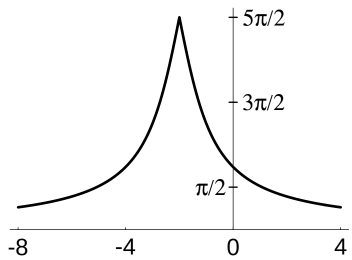
7.66



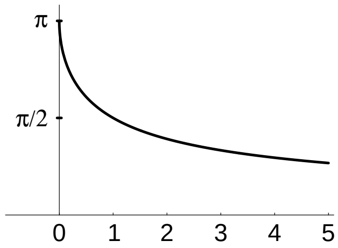
7.67



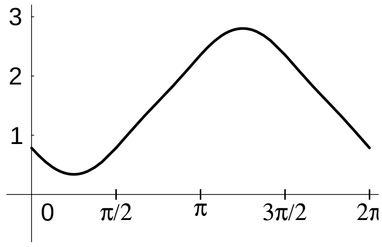
7.68



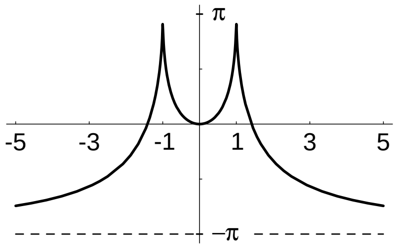
7.69



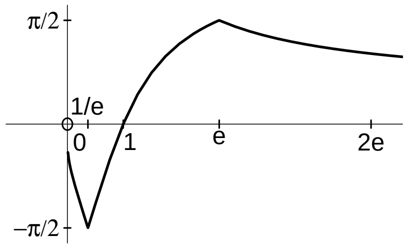
7.70



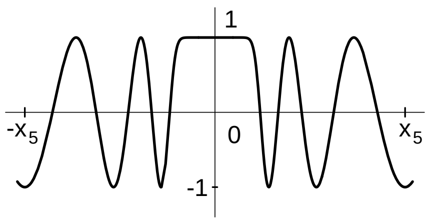
7.71



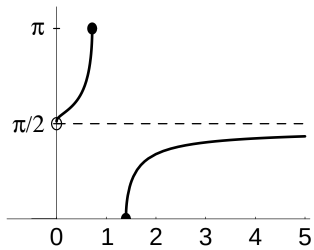
7.72



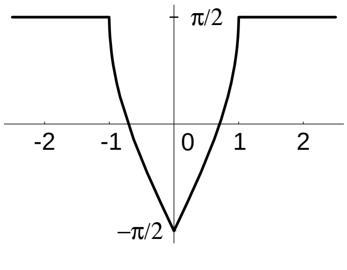
7.73



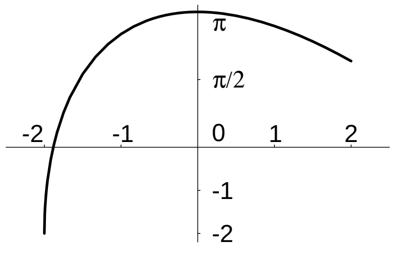
7.74



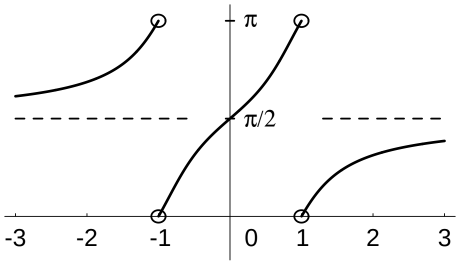
7.75



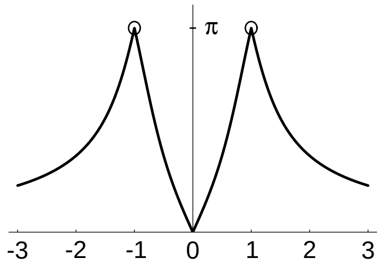
7.76



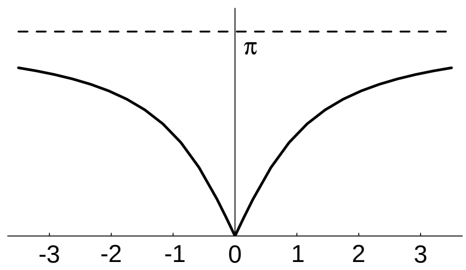
7.77



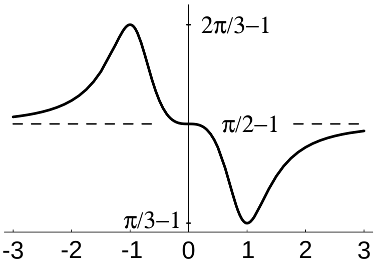
7.78



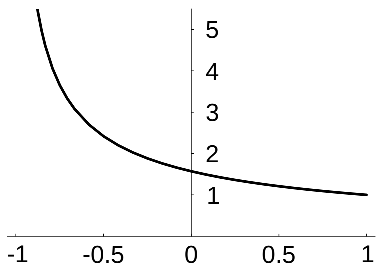
7.79



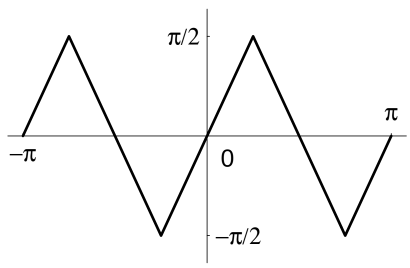
7.80



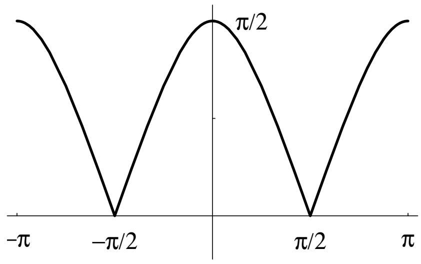
7.81



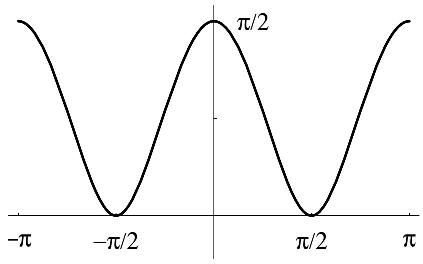
7.82



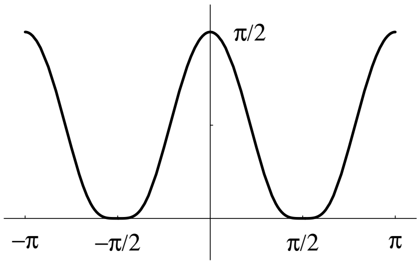
7.83



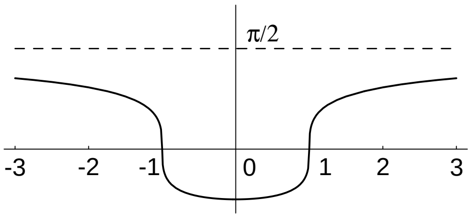
7.84



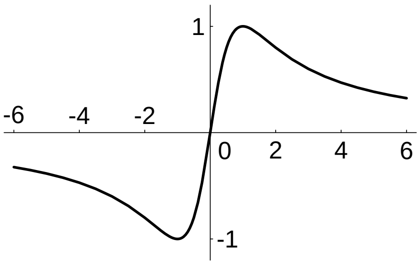
7.85



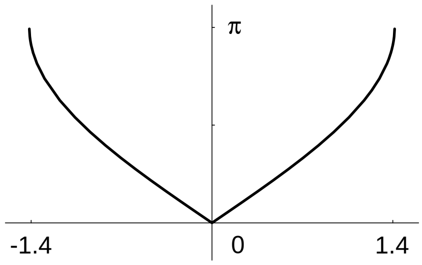
7.86



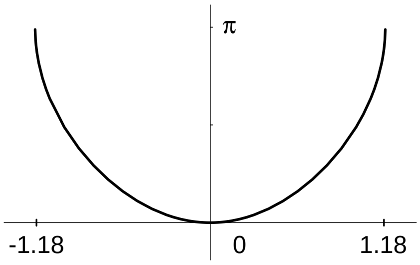
7.87



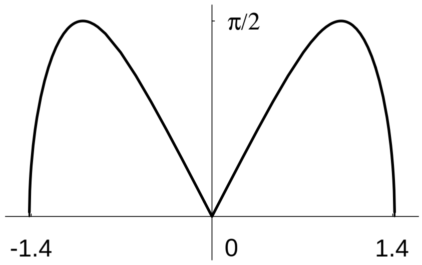
7.88



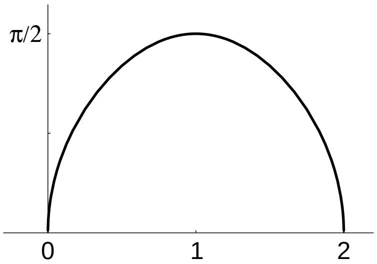
7.89



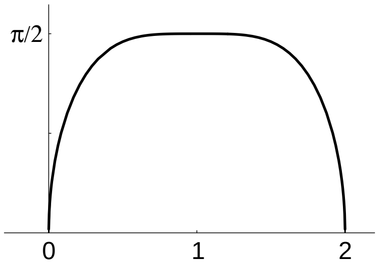
7.90



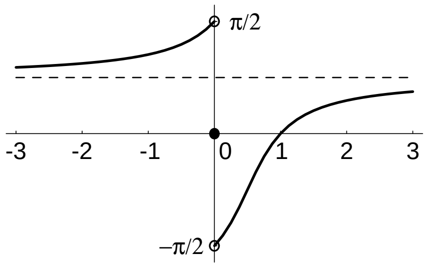
7.91



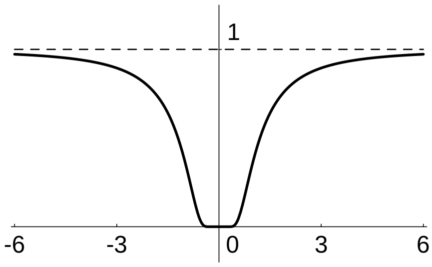
7.92



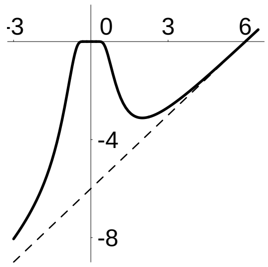
7.93



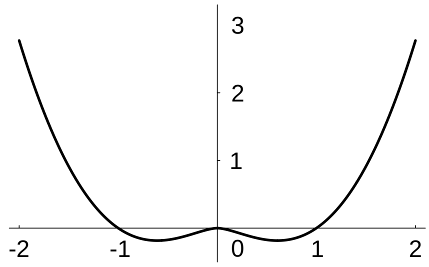
7.94



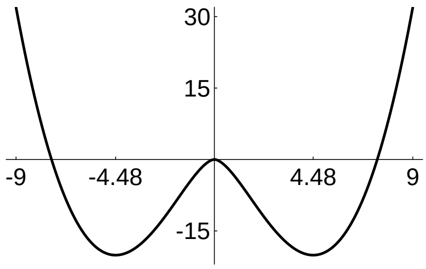
7.95



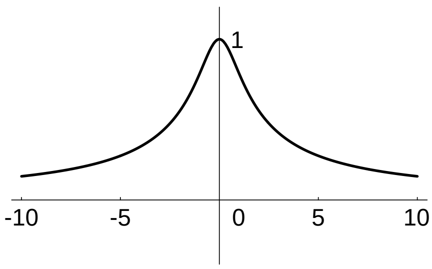
7.96



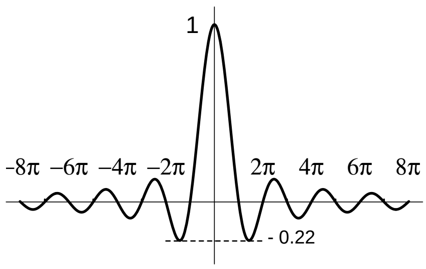
7.97



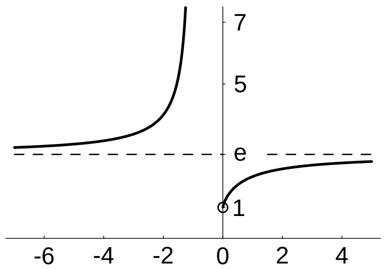
7.98



7.99



7.100



8. Slovní úlohy na extrémy

V této kapitole naznačíme, jak řešit některé „praktické“ (většinou geometrické) úlohy související s extrémy funkcí jedné proměnné. Novým prvkem bude nutnost slovně zadanou úlohu nejdříve matematicky *modelovat*, tedy převést do „matematické řeči“. Teprve pak lze problém řešit buď metodami vyloženými v kapitole 7, nebo metodami zcela elementárními, které nejsou založeny na poznatcích diferenciálním počtu. Jako vždy bychom měli dát přednost *jednoduššímu* řešení.

Připomeňme dvě jednoduchá, ale velmi užitečná tvrzení diferenciálního počtu:

Věta 8.1. *Nechť funkce f definovaná v intervalu I s krajními body $a < b$ má v bodě $c \in (a, b)$ extrém* [1]*). Pak je buď $f'(c) = 0$, nebo tato derivace neexistuje.*

Věta 8.2. *Nechť funkce f spojitá v intervalu (a, b) splňuje tyto podmínky:*

1. $f(a+) = f(b-)$;
2. *existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f' \neq 0$ všude v $(a, c) \cup (c, b)$.* [2])

Pak nastane právě jedna z těchto situací:

A. $f(c) > f(a+)$, *f roste v $(a, c\rangle$, klesá v $\langle c, b)$, a v bodě c má maximum;*

B. $f(c) < f(a+)$, *f klesá v $(a, c\rangle$, roste v $\langle c, b)$, a v bodě c má minimum.*

Příklad 8.1. Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c \in \mathbb{R}_+$ obdélník s maximálním obsahem [3]), najděte délky jeho stran. [4])

Ř e š e n í : Jsou-li x, y délky stran obdélníka, je jeho obvod $2(x + y)$; protože toto číslo má být rovno $4c$, musí být $y = 2c - x$. Máme tedy rozřešit problém, zdali má funkce $f(x) := x(2c - x)$ maximum; z povahy problému ovšem plyne, že nejde o maximum v celém $\mathbb{R}$, ale v intervalu $I := (0, 2c)$ – jinde totiž není buď x, nebo y kladné číslo. V. 7.3 nelze užít, protože I není kompaktní interval; hodí se však V. 8.2 : Protože $f(0+) = f(2c-) = 0$, protože $f'(x) = 2(c - x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ různá od c a protože $f(c) = c^2 > 0$, je tato hodnota *maximální* hodnotou funkce f v I.

Problém má tedy právě jedno řešení: *Obdélník s daným obvodem* $4c$ *a s maximálním obsahem je čtverec o straně c.* Dodejme, že obdélník s daným obvodem a minimálním obsahem zřejmě neexistuje.

Příklad 8.2. Z $1\,\mathrm{m}^3$ betonu máme – pokud je to možné – odlít co nejvyšší těleso buď ve tvaru krychle, nebo koule, nebo koule postavené na krychli.

---

[1]) tj. maximum nebo minimum

[2]) Všimněme si, že se nepředpokládá konečnost žádného z čísel a, b, $f(a+)$, $f(b-)$. Je-li však $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) a je-li f spojitá v bodě a zprava (resp. v bodě b zleva), lze limitu $f(a+)$ (resp. $f(b-)$) nahradit hodnotou $f(a)$ (resp. $f(b)$). Existence derivace $f'(c)$ se nepředpokládá.

[3]) Bylo by hrubou logickou chybou ignorovat v podobných případech problém existence.

[4]) Mezi obdélníky počítáme ovšem i čtverce, jinak by úloha neměla řešení.

Ř e š e n í : Předpokládejme, že se těleso skládá z krychle o délce hrany x a z koule o poloměru r. Připustíme-li $x = 0$ a $r = 0$, budou zahrnuty i případy, že jedno z těchto těles chybí, a je zřejmé, že se pak máme zabývat čísly $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Krychle o hraně x má objem x^3, takže pro kouli zbývá objem $1 - x^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Odtud plyne, že poloměr r a celková výška $f(x)$ tělesa jsou dány rovnostmi

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\,(1 - x^3)} \quad \text{resp.} \quad f(x) = x + 2r = x + \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\,\sqrt[3]{1 - x^3}\,.$$

Derivace

$$f'(x) = 1 + \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\,\frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}}$$

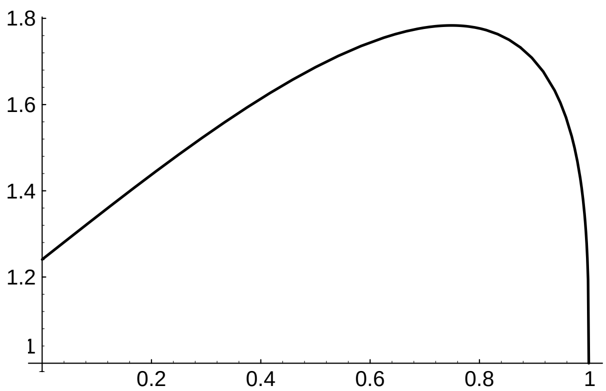
se v $(0, 1)$ anuluje, právě když $\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} = x^2\,\sqrt[3]{6/\pi}$, tj. právě když $\sqrt[3]{1 - x^3} = x\,\sqrt[6]{6/\pi}$. Jak snadno zjistíme, je číslo

$$x_0 := \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6} + \sqrt{\pi}}} \doteq 0.7488$$

jediným řešením této rovnice; průměr příslušné koule je roven

$$2r_0 := \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\pi\,(\sqrt{6} + \sqrt{\pi}\,)}} \doteq 1.0348\,,$$

což vede k úhrnné výšce $x_0 + 2r_0 \doteq 1.7836\,\text{m}$ tělesa.



Obrázek k příkladu 8.2

Protože je toto číslo větší než $f(0) = \sqrt[3]{6/\pi} \doteq 1.24$ a také než $f(1) = 1$, je řešením našeho problému: Na krychli o hraně x_0 je třeba postavit kouli o poloměru r_0. Zároveň je patrné, že kdyby nám šlo o útvar s minimální výškou, odlili bychom krychli o výšce 1.

Příklad 8.3. Dokažme, že na každé přímce v trojrozměrném eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ leží právě jeden bod nejbližší počátku $(0,0,0)$.

Ř e š e n í : Předpokládejme, že přímka L je určena bodem (A,B,C) a (nenulovým) vektorem (u,v,w); to znamená, že přímku L tvoří právě všechny body tvaru $X(t)=(A+tu,B+tv,C+tw)$, kde $t\in\mathbb{R}$. Máme rozřešit problém existence právě jednoho t, pro něž je vzdálenost bodů $X(t)$ a $(0,0,0)$ minimální. Protože vzdálenosti jsou nezáporná čísla, je to totéž jako rozřešit analogický problém pro čtverec této vzdálenosti, tj. pro funkci

$$f(t):=(A+tu)^2+(B+tv)^2+(C+tw)^2\,.$$

Nabývá-li f v některém bodě $t_0\in\mathbb{R}$ svého minima, je podle V. 8. 1

$$f'(t_0)=2\big(u(A+t_0u)+v(B+t_0v)+w(C+t_0w)\big)=0\,.$$

Tato podmínka je splněna, právě když je

$$t_0=-\frac{Au+Bv+Cw}{u^2+v^2+w^2}\,.$$

Aplikujme nyní V. 8. 2 : Obě limity $f(\pm\infty\mp)$ jsou rovny $+\infty$ a $t\neq t_0\ \Rightarrow\ f'(t)\neq 0$; v důsledku toho má funkce f v bodě t_0 *opravdu* minimum. Mezi všemi body $X(t)$ má tedy jedině bod

$$X(t_0)=(A,B,C)-\frac{Au+Bv+Cw}{u^2+v^2+w^2}\,(u,v,w)$$

nejmenší vzdálenost od počátku; snadno ověříme, že její čtverec je roven

$$(A+t_0u)^2+(B+t_0v)^2+(C+t_0w)^2=(A^2+B^2+C^2)-\frac{(Au+Bv+Cw)^2}{u^2+v^2+w^2}\,.$$

Poznamenejme ještě, že skalární součin vektorů $X(t_0)$ a (u,v,w) je roven 0. Je-li $(0,0,0)\in L$, je celý náš problém triviální; je-li $(0,0,0)\notin L$, je přímka procházející počátkem a bodem $X(t_0)$ kolmá k L (což je dobře známo z elementární geometrie).

Příklad 8.4. Rozsáhlý les je z jihu ohraničen přímou cestou vedoucí od západu k východu. Z výchozího místa na této cestě se máme dostat na místo, které je od nás vzdáleno 5 km východně a 2 km severně. Jistou dobu půjdeme po cestě rychlostí 5 km za hodinu, pak (šikmo) lesem rychlostí 3 km za hodinu. Jak dlouho máme jít po cestě, abychom se do cíle dostali co nejdříve? Kolik při tom ujdeme kilometrů a jak dlouho nám cesta bude trvat?

Ř e š e n í : K tomu, abychom po cestě ušli x $(\in\langle 0,5\rangle)$ km, potřebujeme $\frac{1}{5}x$ hodin; další cesta lesem bude pak měřit $y:=\sqrt{2^2+(5-x)^2}=\sqrt{x^2-10x+29}$ km a ujdeme ji za $\frac{1}{3}y$ hodin. Celkem tedy bude cesta trvat

$$f(x):=\tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{3}\sqrt{x^2-10x+29}$$

hodin. Jak snadno zjistíme, je jediným kořenem derivace

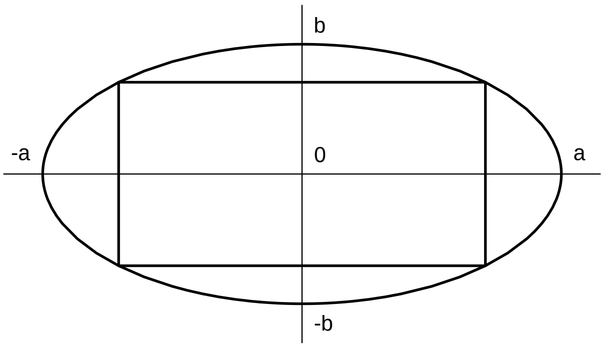
$$f'(x) = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$$

číslo $\frac{7}{2}$. Protože $f(\frac{7}{2}) = \frac{23}{15} = 1.5333\ldots$, zatímco $f(0) = \frac{1}{3}\sqrt{29} \doteq 1.795$, $f(5) = \frac{5}{3} = 1.666\ldots$, je zřejmé, že f nabývá v bodě $\frac{7}{2}$ svého minima. Hodnota tohoto minima je $\frac{23}{15}$ hodin, neboli 1 hodina a 32 minut. Po cestě půjdeme 3.5 km (a 42 minut), lesem 2.5 km (a 50 minut); celkem tedy ujdeme 6 km.

Příklad 8.5. Dokažme, že mezi obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a které jsou vepsány do elipsy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, existuje právě jeden s maximálním obsahem.



Obrázek k příkladu 8.5

Ř e š e n í : Elipsa je geometrickým obrazem křivky [5])

$$\varphi(t) := (a\cos t,\, b\sin t), \quad \text{kde} \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle\,,$$

a vrcholy vepsaného obdélníka jsou body $\varphi(\pm\alpha)$, $\varphi(\pm(\pi-\alpha))$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ je úhel, který svírá průvodič pravého horního vrcholu s kladným směrem osy x. Obsah

$$f(t) := 2a\cos\alpha \cdot 2b\sin\alpha = 2ab\sin 2\alpha$$

takového obdélníka je zřejmě (sr. s V.8.2) maximální při $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ a rovná se $2ab$. Obdobný obdélník s minimálním obsahem samozřejmě neexistuje.

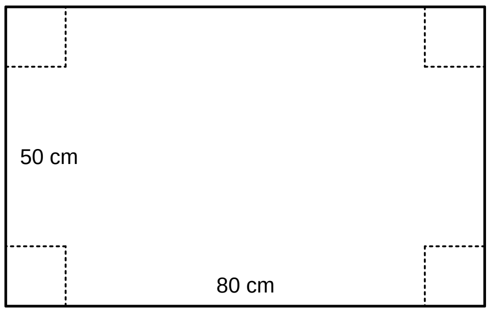
---

[5]) *Křivkou* se zde rozumí (jakékoli) spojité zobrazení ω (jakéhokoli) kompaktního intervalu $I \subset \mathbb{R}$ do roviny $\mathbb{R}^2$. Její *geometrický obraz* je množina $\omega(I)$.

Cvičení

Řešte následující slovní úlohy; u některých z nich vystačíte s elementárními metodami, nevyžadujícími znalost diferenciálního počtu.

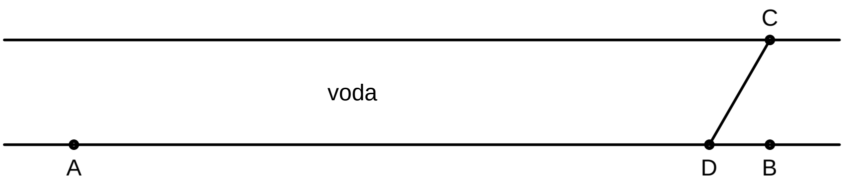
8.01. Z obdélníkového plechu o velikosti $80\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ se má po odstřižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstřihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?



Obrázek ke cvičení 8.01

8.02. Úkolem je vyrobit plechové konzervy ve tvaru válce s objemem V ($\in \mathbb{R}_+$) tak, aby byly co nejlehčí. Najděte příslušný poměr výšky h válce a poloměru r jeho podstavy, a to nejdříve pro obecný objem V, pak pro $V = 1000\,\mathrm{cm}^3$.

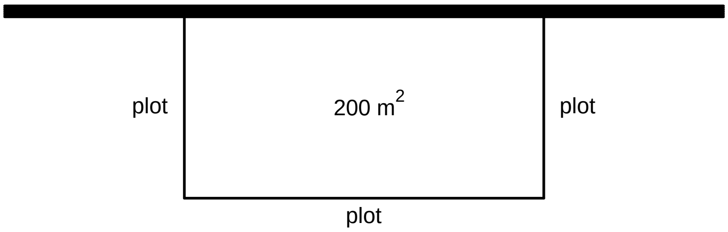
8.03. Válcové nádoby s objemem 20 litrů se budou vyrábět z dvojího plechu: na obě podstavy válce se užije materiál dvakrát dražší než na jeho plášť. Jak se má zvolit poměr výšky h válce a poloměru r jeho podstav, aby cena celé nádoby byla co nejmenší? Stojí-li $1\,\mathrm{m}^2$ materiálu užitého na plášť 360 Kč, kolik bude stát materiál na celou nádobu?



Obrázek ke cvičení 8.04

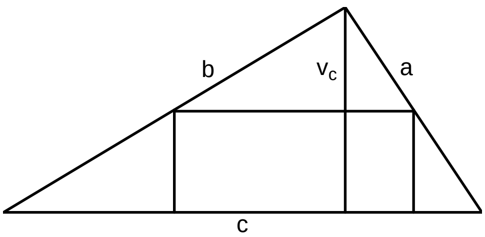
8.04. Přímý vodní kanál je $150\,\mathrm{m}$ široký. Místa A a B ležící na jednom z břehů mají vzdálenost $1\,\mathrm{km}$, místo C je na druhém břehu přesně naproti místu B. Z A se má do C vést potrubí, jehož první (přímý) úsek povede z A do jistého místa D na spojnici AB a jehož druhý (také přímý) úsek spojí D s C. Položení $1\,\mathrm{m}$ potrubí na břehu stojí $800\,$Kč, přes kanál je cena dvojnásobná. Jak daleko má být D od A, aby cena celého potrubí byla co nejmenší? Jaká bude jeho délka zaokrouhlená na decimetry a cena zaokrouhlená na celé koruny? Jaký úhel budou svírat úsečky DB a DC?

8.05. Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze $200\,\mathrm{m}^2$, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Dokažte, že obdélník lze zvolit tak, aby plot měl minimální délku, a najděte délky příslušných stran.



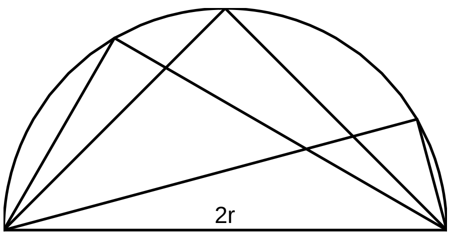
Obrázek ke cvičení 8.05

8.06. Dokažte, že do trojúhelníka, jehož nejdelší stranou je strana c, lze vepsat obdélník se základnou obsaženou v c a s maximálním obsahem; najděte vztah mezi obsahem trojúhelníka a vepsaného obdélníka.



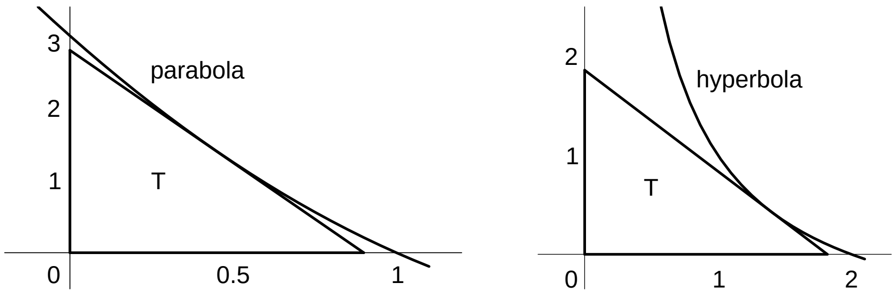
Obrázek ke cvičení 8.06

8.07. Existuje mezi trojúhelníky vepsanými do kruhu o daném poloměru $r \in \mathbb{R}_+$, jejichž jednou stranou je průměr kruhu, trojúhelník s maximálním obsahem resp. obvodem? Pokud ano, jaký bude tento obsah resp. obvod?



Obrázek ke cvičení 8.07

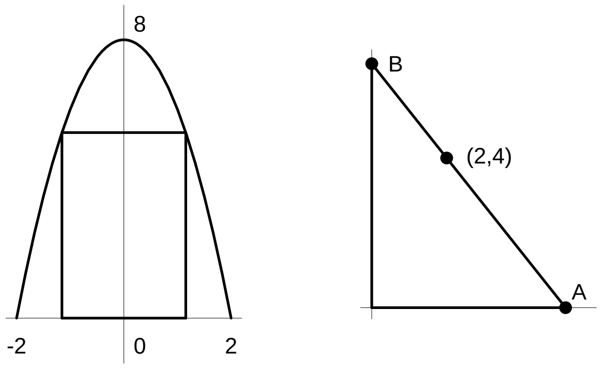
8.08. Dokažte, že mezi všemi (pravoúhlými) trojúhelníky T s vrcholem v počátku, jejichž odvěsny jsou částí souřadnicových os a jejichž přepona je částí tečny oblouku paraboly $y = x^2 - 4x + 3$, $0 \le x \le 1$, existuje právě jeden trojúhelník s minimálním resp. maximálním obsahem. Zjistěte, ve kterých bodech se příslušné tečny dotýkají paraboly a najděte oba extrémní obsahy.



Obrázky ke cvičením 8.08 a 8.09

8.09. Mezi všemi (pravoúhlými) trojúhelníky T, které jsou ohraničeny osami souřadnicovými a tečnou oblouku hyperboly $y = 2/x - 1$, $1 \le x \le 2$, najděte trojúhelníky s extrémními obsahy a příslušné obsahy vypočtěte.

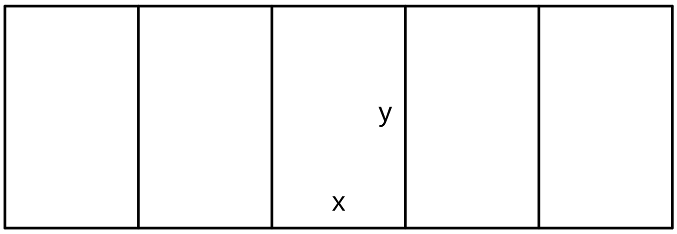
8.10. Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem. Určete tento obsah.



Obrázky ke cvičením 8.10 a 8.11

8.11. Najděte kladná čísla a, b tak, aby body $A := (a, 0)$, $B := (0, b)$, $C := (2, 4)$ ležely na jedné přímce a aby vzdálenost bodů A a B byla minimální. Vypočtěte tuto vzdálenost.

8.12. Obdélníková parcela o rozměrech $5a \times b$ se má oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 (shodných) parcel o rozměrech $a \times b$. Dokažte, že při dané celkové délce c plotů lze a a b zvolit tak, že rozloha $P = 5ab$ parcely



Obrázek ke cvičení 8.12

je maximální. Čísla a, b a příslušné P najděte nejdříve pro obecné $c \in \mathbb{R}_+$, pak pro $c = 600\,\mathrm{m}$.

8.13. Drát délky D se rozdělí na dvě části o délkách D_1, D_2; první část se ohne tak, aby vytvořila kružnici, druhá tak, aby vytvořila obvod čtverce. Lze to provést tak, aby součet S obsahů vzniklého kruhu a čtverce byl minimální (maximální)? Pokud ano, jakému poměru $D_1 : D_2$ to bude odpovídat obecně a čemu se budou čísla D_1, D_2, S rovnat pro $D = 2\,\mathrm{m}$?

8.14. Je některý bod paraboly, která leží v souřadnicové rovině xy trojrozměrného prostoru $\mathbb{R}^3$ a je popsána rovnicemi $y = x^2$, $z = 0$, nejblíže bodu $A = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$? Pokud ano, jak velká je příslušná vzdálenost?

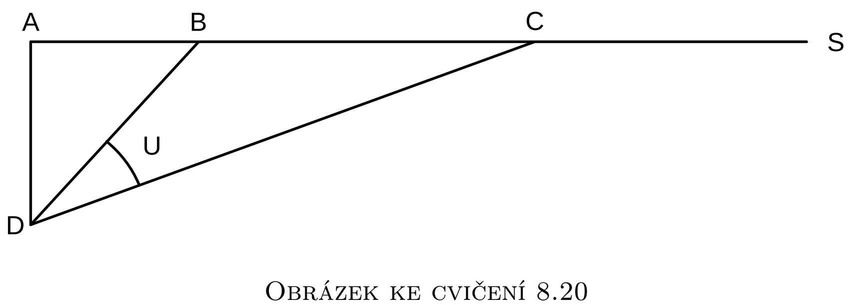
8.15. Body A, B se pohybují v rovině $\mathbb{R}^2$ tak, že v čase $t \in \mathbb{R}$ mají polohy $a + tu$, $b + tv$, kde $a = (6, 4)$, $u = (2, 4)$, $b = (5, 2)$, $v = (-2, 1)$. Dokažte, že existuje právě jedno $t \in \mathbb{R}$, pro něž je vzdálenost bodů A, B minimální; najděte je a vypočtěte příslušnou vzdálenost.

8.16. Vyřešte obdobný problém v prostoru $\mathbb{R}^3$ za předpokladu, že

$$a = (1, -1, -3)\,,\;\; u = (-1, 1, 2)\,,\;\; b = (-2, 3, 2)\,,\;\; v = (2, -2, -1)\,.$$

8.17. Dokažte, že pro každý bod (a, b), kde $a^2 > b$, existují právě dvě tečny paraboly $y = x^2$, od nichž má tento bod minimální vzdálenost; najděte jejich rovnice a příslušnou vzdálenost, a to nejdříve obecně, pak pro $(a, b) = (2, 3)$.

8.18. Existují na parabole $y = x^2 - 6x + 5$ body s minimální vzdáleností od bodu $B = (3, 4)$? Pokud ano, které to jsou a v jaké vzdálenosti leží?



Obrázek ke cvičení 8.20

8.19. Body A, B se pohybují po elipsách tak, že jejich poloha v čase $t \in \mathbb{R}$ je $(2 + 2\cos 8t, \sin 8t)$ resp. $(4\cos 2t, 2\sin 2t)$. Najděte všechna čísla $t \in \mathbb{R}$, pro něž je vzdálenost bodů A, B minimální resp. maximální.

8.20. Na přímé silnici S odstartuje v čase $t = 0$ z místa A chodec B a cyklista C; oba se budou pohybovat od bodu A týmž směrem, a to rychlostmi 5 km a 15 km za hodinu. Na kolmici k přímce S vedené bodem A stojí ve vzdálenosti 300 m od bodu A pozorovatel D a měří zorný úhel U úsečky BC. Dokažte, že v jistém (jednoznačně určeném) okamžiku $t_0 > 0$ bude úhel U maximální, a popište vlastnosti trojúhelníka BCD v tomto okamžiku.

Řešení

8.01. 10 cm.

8.02. $h : r = 2$; při $V = 1000\,\mathrm{cm}^3$ je $r = 5\sqrt[3]{4/\pi} \doteq 5.42\,\mathrm{cm}$, $h = 20/\sqrt[3]{2\pi} \doteq 10.84\,\mathrm{cm}$.

8.03. $h : r = 4$; materiál na celou nádobu bude stát 185 Kč.

8.04. Vzdálenost AD: $(1000 - 50\sqrt{3})\,\mathrm{m} \doteq 913.4\,\mathrm{m}$; délka celého potrubí: $1000 + 50\sqrt{3}\,\mathrm{m} \doteq 1086.6\,\mathrm{m}$; výlohy: 1 007 846 Kč; úhel: 60 stupňů.

8.05. [6]) 20 m strana přiléhající ke zdi, 10 m strana k ní kolmá.

8.06. [6]) Obsah obdélníka je roven polovině obsahu trojúhelníka.

8.07. V obou případech je řešením rovnoramenný trojúhelník; má obsah r^2, obvod $2(\sqrt{2} + 1)r$.

8.08. Jsou to tečny v bodech 1 a $a := \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7}) \doteq 0.45142$; příslušné obsahy jsou 1 a $\frac{4}{27}(7\sqrt{7} - 10) \doteq 1.26226$.

8.09. Obsah je klesající funkcí proměnné $x \in \langle 1, 2\rangle$, takže řešením jsou tečny v bodech 2 (minimum rovné 1) a 1 (maximum rovné $\frac{9}{4}$).

8.10. Základna délky $4/\sqrt{3} \doteq 2.3094$, výška $\frac{16}{3}$, obsah $64/(3\sqrt{3}) \doteq 12.3168$.

8.11. $a = 2(1 + \sqrt[3]{4}) \doteq 5.174802$, $b = 2(2 + \sqrt[3]{2}) \doteq 6.519842$, vzdálenost

$$2\sqrt{5 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}} \doteq 8.323876.$$

8.12. [6]) V obecném případě je řešením dvojice čísel $a = c/20$, $b = c/12$, takže $P = c^2/48$. Hodnotě $c = 600\,\mathrm{m}$ odpovídá $a = 30\,\mathrm{m}$, $b = 50\,\mathrm{m}$, $P = 7500\,\mathrm{m}^2$.

8.13. Minimum existuje a odpovídá poměru $D_1/D_2 = \pi/4$; při $D = 2\,\mathrm{m}$ bude proto $D_1 = 2\pi/(4 + \pi)\,\mathrm{m} \doteq 87.98\,\mathrm{cm}$, $D_2 = 8/(4 + \pi)\,\mathrm{m} \doteq 112.02\,\mathrm{cm}$ a $S = 1/(4 + \pi)\,\mathrm{m}^2 \doteq 1400.25\,\mathrm{cm}^2$.

Maximum neexistuje, musí-li se drát skutečně rozstřihnout; kdyby bylo dovoleno udělat z celého drátu buď kružnici, nebo čtverec (což by odpovídalo volbě $D_2 = 0$ resp. $D_1 = 0$ a o poměru bychom nemluvili), bylo by S maximální při $D_2 = 0$.

[6]) Problém lze řešit elementárně, bez užití diferenciálního počtu.

Příslušný kruh by pak měl obsah $D^2/4\pi$ obecně, tedy $1/\pi\,\mathrm{m}^2 \doteq 3183\,\mathrm{cm}^2$ při $D = 2$. Při $D_1 = 0$ by bylo $S = D^2/16$, tedy $S = 2500\,\mathrm{cm}^2$ pro $D = 2\,\mathrm{m}$, což v žádném případě není extrémní hodnota.

8.14. Nejbližší bod je $\big(x_0, x_0^2, 0\big)$, kde $x_0 := \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \doteq 1.366025$ (takže $x_0^2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \doteq 1.866025$)); příslušná vzdálenost je rovna $(f(x_0))^{1/2}$, kde

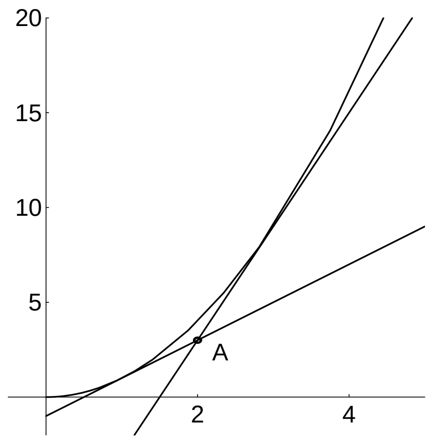
$$f(x) := (x-1)^2 + (x^2-2)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 - 2x + 9\,,$$

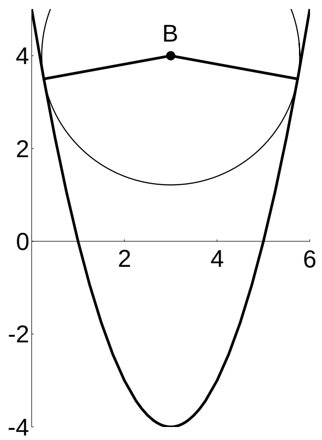
takže $(f(x_0))^{1/2} = \frac{1}{2}\big(3(9-2\sqrt{3})\big)^{1/2} \doteq 2.037627$.

8.15. [6]) $t = -\frac{2}{5}$, minimální vzdálenost je 1.

8.16. [6]) $t = \frac{4}{3}$, minimální vzdálenost je $\sqrt{2}$.

8.17. Přímky o rovnicích $y = (a+c)(2x-a-c)$ a $y = (a-c)(2x-a+c)$, kde $c := (a^2-b)^{1/2}$, jsou jediné dvě tečny, které *procházejí* bodem (a,b), a mají tedy od něj vzdálenost 0. Při $(a,b) = (2,3)$ jsou to přímky $y = 6x-9$ a $y = 2x-1$.





Obrázky k řešením cvičení 8.17 a 8.18

8.18. Na parabole leží právě dva body, které mají minimální vzdálenost od bodu $B = (3,4)$. Jejich první souřadnice jsou $\frac{1}{2}(6-\sqrt{30}) \doteq 0.261387$ a $\frac{1}{2}(6+\sqrt{30}) \doteq 5.738613$, jejich druhé souřadnice se rovnají $\frac{7}{2}$. Hledaná vzdálenost je $d := \frac{1}{2}\sqrt{31} \doteq 2.783882$. [7])

8.19. [6]) *Při řešení tohoto příkladu není vhodné hledat stacionární body vzdálenosti $d(t)$ bodů A, B, protože je jich i v intervalu* $\langle 0,\pi)$ *značné množství* (10) *a až na dva nemají s extrémy funkce $d(t)$ nic společného.*

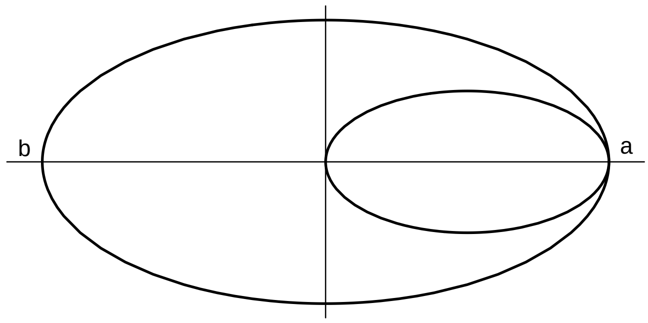
Trajektorie bodů A, B jsou elipsy mající jediný společný bod $a := (4,0)$; mezi všemi body druhé elipsy má zřejmě největší vzdálenost od bodu a bod $b := (-4,0)$.

[7]) Kružnice o středu $(3,4)$ a poloměru d je do paraboly vepsána; její střed je průsečíkem normál paraboly v uvedených bodech.

Stačí tedy rozřešit rovnice

$$(\cos 8t = 1) \wedge (\cos 2t = 1) \quad \text{resp.} \quad (\cos 8t = 1) \wedge (\cos 2t = -1)\,.$$

Řešení: Vzdálenost je minimální, rovná 0, právě když $t \equiv 0 \mod \pi$, a maximální, rovná 8, právě když $t \equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi$.



Obrázek k řešení cvičení 8.19

8.20. $t_0 = \sqrt{3}/50 \doteq 0.034641$ hodiny, tj. cca 2 minuty a 4.7 sekundy. BCD je rovnoramenný trojúhelník o základně CD délky 600 m a ramenech BC a BD délky $200\sqrt{3}\,\mathrm{m}$; úhly u vrcholů B, C, D jsou po řadě rovny $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, takže $U = \frac{1}{6}\pi$.

9. Primitivní funkce

Říkáme, že funkce $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkcí** funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, je-li $F' = f$ všude v (a, b); množinu všech funkcí primitivních k f v (a, b) označíme $PF(f; a, b)$ [1]). Přechod od f k $F \in PF(f; a, b)$ se nazývá **integrace** funkce f; najdeme-li takovou funkci F resp. napíšeme-li f ve tvaru F', říkáme, že jsme ji **integrovali**.

Přechod k primitivní funkci je tedy operace obrácená k diferencování. Pozor však na terminologii: Platí-li rovnost $f(x) = F'(x)$ např. pro všechna $x \in \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, je F primitivní funkcí funkce f v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$, *nikoli však v $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$, protože tato množina není interval*. Primitivní funkci jsme definovali jen v (otevřených) intervalech zejména proto, aby platila tato velice důležitá věta:

Věta 9.1. *Je-li $F \in PF(f; a, b)$, je $G \in PF(f; a, b)$, právě když existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G = F + c$ všude v (a, b).*

Kdybychom interval nahradili množinou, která je sjednocením (konečného nebo nekonečného počtu) disjunktních otevřených intervalů, tvrzení by samozřejmě *neplatilo*, protože konstanta c by v každém z těchto intervalů mohla být jiná.

Věta 9.2. (Existenční věta.) *Každá spojitá funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má v (a, b) primitivní funkci.*

Má-li funkce f v (a, b) jednu primitivní funkci, má jich tam podle V. 9.1 nekonečně mnoho, přičemž každé dvě z nich se liší jen o aditivní konstantu. K tomu, abychom získali úplný přehled o všech funkcích primitivních k f v (a, b), stačí tedy najít jednu z nich.

Věta 9.3. (Integrace per partes.) *Je-li $F \in PF(f; a, b)$, $G \in PF(g; a, b)$, platí všude v (a, b) identita*

$$Fg = (FG)' - fG. \tag{1}$$

Přestože identita (1) je jen jinak napsaným vzorcem $(FG)' = F'G + FG'$ pro diferencování součinu, je velmi užitečným nástrojem hledání primitivních funkcí.

Věta 9.4. (1. substituční metoda – krátce 1SM.) *Předpokládejme, že funkce $\omega : (a, b) \to (A, B)$ je diferencovatelná všude v (a, b) a že funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má tvar $f = (g \circ \omega)\omega'$, kde $g : (A, B) \to \mathbb{R}$. Pak platí:*

Je-li G funkce primitivní ke g v (A, B), je funkce $G \circ \omega$ funkce primitivní k f v (a, b).

Věta 9.5. (2. substituční metoda – krátce 2SM.) *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a nechť $\omega : (\alpha, \beta) \to_{\mathrm{na}} (a, b)$ splňuje všude v (α, β) podmínku $0 \neq \omega' \neq \pm\infty$. Pak platí:*

Je-li G funkce primitivní ke $g := (f \circ \omega)\omega'$ v (α, β), je $F := G \circ \omega_{-1}$ funkce primitivní k f v (a, b).

[1]) Samozřejmě není vyloučen případ, že tato množina je prázdná.

Poznámka 9.1. Abychom při integraci dané funkce volili správně mezi oběma substitučními metodami, všimněme si několika charakteristických rozdílů mezi nimi.

1. Obě metody vyžadují *diferencovatelnost* substituující funkce ω. Ve 2SM se však předpokládá, že $0 \neq \omega' \neq \pm\infty$ všude v (α, β), z čehož podle V.7.4 plyne, že funkce ω je *ryze monotónní*; nic takového se v 1SM *nežádá*.

2. Při aplikaci 2SM se žádá *rovnost* $\omega((\alpha, \beta)) = (a, b)$, zatímco v 1SM stačí platnost *inkluze* $\omega((a, b)) \subset (A, B)$.

3. Při aplikaci 1SM musí mít integrovaná funkce $f(x)$ tvar $g(\omega(x))\omega'(x)$; často se stává, že $f(x)$ v takovém tvaru sice napsána není, ale vhodná úprava ji na tento tvar převede. P ř í k l a d : Je

$$\frac{1}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 4\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 4} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

v každém otevřeném intervalu, který neobsahuje žádný lichý násobek čísla $\frac{1}{2}\pi$; druhý zlomek vpravo je derivací funkce $\omega(x) := \operatorname{tg} x$, $g(y) := 1/(y^2 - 2y + 4)$.

Při aplikaci 2SM do $f(x)$ dosadíme $x = \omega(t)$ a *výsledek nezapomeneme vynásobit derivací $\omega'(t)$ substituující funkce*; substituci volíme tak, aby nová funkce $g(t) := f(\omega(t))\omega'(t)$ byla (z hlediska integrace) jednodušší než původní funkce $f(x)$. Podaří-li se nám nalézt funkci $G(t)$ primitivní ke $g(t)$, vrátíme se k původní proměnné x dosazením $t = \omega_{-1}(x)$; vzniklá funkce $F(x) := G(\omega_{-1}(x))$ bude pak funkcí primitivní k $f(x)$.

Porovnejme ještě jednou jednotlivé kroky obou substitučních metod:

	1SM:	2SM:
daná funkce	$f(x) = g(\omega(x))\,\omega'(x)$	$f(x)$
substituce	$\omega(x) = y$	$x = \omega(t),\ \omega'(t) = \dots$
pomocná integrace	$g(y) = G'(y)$	$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = G'(t)$
výsledek	$f(x) = (G(\omega(x)))'$	$f(x) = (G(\omega_{-1}(x)))'$

Jak je patrné, jsou předpoklady 1SM liberálnější; proto *dáváme přednost* 1SM *před* 2SM, *kdykoli je to jen možné*. $\square$

Podobně jako při diferencování je i při praktickém integrování nutná znalost některých základních identit; mnohé z nich jsou jen přepisem vzorců, s nimiž jsme se setkali v kapitole 5. V následujících identitách je $\alpha \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(3') \qquad x^\alpha = \Big(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big)' \quad \text{v} \quad \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \text{pro všechna celá } \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ & \text{pro všechna celá } \alpha < -1 \\ \mathbb{R}_+ & \text{pro všechna } \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{array}\right\};$$

$$(3'') \qquad \frac{1}{x} = (\lg|x|)' \quad \text{v} \quad \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-;$$

$$\frac{1}{r^2+x^2} = \Big(\frac{1}{r}\operatorname{arctg}\frac{x}{r}\Big)' = \Big(-\frac{1}{r}\operatorname{arccotg}\frac{x}{r}\Big)' \text{ v } \mathbb{R}; \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} = \Big(\arcsin\frac{x}{r}\Big)' = \Big(-\arccos\frac{x}{r}\Big)' \text{ v } (-r,r); \tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} = \Big(\operatorname{argsinh}\frac{x}{r}\Big)' = \big(\lg(x+\sqrt{x^2+r^2})\big)' \text{ v } \mathbb{R}; \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-r^2}} = \Big(-\operatorname{argcosh}\frac{x}{r}\Big)' = \big(\lg(x+\sqrt{x^2-r^2})\big)' \text{ v } (r,+\infty); \tag{7}$$

$$\sin x = (-\cos x)', \quad \cos x = (\sin x)' \text{ v } \mathbb{R}; \tag{8}$$

$$\sinh x = (\cosh x)', \quad \cosh x = (\sinh x)' \text{ v } \mathbb{R}; \tag{9}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = (\operatorname{tg} x)' \text{ v každém intervalu } \big(\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi, \tfrac{1}{2}(2k+1)\pi\big); \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = (\operatorname{cotg} x)' \text{ v každém intervalu } (k\pi,(k+1)\pi). \tag{11}$$

Poznámka 9.2. Identita typu $x^\alpha = \big(x^{\alpha+1}/(\alpha+1)\big)'$ platí pro některá racionální čísla α ve větší množině, než je uvedeno v $(3')$: Je-li $0 \neq p \in \mathbb{Z}$, je-li $q > 1$ liché číslo a jsou-li čísla p, q nesoudělná, je totiž

$$\sqrt[q]{x^p} := \big(x^p\big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\frac{q}{p+q}\big(x^{p+q}\big)^{\frac{1}{q}}\Big)' = \Big(\frac{q}{p+q}\sqrt[q]{x^{p+q}}\Big)' \text{ v } \begin{Bmatrix} \mathbb{R} & \text{pro } p>0 \\ \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ & \text{pro } p<0 \end{Bmatrix}.$$

Komplikace souvisí s tím, že na rozdíl od mnohých počítačových programů (které definují všechny necelé mocniny rovností $x^a := \exp(a \lg x)$ a nedávají tak úplné výsledky) jsou v analýze (stejně jako v aritmetice) definovány liché odmocniny záporných čísel.

Příklad 9.1. Integrací per partes získáme identitu

$$\lg x = (x \lg x)' - 1 = \big(x(\lg x - 1)\big)' \text{ v } \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

(Ve V.8.3 jsme položili $F(x) := \lg x$, $g(x) := 1$, $f(x) = 1/x$, $G(x) := x$.)

Příklad 9.2. Někdy je třeba integrovat per partes několikrát: Je-li $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ a položíme-li $g(x) := e^{ax}$, $F(x) := \sin bx$, $G(x) := e^{ax}/a$, $f(x) = b\cos bx$, dostaneme (podle V.8.3) identitu

$$e^{ax}\sin bx = \Big(\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx\Big)' - \frac{b}{a}e^{ax}\cos bx \text{ v } \mathbb{R}. \tag{13}$$

Položíme-li nyní $g(x) := e^{ax}$, $F(x) := \cos bx$, $G(x) := e^{ax}/a$, $f(x) = -b\sin bx$, dostaneme identitu

$$e^{ax}\cos bx = \Big(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big)' + \frac{b}{a}e^{ax}\sin bx \text{ v } \mathbb{R}. \tag{14}$$

Dosadíme-li (14) do (13) (nebo (13) do (14)), získáme po snadné úpravě identity

$$e^{ax}\sin bx = \Big(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin bx - b\cos bx)\Big)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,, \tag{15$'$}$$

$$e^{ax}\cos bx = \Big(\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos bx + b\sin bx)\Big)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,, \tag{15$''$}$$

které platí dokonce za obecnějšího předpokladu $a^2 + b^2 \neq 0$; platnost pro $a = 0$, $b \neq 0$ ověříme dosazením.

Příklad 9.3. Je-li funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencovatelná a nenulová všude v (a, b), je (podle věty o diferencování superpozice)

$$\frac{f'}{f} = (\lg \circ |\,f\,|)' \tag{16}$$

všude v (a, b). Je tedy např.

$$\frac{\cos x}{2+\sin x} = \big(\lg(2+\sin x)\big)' \ \text{ v } \mathbb{R}$$

a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí rovnost

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} = \big(\lg(1+\sin x)\big)' \ \text{ v } \ (2k\pi - \tfrac{1}{2}\pi, 2k\pi + \tfrac{3}{2}\pi)\,;$$

absolutní hodnotu nebylo nutné psát, protože obě funkce ve jmenovateli jsou kladné.

Poznámka 9.3. Všechny počítačové programy, které jsou autorovi známy, pracují *s nepravdivým tvrzením*, že funkcí primitivní k $1/x$ je $\lg x$; stejnou chybu najdeme i v mnohých tabulkách primitivních funkcí. To celkem výstižně charakterizuje ctitele bezduchého kalkulu: Ačkoli je dobře a dlouho známo, že správná primitivní funkce je $\lg|x|$, vynechávají – asi „pro jednoduchost“ – absolutní hodnotu. Pravděpodobně to souvisí i s tím, že se bezduchý kalkulus nezabývá obory platnosti. V $\mathbb{R}_+$ je samozřejmě vše v pořádku, ale v $\mathbb{R}_-$ podle těchto mylných představ primitivní funkce k $1/x$ zřejmě neexistuje, ačkoli je tam funkce $1/x$ spojitá (sr. s V.9.2). Tato základní chyba má bohužel velmi nepříjemný důsledek: *Je-li funkce f v intervalu (a, b) záporná, nedávají zmíněné programy žádnou primitivní funkci k f'/f* (nejsou-li tak „chytré“, že přejdou k $(-f')/(-f)$). Neúplnou identitu $1/x = (\lg x)'$ snadno opravíme přidáním absolutní hodnoty a dodatkem „pro všechna $x \neq 0$“; zamysleme se však nad „spolehlivostí“ podobných výsledků ve složitějších situacích, v nichž nemusí být vůbec jasné, *kam* je třeba absolutní hodnotu dopsat.

Příklad 9.4. Podle 1SM je

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} = (\lg|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|)' \tag{17}$$

v každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Při označení z 1SM je zde $f(y) := 1/y$, $\omega(x) := \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x)$, takže $\omega'(x) = 1/(2\cos^2\frac{1}{2}x)$.

Příklad 9.5. Funkce $f(x) := 1/\sqrt{e^x - 1}$ má podle V.9.2 primitivní funkci v $\mathbb{R}_+$. Položme $\sqrt{e^x - 1} = t$, tj. substituujme $x = \omega(t) := \lg(t^2+1)$. Všechny předpoklady 2SM jsou splněny, protože $\omega'(t) = 2t/(t^2+1) > 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}_+$ a $\omega(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Protože

$$f(\omega(t))\,\omega'(t) = \frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2+1} = \frac{2}{t^2+1} = (2\operatorname{arctg} t)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}_+\,,$$

je $F(x) := 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1}$ funkcí primitivní k $f(x)$ v $\mathbb{R}_+$.

Příklad 9.6. Funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} \tag{18}$$

má podle V.9.2 primitivní funkci v celém $\mathbb{R}$, ale najít ji bude poněkud komplikovanější, protože standardní substituci $\operatorname{tg} x = y$ (sr. s příkladem 9.11) lze provést jen v intervalech, které neobsahují žádný bod tvaru $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Pracujme v intervalech $I_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, a upravme (18) na tvar

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x + 2}\,; \tag{18*}$$

podle 1SM (s $\omega(x) = \operatorname{tg} x$) a podle (4) platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$\frac{1}{y^2+2} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\Big)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}, \ \text{ takže } \ f(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\Big)' \ \text{ v } \ I_k\,.$$

Funkce F_k definovaná v intervalu $I_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi\rangle$ podmínkami

$$F_k(x) := \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} & \text{pro všechna } \ x \in I_k \\ F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{pro } \ x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi \end{array}\right\} \tag{19}$$

je spojitá v I_k^*, protože se její hodnota v koncovém bodě intervalu I_k rovná příslušné limitě zleva. Protože číslo $\Delta := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) - F_k(\frac{1}{2}(2k-1)\pi+) = \pi/\sqrt{2}$ nezávisí na k, je funkce F definovaná podmínkami

$$F(x) := F_k(x) + k\Delta \ \text{ pro všechna } \ x \in I_k^* \ \text{ a všechna } \ k \in \mathbb{Z} \tag{20}$$

zřejmě spojitá v celém $\mathbb{R}$; je přitom funkcí primitivní k f v každém intervalu I_k. Podle V.5.5 a vzhledem ke spojitosti f v $\mathbb{R}$ je kromě toho

$$F'(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} F'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi/2} f(x) = f(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi)\,,$$

což dokazuje, že F je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Poznámka 9.4. Poslední tvrzení právě dokončeného příkladu, založené na V. 5.5, lze zobecnit takto:

Věta 9.6. *Nechť každý bod x množiny $M \subset \mathbb{R}$ má okolí $P(x)$ disjunktní s M* [2]) *a nechť funkce f, F spojité v $\mathbb{R}$ splňují podmínku $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R} - M$. Pak je $F' = f$ všude v $\mathbb{R}$.*

Vyložme nyní několik metod integrace některých běžných typů funkcí.

Příklad 9.7. Integrace racionální funkce. Racionální funkci $f \not\equiv 0$ napišme ve tvaru $f = g/h$, kde g a h jsou nesoudělné polynomy [3]). Předpokládejme, že všechny reálné kořeny polynomu h byly seřazeny do prosté posloupnosti $a_1, \ldots, a_m$, kde $m \geq 0$, a všechny imaginární kořeny do prosté posloupnosti $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \ldots, \alpha_n, \overline{\alpha_n}$, kde $n \geq 0$. [4]) Je dobře známo, že polynomy $x^2 + b_k x + c_k := (x - \alpha_k)(x - \overline{\alpha_k})$ jsou pak reálné a že identita

$$h(x) = A \prod_{j=1}^{m} (x - a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^{n} (x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}, \tag{21}$$

kde $p_j \in \mathbb{N}$ a $q_k \in \mathbb{N}$ jsou *násobnosti* kořenů a_j a α_k, platí při vhodné volbě (nenulové) konstanty $A \in \mathbb{R}$ všude v $\mathbb{R} - h_{-1}(0)$.

Racionální funkci $f(x)$ lze pak (v $\mathbb{R} - h_{-1}(0)$) rozložit na tzv. **jednoduché** (neboli **parciální**) **zlomky**:

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x - a_j)^r} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks} x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}\,; \tag{22}$$

φ je přitom polynom, A_{jr}, B_{ks}, C_{ks} jsou reálné konstanty. Je-li stupeň polynomu g menší než stupeň polynomu h, je $\varphi \equiv 0$; v opačném případě se $\varphi(x)$ získá dělením polynomu $g(x)$ polynomem $h(x)$, prováděném tak dlouho, až stupeň zbytku dělení klesne pod stupeň polynomu $h(x)$. Numerické hodnoty konstant A_{jr}, B_{ks}, C_{ks} získáme např. tak, že rozdíl $f(x) - \varphi(x)$ vynásobíme výrazem $g(x)/A$ a pak porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na obou stranách vzniklé identity; lze však do ní také dosazovat vhodné hodnoty x a pak řešit vzniklý lineární systém rovnic. (Obě zmíněné metody se často kombinují. Výhodné je dosazovat reálné kořeny polynomu h, protože tím ihned získáme hodnoty některých konstant A_{jr}; v některých případech se vyplatí dosadit i některý imaginární kořen – v tom případě pak porovnáme reálné a imaginární části obou stran vzniklé rovnosti.)

Je jistě zřejmé, jak se najde funkce primitivní (v $\mathbb{R}$) k polynomu:

$$\sum_{i=0}^{N} \alpha_i x^i = \Big(\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \, \frac{x^{i+1}}{i+1} \Big)'. \tag{23}$$

---

[2]) Takové množiny se nazývají *izolované v* $\mathbb{R}$; jejich typickým představitelem je množina $\mathbb{Z}$.

[3]) tj. polynomy, které nemají žádný společný kořen

[4]) Rovnost $m = 0$ (resp. $n = 0$) odpovídá situaci, kdy h nemá žádný reálný (resp. imaginární) kořen.

Stejně jednoduché je integrovat funkce tvaru $1/(\mathrm{Id}-a)^r$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{N}$: V $\mathbb{R} - \{a\}$ platí identity

$$(24') \qquad \frac{1}{x-a} = \big(\lg|x-a|\big)',$$

$$(24'') \qquad \frac{1}{(x-a)^r} = \Big(\frac{1}{1-r}\,\frac{1}{(x-a)^{r-1}}\Big)', \quad \text{je-li} \ r > 1\,.$$

Zbývá vysvětlit, jak se (v $\mathbb{R}$) integrují zlomky tvaru $(Bx+C)/(x^2+bx+c)^s$, kde polynom x^2+bx+c má dva různé imaginární kořeny: Nejdříve napíšeme identitu

$$(25) \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^s} = \tfrac{1}{2}B\,\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^s} + \Big(C - \tfrac{1}{2}bB\Big)\frac{1}{(x^2+bx+c)^s}\,.$$

Pak užijeme 1SM a substitucí $y = \omega(x) := x^2+bx+c$ převedeme problém integrace prvního zlomku vpravo na triviální problém integrace funkce y^{-s}. Užijeme-li analogie identit (24′) a (24″), vidíme, že všude v $\mathbb{R}$ je

$$(25') \qquad \frac{2x+b}{x^2+bx+c} = \big(\lg(x^2+bx+c)\big)',$$

$$(25'') \qquad \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^s} = \Big(\frac{1}{1-s}\,\frac{1}{(x^2+bx+c)^{s-1}}\Big)', \quad \text{je-li} \ s > 1\,.$$

Integrace posledního zlomku v (25) je o něco komplikovanější: Protože oba kořeny polynomu x^2+bx+c jsou imaginární, je

$$(26) \qquad x^2+bx+c = (x-\tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{1}{4}(4c-b^2)\,,$$

přičemž $D := b^2 - 4c < 0$. Substituce

$$(26') \qquad y = \omega(x) := \frac{2x-b}{\sqrt{4c-b^2}}$$

převede integraci zlomku $1/(x^2+bx+c)^s$ na integraci zlomku $1/(y^2+1)^s$ násobeného jistou konstantou.

Integrace per partes s $F(y) := 1/(y^2+1)^s$, $g(y) := 1$, $f(y) = -2sy/(y^2+1)^{s+1}$, $G(y) := y$ vede k rovnostem

$$\begin{aligned}\frac{1}{(y^2+1)^s} &= \Big(\frac{y}{(y^2+1)^s}\Big)' + 2s\,\frac{y^2}{(y^2+1)^{s+1}}\\ &= \Big(\frac{y}{(y^2+1)^s}\Big)' + \frac{2s}{(y^2+1)^s} - \frac{2s}{(y^2+1)^{s+1}}\,,\end{aligned}$$

z nichž plyne *redukční vzorec*

$$(27) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^{s+1}} = \frac{1}{2s}\Big(\frac{y}{(y^2+1)^s}\Big)' + \frac{2s-1}{2s}\,\frac{1}{(y^2+1)^s}\,,$$

platný všude v $\mathbb{R}$ a pro všechna $s \in \mathbb{N}$. Protože je

$$(28_1) \qquad \frac{1}{y^2+1} = (\operatorname{arctg} y)' \ \text{ v } \ \mathbb{R},$$

je tím celý problém rozřešen.

Pomocí (27) a (28_1) se snadno dokáže, že všude v $\mathbb{R}$ platí např. identity

$$(28_2) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg} y + \frac{y}{y^2+1}\Big)',$$

$$(28_3) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^3} = \frac{1}{8}\Big(3\operatorname{arctg} y + \frac{3y}{y^2+1} + \frac{2y}{(y^2+1)^2}\Big)',$$

$$(28_4) \qquad \frac{1}{(y^2+1)^4} = \frac{1}{48}\Big(15\operatorname{arctg} y + \frac{15y}{y^2+1} + \frac{10y}{(y^2+1)^2} + \frac{8y}{(y^2+1)^3}\Big)'.$$

Příklad 9.7a. Integrujme funkci

$$(29) \qquad f(x) := \frac{3x}{x^3-1}$$

v maximálních intervalech, kde je to možné, tedy v $(-\infty, 1)$ a v $(1, +\infty)$. Protože stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, odpadá dělení – polynom $\varphi(x)$ v obecném rozkladu (22) je nulový; rozklad na jednoduché zlomky má proto tvar

$$\frac{3x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Násobením jmenovatelem levé strany získáme identitu

$$3x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1),$$

platnou (na rozdíl od předcházející identity) v celém $\mathbb{R}$. Dosazením $x = 1$ dostaneme $A = 1$; porovnáme-li koeficienty u x^2 a x^0, dostaneme rovnice $0 = A+B$, $0 = A-C$, z nichž je zřejmé, že $B = -1$, $C = 1$. Je tedy

$$(30) \qquad f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}.$$

Poslední sčítanec se třeba ještě upravit; z identit

$$x^2+x+1 = \big(x+\tfrac{1}{2}\big)^2 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{4}\Big[\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)^2 + 1\Big]$$

ihned plyne, že

$$(31) \qquad \frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1} = \sqrt{3}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)^2+1} = \Big(\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big)' \ \text{ v } \ \mathbb{R}$$

podle 1SM. Z toho a z (30) dále vyplývá, že

$$f(x) = \left(\lg\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)' \quad \text{v } \mathbb{R}-\{1\}. \tag{32}$$

Příklad 9.7b. Funkce primitivní k funkci

$$f(x) := \frac{4x^8 - 20x^2}{(x+1)^3\,(x^2+1)} \tag{33}$$

existují v intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

Protože stupeň čitatele je o 3 větší než stupeň jmenovatele, provedeme 4 kroky dělení; čtenář se jistě sám přesvědčí, že tím dostaneme identitu

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 20x - 28 + \frac{4\,(10x^4+16x^3+11x^2+16x+7)}{(x+1)^3\,(x^2+1)}\,. \tag{34}$$

Označme poslední zlomek $g(x)$ a hledejme koeficienty $A,\dots,E$ tak, aby bylo

$$g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}\,. \tag{35}$$

Vynásobíme-li tuto identitu jmenovatelem levé strany a dosadíme-li do vzniklých polynomů $x=-1$, zjistíme, že $C=-8$. Zbylá čísla A,B,D,E získáme porovnáním koeficientů např. u mocnin x^0, x^1, x^3 a x^4:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{u } x^0: & 28 & = & A+B+C+D \\
\text{u } x^1: & 64 & = & 2A+B+D+3E \\
\text{u } x^3: & 64 & = & 2A+B+3D+E \\
\text{u } x^4: & 40 & = & A+D
\end{array}$$

Protože tato soustava má řešení $A=46$, $B=-4$, $D=E=-6$, je

$$g(x) = \frac{46}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{8}{(x+1)^3} - 3\,\frac{2x}{x^2+1} - \frac{6}{x^2+1}\,, \tag{36}$$

takže

$$\begin{aligned} f(x) = \Big(&x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 28x + 46\lg|x+1| + \frac{4}{x+1} \\ &+ \frac{4}{(x+1)^2} - 3\lg(x^2+1) - 6\operatorname{arctg} x\Big)' \quad \text{pro všechna } x \neq -1. \end{aligned} \tag{37}$$

Příklad 9.7c. Funkce primitivní k funkci

$$f(x) := \frac{12\,(x^2-x-2)}{(x^2-1)^2\,(x^2-x+1)^2} \tag{38}$$

existují v intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ a $(1,+\infty)$; napišme

$$f(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}+\frac{Gx+H}{(x^2-x+1)^2}$$

a hledejme numerické hodnoty konstant $A,\dots,H$. Násobíme-li identitu jmenovatelem levé strany a dosadíme-li do výsledku $x=\pm1$, zjistíme, že $B=-6$, $D=0$. Porovnejme dále koeficienty u šesti vybraných mocnin x:

$$\begin{aligned}
\text{u } x^7: &\quad 0 = A + C + E\\
\text{u } x^6: &\quad 6 = -A-3C-E+F\\
\text{u } x^5: &\quad 0 = 4C-E-F+G\\
\text{u } x^4: &\quad 0 = 2A-2C+2E-F+H\\
\text{u } x^1: &\quad -12 = A-3C+E-F+G\\
\text{u } x^0: &\quad -18 = -A+C+F+H
\end{aligned}$$

Řešením jsou čísla $A=21$, $C=-1$, $E=-20$, $F=4$, $G=-12$, $H=0$,[5]) takže

(39) $$f(x)=\frac{21}{x-1}-\frac{6}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}-\frac{20x-4}{x^2-x+1}-\frac{12x}{(x^2-x+1)^2}$$

pro všechna $x\neq\pm1$. Je zřejmé, že

(40) $$\frac{21}{x-1}-\frac{6}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}=\Big(21\lg|x-1|+\frac{6}{x-1}-\lg|x+1|\Big)'$$

v $\mathbb{R}-\{\pm1\}$. Všude v $\mathbb{R}$ platí kromě toho tyto identity:

(41) $$-\frac{20x-4}{x^2-x+1}=-10\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{6}{x^2-x+1}\,,$$

(42) $$-10\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}=\Big(-10\lg(x^2-x+1)\Big)',$$

(43) $$-\frac{6}{x^2-x+1}=-\frac{12}{\sqrt3}\,\frac{2/\sqrt3}{\Big(\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big)^2+1}=\Big(-\frac{12}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big)',$$

(44) $$\frac{-12x}{(x^2-x+1)^2}=-6\,\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}-\frac{6}{(x^2-x+1)^2}\,,$$

(45) $$-6\,\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}=\Big(\frac{6}{x^2-x+1}\Big)',$$

(46) $$-\frac{6}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{16}{\sqrt3}\,\frac{2/\sqrt3}{\Big(\Big(\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big)^2+1\Big)^2}\,.$$

[5]) Předpokládáme, že se čtenář neomezuje na pouhé čtení těchto řádků, ale počítá sám, přičemž náš text mu slouží k ověření správnosti výsledků. Jen vlastní aktivitou se může něčemu naučit.

Substituce $(2x-1)/\sqrt{3} = y$ v posledním výrazu vede podle (28_2) k identitě

$$-\frac{16}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{(y^2+1)^2} = -\frac{8}{\sqrt{3}}\Big(\frac{y}{y^2+1} + \operatorname{arctg} y\Big)'.$$

Užijeme-li znovu 1SM, dostaneme po troše počítání [5]) tento výsledek:

$$-\frac{6}{(x^2-x+1)^2} = \Big(\frac{2(1-2x)}{x^2-x+1} - \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)'. \tag{47}$$

Podle (40), (42), (43), (45), (47) je tedy

$$\begin{aligned} f(x) : = \Big(&\frac{6}{x-1} + 4\,\frac{2-x}{x^2-x+1} - \frac{20}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ &+ 21\lg|x-1| - \lg|x+1| - 10\lg(x^2-x+1)\Big)' \end{aligned} \tag{48}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

* * *

Spolehlivé zvládnutí principů integrace racionální funkce je důležité i proto, že na ni lze převést integraci dalších typů funkcí; ilustrují to příklady 9.8 – 9.12.

Příklad 9.8. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R(e^x), \quad \text{kde } R \text{ je racionální funkce}. \tag{49}$$

Položíme-li $e^x = y$ a aplikujeme-li 1SM, vidíme, že když je $G(y)$ primitivní funkcí funkce

$$g(y) := \frac{1}{y}\,R(y), \tag{50}$$

je $F(x) := G(e^x)$ primitivní funkcí funkce $f(x)$.

To, co jsme právě řekli, je samozřejmě jen nástin možného postupu; v každém konkrétním příkladě je třeba ověřit všechny předpoklady substituční metody a stanovit, v jakém intervalu resp. v jakých intervalech budou naše výsledky platit.

Příklad 9.8a. Funkci primitivní v $\mathbb{R}$ k funkci

$$f(x) := \frac{e^x}{e^{2x}+3} \tag{51}$$

vidíme na první pohled, protože jmenovatel zlomku je roven $(e^x)^2 + 3$ a čitatel e^x je derivací e^x. Podle 1SM a podle (4) je tedy

$$f(x) = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}}\Big)' \quad \text{všude v } \mathbb{R}. \tag{52}$$

Příklad 9.8b. Funkce

$$f(x) := \frac{e^x + 1}{(e^x - 1)(e^{2x} - e^2)} \tag{53}$$

má primitivní funkce v intervalech $I_1 := (-\infty, 0)$, $I_2 := (0, 1)$ a $I_3 := (1, +\infty)$. Abychom v každém z těchto intervalů našli jednu z nich, položíme $e^x = y$, což náš problém převede podle 1SM na nalezení primitivní funkce k funkci

$$g(y) := \frac{y + 1}{y(y - 1)(y^2 - e^2)} \tag{54}$$

v intervalech $(0, 1) = \exp(I_1)$, $(1, e) = \exp(I_2)$ a $(e, +\infty) = \exp(I_3)$.

Vynásobíme-li rozklad

$$g(y) = \frac{A}{y} + \frac{B}{y - 1} + \frac{C}{y - e} + \frac{D}{y + e} \tag{55}$$

jmenovatelem levé strany a dosadíme-li do výsledku postupně $y = 0$, $y = 1$, $y = \pm e$, dostaneme tyto hodnoty konstant A, B, C, D:

$$A = \frac{1}{e^2}, \quad B = \frac{2}{1 - e^2}, \quad C = \frac{e + 1}{2e^2(e - 1)}, \quad D = \frac{e - 1}{2e^2(e + 1)}. \tag{56}$$

Integrací identity (55) získáme identitu

$$g(y) = \big(A \lg|y| + B \lg|y - 1| + C \lg|y - e| + D \lg|y + e|\big)' \tag{57}$$

platnou všude v $\mathbb{R} - \{-e, 0, 1, e\}$; dosadíme-li do ní podle (56), lze výsledek upravit na tvar

$$g(y) = \left(\frac{\lg|y|}{e^2} - \frac{1}{e^2 - 1}\left(2 \lg|y - 1| - \frac{e^2 + 1}{2e^2} \lg|y^2 - e^2| - \frac{1}{e} \lg\left|\frac{y - e}{y + e}\right|\right)\right)'; \tag{58}$$

podle 1SM je tedy

$$f(x) = \left(\frac{x}{e^2} - \frac{1}{e^2 - 1}\left(2 \lg|e^x - 1| - \frac{e^2 + 1}{2e^2} \lg|e^{2x} - e^2| - \frac{1}{e} \lg\left|\frac{e^x - e}{e^x + e}\right|\right)\right)' \tag{59}$$

všude v $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

* * *

Příklad 9.9. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := \frac{R(\lg x)}{x}, \quad \text{kde } R \text{ je racionální funkce}, \tag{60}$$

se substitucí $y = \lg x$ v 1SM převede na integraci racionální funkce $R(y)$.

Příklad 9.9a. Funkce

$$f(x) := \frac{5 \lg x}{x\,(\lg^3 x + \lg^2 x - 2)} \tag{61}$$

má primitivní funkce v intervalech $(0, e)$ a $(e, +\infty)$, protože logaritmus je spojitý v $\mathbb{R}_+$ a polynom $y^3 + y^2 - 2 = (y-1)(y^2 + 2y + 2)$ má právě jeden reálný kořen $y = 1$, kterému odpovídá $x = e$.

Jak čtenář snadno ověří, je

$$g(y) := \frac{5y}{y^3 + y^2 - 2} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2y+2}{y^2+2y+2} + \frac{3}{(y+1)^2+1} \tag{62}$$

všude v $\mathbb{R} - \{1\}$. V důsledku toho platí rovnost

$$g(y) = \Big(\lg|y-1| - \tfrac{1}{2}\lg(y^2+2y+2) + 3\operatorname{arctg}(y+1)\Big)'$$

pro všechna $y \neq 1$ a rovnost

$$f(x) = \Big(\lg|\lg x - 1| - \tfrac{1}{2}\lg\big(\lg^2 x + 2\lg x + 2\big) + 3\operatorname{arctg}(\lg x + 1)\Big)' \tag{63}$$

pro všechna $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

* * *

Polynomem dvou proměnných u, v rozumíme součet konečného počtu výrazů tvaru $au^m v^n$, kde $a \in \mathbb{R}$ a kde m, n jsou nezáporná celá čísla. Podíl p/q dvou polynomů p, $q \not\equiv 0$ proměnných u, v se nazývá **racionální funkce proměnných** u, v.

Příklad 9.10. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \tag{64}$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných, $s > 1$ je celé číslo a a, b, c, d jsou reálná čísla, pro něž je $ad - bc \neq 0$, se dá převést na integraci racionální funkce tím, že zavedeme novou proměnnou

$$t := \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,. \tag{65}$$

Podrobněji řečeno: Rozřešíme právě napsanou rovnici vzhledem k x a aplikujeme 2SM se substituující funkcí

$$x = \omega(t) := \frac{dt^s - b}{a - ct^s}\,. \tag{65*}$$

V konkrétních případech hledáme vždy maximální intervaly, v nichž má funkce (64) *primitivní funkci, a samozřejmě ověřujeme všechny předpoklady substituční metody.*

Příklad 9.10a. Integrujme funkci

$$f(x) := \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,; \tag{66}$$

snadno ověříme, že zlomek pod odmocninou je kladný, právě když je $x \in (1,2)$; primitivní funkci budeme proto hledat právě v tomto intervalu. Substituce

$$\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} = t\,, \ \text{ tj. } \ x = \omega(t) := \frac{2t^2+1}{t^2+1}\,, \ t \in \mathbb{R}_+\,, \tag{67}$$

předpoklady 2SM splňuje, protože všude v $\mathbb{R}_+$ je

$$\omega'(t) = \frac{2t}{(t^2+1)^2} > 0 \tag{68}$$

a $\omega(\mathbb{R}_+) = (1,2)$. 2SM vede k identitám

$$\begin{aligned} f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{t^2+1}{2t^2+1}\cdot t\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)} \\ &= \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{2t^2+1} = \big(2\operatorname{arctg} t - \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t)\big)' \end{aligned} \tag{69}$$

platným v $\mathbb{R}_+$; v intervalu $(1,2)$ platí proto rovnost

$$f(x) = \left(2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2(x-1)}{2-x}}\right)'. \tag{70}$$

Příklad 9.10b. Funkce

$$f(x) := \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \tag{71}$$

je definována všude v $\mathbb{R}$ až na body $0, 1$ a je ve svém definičním oboru spojitá; má tedy primitivní funkce v intervalech $I_1 := (-\infty, 0)$, $I_2 := (0,1)$, $I_3 := (1, +\infty)$. Užijeme substituci

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t\,, \ \text{ tj. } \ x = \omega(t) := \frac{t^3+1}{t^3-1}\,. \tag{72}$$

Protože je

$$\omega'(t) = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} < 0 \ \text{ pro všechna } \ t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}\,, \tag{73}$$

jsou předpoklady 2SM splněny v každém z intervalů $J_1 := (-\infty, 0)$, $J_2 := (0,1)$, $J_3 := (1, +\infty)$. Protože je

$$\omega(-\infty+) = 1\,, \ \ \omega(0\pm) = -1\,, \ \ \omega(1-) = -\infty\,, \ \ \omega(1+) = +\infty\,, \ \ \omega(+\infty-) = 1\,,$$

zobrazuje funkce ω intervaly J_1, J_2, J_3 po řadě na intervaly $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, *které bohužel nejsou totožné s intervaly I_k, v nichž máme hledat funkci primitivní k f*. Abychom dospěli k poněkud lepší shodě, označme

$$(74') \qquad K_1' := (0,1)\,,\ K_1'' := (-1,0)\,,\ K_2 := (-\infty,-1)\,,\ K_3 := J_3 = (1,+\infty)\,.$$

Pak je

$$(74'') \quad \omega(K_1') = (-\infty,-1)\,,\ \ \omega(K_1'') = (-1,0)\,,\ \ \omega(K_2) = (0,1)\,,\ \ \omega(K_3) = I_3$$

a podle 2SM budeme v intervalech $(74')$ hledat primitivní funkci funkce

$$(75') \qquad g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = \left(\frac{t^3-1}{t^3+1}\right)^2 \cdot t \cdot \frac{-6\,t^2}{(t^3-1)^2} = -\frac{6\,t^3}{(t^3+1)^2}\,,$$

kterou ovšem nejdříve rozložíme na jednoduché zlomky:

$$(75'') \qquad g(t) = -\frac{2}{3}\,\frac{1}{t+1} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} - \frac{5}{3}\,\frac{1}{t^2-t+1} - \frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2} + \frac{1}{(t^2-t+1)^2}\,.$$

Substitucí $(2t-1)/\sqrt{3} = z$ a užitím 1SM dojdeme k rovnosti

$$-\frac{5}{3}\,\frac{1}{t^2-t+1} = \left(-\frac{10}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,;$$

touž substitucí a navíc integrací per partes získáme další rovnost

$$\frac{1}{(t^2-t+1)^2} = \left(\frac{1}{3}\,\frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)' \ \text{ v } \mathbb{R}\,.$$

Primitivní funkce k ostatním sčítancům v $(75'')$ jsou jistě patrné na první pohled.

Malou úpravou výsledků dostaneme pak tuto funkci primitivní ke $g(t)$:

$$\frac{2}{3}\Big(\frac{t+1}{t^2-t+1} - \lg|t+1| - \frac{1}{t+1}\Big) + \frac{1}{3}\,\lg(t^2-t+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\,.$$

Dosadíme-li za t podle (72) a upravíme-li opět výsledek, získáme identitu

$$(76) \qquad f(x) = \frac{1}{3}\left[\lg\left(\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right) - 2\lg\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right| - 3\,\frac{x-1}{x}\,\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right)\right)\right]',$$

zatím ovšem jen v intervalech (74″). Funkce $f(x)$ i funkce napsaná vpravo v závorkách [ ] je však spojitá v bodě -1; podle V.9.6 platí proto rovnost (76) v celém intervalu $I_1 = (-\infty, 0)$. Protože v intervalech I_2, I_3 žádné problémy nebyly, je tím integrace funkce (71) dokončena.

* * *

Příklad 9.11. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R(\sin x, \cos x)\,, \tag{77}$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných.

A. Předpokládejme nejdříve, že funkce f je spojitá v nějakém otevřeném intervalu $I \subset (-\pi, \pi)$. Položíme-li

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x = t \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\pi, \pi)\,, \tag{78}$$

bude

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,; \tag{78′}$$

užijeme-li 2SM s funkcí

$$\omega(t) := 2 \operatorname{arctg} t\,, \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{79}$$

inverzní k (78), jejíž derivace

$$\omega'(t) = \frac{2}{1+t^2} > 0$$

je racionální, bude racionální i funkce

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,.$$

Integraci funkce (77) *lze tedy substitucí* (79) *převést na integraci racionální funkce.* Je-li $G(t)$ funkce primitivní ke $g(t)$ v $\omega_{-1}(I)$, je $F(x) := G(\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)$ funkce primitivní k $f(x)$ v I.

Připomeňme ještě identity, které se často užívají při úpravě výsledků:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} & \text{pro všechna} \;\; x \not\equiv \pi \mod 2\pi \\[2ex] \dfrac{1-\cos x}{\sin x} & \text{pro všechna} \;\; x \not\equiv 0 \mod \pi \end{array} \right\}. \quad \square \tag{80}$$

Je-li $I \subset (0, 2\pi)$, lze s výhodou užít substituci

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}x = t\,, \quad \text{tj.} \;\; x = \omega_1(t) := 2 \operatorname{arccotg} t\,, \;\; t \in \mathbb{R}; \tag{81}$$

v tom případě však je

$$\text{(81')} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \quad \cos x = -\frac{1-t^2}{1+t^2}\,, \quad \omega_1'(t) = -\frac{2}{1+t^2}\,.$$

B. Máme-li funkci tvaru (77) integrovat v intervalu obsaženém v některém z intervalů $I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ (resp. $J_k := (2k\pi, 2(k+1)\pi)$), kde $k \in \mathbb{Z}$, můžeme užít opět substituci $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$ (resp. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}x = t$); inverzní k ní bude nyní ovšem funkce

$$\text{(79')} \qquad \omega(t) := 2 \operatorname{arctg} t + 2k\pi \quad (\text{resp. } \omega(t) := 2 \operatorname{arccotg} t + 2k\pi).$$

Můžeme však také uvážit, že f je 2π-periodická funkce, posunout interval I o vhodný sudý násobek čísla π tak, aby posunutý interval I^* ležel v I_0 (resp. v J_0), najít primitivní funkci v I^* a nakonec se (s využitím periodicity) vrátit zpět do I.

C. Je-li funkce (77) spojitá v $\mathbb{R}$ a známe-li její primitivní funkci F_0 v intervalu $I_0 = (-\pi, \pi)$, lze její primitivní funkci v $\mathbb{R}$ získat např. tímto postupem:

Protože f je spojitá v kompaktním intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, je v něm omezená, takže je $|f| \le M$ pro vhodnou konstantu $M \in \mathbb{R}_+$. Pro každé dva body x', x'' z I_0 existuje podle *věty o přírůstku funkce* [6]) bod ξ (ležící mezi body x', x'') tak, že

$$|F_0(x'') - F_0(x')| = |F_0'(\xi)(x'' - x')| = |f(\xi)(x'' - x')| \le M|x'' - x'|;$$

z toho ihned plyne platnost BC podmínky [7]) nutné a postačující k tomu, aby existovaly konečné limity $F_0(\pi-)$, $F_0(-\pi+)$.

Položíme-li $F_0(\pi) := F_0(\pi-)$, bude funkce F_0 spojitá v polouzavřeném intervalu $I_0^* := (-\pi, \pi\rangle$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ bude funkce F_k definovaná podmínkou

$$\text{(82)} \qquad F_k(x) := F_0(x - 2k\pi) \ \text{ pro všechna } \ x \in I_k^* := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\rangle$$

spojitá v I_k^* a primitivní k f v $I_k = ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Číslo

$$\text{(83)} \qquad \Delta := F_k((2k+1)\pi-) - F_{k+1}((2k+1)\pi+) = F_0(\pi-) - F_0(-\pi+)$$

pak nezávisí na k a snadno nahlédneme, že funkce

$$\text{(84)} \qquad F := F_k + k\Delta \ \text{ v } \ I_k^* \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{Z}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$. Podle V.9.6 je funkcí primitivní k f také v celém $\mathbb{R}$.

D. Je-li f spojitá v nějakém (otevřeném) intervalu délky $\le 2\pi$, který není částí žádného z intervalů I_k resp. J_k, lze při hledání funkce primitivní k f v I postupovat podobně jako v C; vysvětlíme to na příkladě, z něhož bude patrná jak podstata problému, tak i jeho řešení:

---

[6]) Máme na mysli tzv. Lagrangeovu větu o přírůstku funkce: *Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci všude v (a, b), existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.*

[7]) BC podmínka zní v našem případě takto: *Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje $P^+(-\pi)$ (resp. $P^-(\pi)$) tak, že pro každé dva body x', x'' z tohoto okolí je $|F(x'') - F(x')| < \varepsilon$.*

Je-li f spojitá např. v intervalu $I := (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, substituujeme $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ v každém z intervalů $(-\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Nechť F_1 resp. F_2 je funkce primitivní k f v prvním resp. ve druhém z těchto intervalů. Nejdříve rozšíříme F_1 spojitě na interval $(-\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$ tím, že položíme $F_1(\pi) := F_1(\pi-)$. Pak najdeme číslo $\Delta := F_1(\pi) - F_2(\pi+)$ a definujeme

$$(85') \qquad F := \begin{cases} F_1 & \text{v } (-\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle \\ F_2 + \Delta & \text{v } (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases} .$$

Z definice čísla Δ plyne, že $F(\pi+) = F_2(\pi+) + \Delta = F_1(\pi) = F(\pi)$, takže F je spojitá v celém intervalu I; podle V.9.6 je tam funkcí primitivní k f.

Postupovali jsme tak, aby vynikla podobnost s postupem vysvětleným v bodě C; nechceme-li však zavádět (v tomto případě dost zbytečné) číslo Δ, stačí definovat:

$$(85'') \qquad F := \begin{cases} F_1 & \text{v } (-\frac{1}{2}\pi, \pi) \\ F_1(\pi-) & \text{v bodě } \pi \\ F_2 - F_2(\pi+) + F_1(\pi-) & \text{v } (\pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases} .$$

Poznamenejme[8]), že existence konečných limit $F_1(\pi-)$, $F_2(\pi+)$ plyne z existence funkce G primitivní k f v celém I (sr. v V.9.2); funkce G je samozřejmě v I spojitá, a má tedy v bodě π (dokonce oboustrannou) limitu. Pak stačí uvážit, že funkce F_1 resp. F_2 se od G liší v $(-\frac{1}{2}\pi, \pi)$ resp. v $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ jen o aditivní konstantu.

E. Má-li funkce f periodu π, převedeme její integraci na integraci racionální funkce substitucí $\operatorname{tg} x = t$; substituci lze ovšem užít jen v intervalech obsažených v některém z intervalů $K_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ve 2SM pak položíme $\omega(t) := \operatorname{arctg} t + k\pi$, $t \in \mathbb{R}$, a užijeme vzorce

$$(86) \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}, \quad \omega'(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

z nichž první dva platí pro všechna $x \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi$. V intervalech obsažených v některém z intervalů $L_k := (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, lze užít substituci $\operatorname{cotg} x = t$.

Tyto substituce mají (proti substitucím $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ resp. $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x = t$) tu výhodu, že *jako výsledek vyjde jednodušší racionální funkce*. Ukažme to na příkladě: Je-li

$$(87) \qquad f(x) := \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x},$$

dostaneme po substituci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ resp. $\operatorname{tg} x = t$ funkci

$$\frac{16t^4}{t^8 - 4t^6 + 22t^4 - 4t^2 + 1} \cdot \frac{2}{t^2+1} \quad \text{resp.} \quad \frac{t^4}{t^4+1} \cdot \frac{1}{t^2+1} .$$

[8]) Zejména pro čtenáře, kteří si všimli, že píšeme jisté limity bez odůvodnění, že existují.

Po dosazení $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ vznikl z $f(x)$ zlomek, jehož jmenovatel má stupeň dvakrát větší než jmenovatel zlomku vzniklého dosazením $\operatorname{tg} x = t$; je to způsobeno rozdíly mezi vzorci (78′) a (prvních dvou identit z) (85). [9])

Je-li funkce f spojitá a π-periodická v celém $\mathbb{R}$ (jako v právě uvedeném příkladě), je třeba po nalezení primitivních funkcí v každém z intervalů K_k (resp. L_k) zkonstruovat primitivní funkci v $\mathbb{R}$ např. způsobem vyloženým v části C.

Je-li f spojitá v nějakém otevřeném intervalu I délky $\leq \pi$, který není částí žádného K_k a žádného L_k, můžeme postupovat podobně jako v části D.

F. Má-li funkce f tvar

$$f(x) := R(\sin x)\cos x \quad \text{resp.} \quad f(x) := R(\cos x)\sin x\,, \tag{88}$$

kde R je racionální funkce, užijeme 1SM, v níž položíme $\sin x = y$ resp. $\cos x = y$; dostaneme tím racionální funkci $R(y)$ resp. $-R(y)$. [10])

Příklad 9.11a. Protože maximálními intervaly, v nichž je spojitá funkce

$$f(x) := \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,, \tag{89}$$

jsou intervaly $I_k := ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, užijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$, přesněji substituci (79′). Užitím vzorců (78′) a 2SM dospějeme k identitám

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = \frac{t^2+2t+1}{t^2+1} = 1 + \frac{2t}{t^2+1} = \big(t + \lg(t^2+1)\big)'$$

platným v celém $\mathbb{R}$. Dosazením $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ pak získáme funkci

$$F(x) := \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x + \lg(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}x + 1) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x - \lg(\cos^2\tfrac{1}{2}x) \tag{90}$$

primitivní k $f(x)$ v každém I_k.

Poznamenejme, že jsme se při substituci $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$ mohli omezit na interval I_0; přesněji řečeno, mohli jsme aplikovat 2SM s funkcí (79), jejíž obor hodnot je I_0. (Tím bychom se vyhnuli trochu složitějším rovnostem (79′).) Došli bychom k závěru, že funkce (90) (s $x \in I_0$) je funkcí primitivní k $f(x)$ v I_0. Kdybychom pak definovali $F(x)$ jako výraz za druhým rovnítkem v (90) všude, kde má tento výraz smysl (tedy ve sjednocení všech I_k), bylo by vzhledem k jeho π-periodicitě a k π-periodicitě funkce $f(x)$ zřejmé, že $F(x)$ je funkcí primitivní k $f(x)$ v každém intervalu I_k. (Pro každé $x \in I_k$ je $x - k\pi \in I_0$ a vzhledem π-periodicitě je $(F(x))' = (F(x-k\pi))' = f(x-k\pi) = f(x)$ podle věty o diferencování superpozice.)

[9]) Příklad jsme vybrali tak, aby bylo zřejmé, že první substituce může být v některých případech *zcela nevhodná*, protože její výsledek nemusíme umět (na rozdíl od výsledku druhé substituce) rozložit na jednoduché zlomky.

[10]) Připomeňme, že ve většině případů, kdy lze užít obě substituční metody, dáváme přednost první z nich. Kdybychom hledali funkci primitivní k funkci tvaru (88) v intervalu I, v němž není sin resp. cos ryze monotónní, nemohli bychom druhou metodu v celém I vůbec aplikovat.

Příklad 9.11b. Na rozdíl od příkladu 9.11a je funkce

$$f(x) := \frac{1+\sin x}{2+\cos x} \tag{91}$$

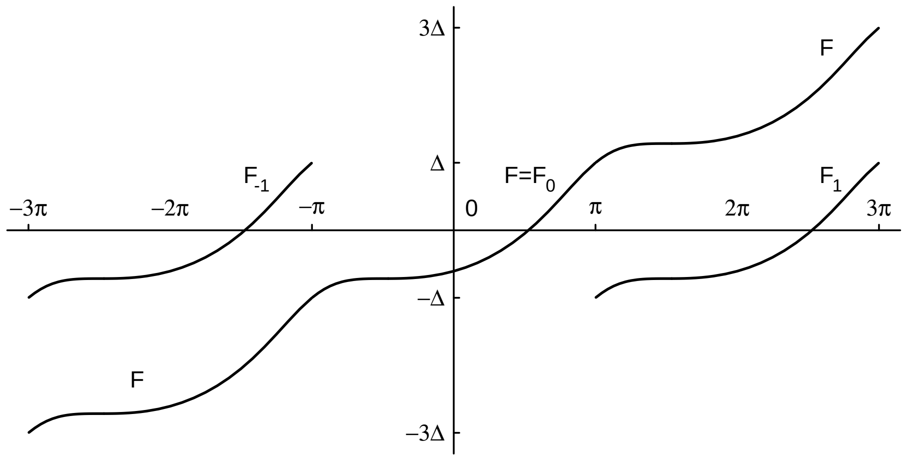
spojitá v celém $\mathbb{R}$. Aplikace 2SM s funkcí $\omega(t) = 2\operatorname{arctg} t$ vede k rovnostem

$$\begin{aligned} h(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) &= \frac{(1+t)^2}{3+t^2}\,\frac{2}{1+t^2} = \frac{2}{3+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{3+t^2} \\ &= \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + \lg\frac{1+t^2}{3+t^2}\Big)' \end{aligned}$$

platným pro všechna $t \in \mathbb{R}$; funkce

$$F_0(x) := \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\operatorname{tg}\frac12 x}{\sqrt{3}}\Big) + \lg\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac12 x}{3+\operatorname{tg}^2\frac12 x} \tag{92}$$

je proto funkcí primitivní k $f(x)$ v I_0.



K PŘÍKLADU 9.11B

Položme $F_0(\pi) := F_0(\pi-) = \pi/\sqrt{3}$; takto rozšířená funkce F_0 je spojitá v intervalu $I_0^* := (-\pi, \pi\rangle$. Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ označme

$$I_k := \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)\,, \quad I_k^* := \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big\rangle \tag{93}$$

a v I_k^* definujme funkci F_k podmínkou $F_k(x) := F_0(x - 2k\pi)$. (Protože funkce F_0 je 2π-periodická, je $F_k(x)$ v I_k rovno pravé straně rovnosti (92) a $F_k((2k+1)\pi) := \pi/\sqrt{3}$.) Funkce F_k je spojitá v I_k^* a zároveň je funkcí primitivní k f v I_k. Položíme-li

$$\Delta := F_k((2k+1)\pi) - F_{k+1}((2k+1)\pi+) = F_0(\pi) - F_0(-\pi+) = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,\pi\,, \tag{94}$$

je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad I_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{95}$$

funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11c. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} \tag{96}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$ a funkci k ní primitivní (v $\mathbb{R}$) lze najít pomocí 1SM: V intervalech $K_k := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, vytkneme z čitatele i jmenovatele výraz $\cos^2 x$ a $f(x)$ upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 1)}{\cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 4)} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{(\operatorname{tg}^2 x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + 4)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,; \tag{96'}$$

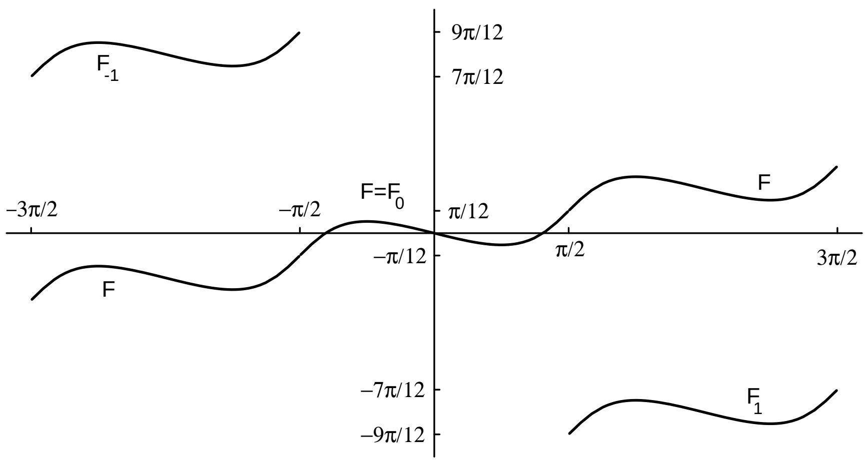
pak v 1SM položíme $\operatorname{tg} x = y$. Protože rovnosti

$$g(y) := \frac{y^2 - 1}{(y^2+1)(y^2+4)} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{y^2+4} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{y^2+1} = \Big(\frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{arctg} y\Big)'$$

platí všude v $\mathbb{R}$, je funkce

$$F_k(x) := \tfrac{5}{6}\operatorname{arctg}\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x\big) - \tfrac{2}{3}x \tag{97}$$

funkcí primitivní k $f(x)$ v K_k.



K PŘÍKLADU 9.11C

Funkci F_k rozšíříme spojitě na interval $K_k^* := (\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi\rangle$ tím, že položíme $F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi) := F_k(\frac{1}{2}(2k+1)\pi-) := \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$; protože $F_{k+1}(\frac{1}{2}(2k+1)\pi+) = -\frac{5}{12}\pi - \frac{1}{3}(2k+1)\pi$, je

$$\Delta := F_k(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi) - F_{k+1}(\tfrac{1}{2}(2k+1)\pi+) = \tfrac{5}{6}\pi$$

a funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná podmínkou

$$F := F_k + k\Delta \quad \text{v} \quad K_k^* \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{98}$$

je funkcí primitivní k f v celém $\mathbb{R}$.

Příklad 9.11d. Funkce

$$f(x) := \frac{\sin x}{(2\cos x - 1)(2\sin^2 x - 1)} \tag{99}$$

má primitivní funkce v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod x, v němž je buď $\cos x = \frac{1}{2}$, nebo $\sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maximálními intervaly s touto vlastností jsou intervaly

$$\begin{aligned} A_k &:= (2k\pi - \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi), \quad & B_k &:= (2k\pi - \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi), \\ C_k &:= (2k\pi + \tfrac{1}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi), \quad & D_k &:= (2k\pi + \tfrac{1}{3}\pi, 2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi), \\ E_k &:= (2k\pi + \tfrac{3}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi), \quad & F_k &:= (2k\pi + \tfrac{5}{4}\pi, 2k\pi + \tfrac{5}{3}\pi), \end{aligned} \tag{100}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. V každém z nich napíšeme $f(x)$ ve tvaru

$$f(x) = \frac{-\sin x}{(2\cos x - 1)(2\cos^2 x - 1)}, \tag{99'}$$

položíme $\cos x = y$ a aplikujeme 1SM. Zbývá najít primitivní funkci funkce

$$g(y) := \frac{1}{(2y-1)(2y^2-1)} \tag{101}$$

v intervalech, které neobsahují žádný z bodů $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Čtenář snadno ověří, že identita

$$g(y) = \frac{a}{2y-1} + \frac{b}{\sqrt{2}\,y - 1} + \frac{c}{\sqrt{2}\,y + 1}, \tag{102}$$

kde

$$a = -2, \quad b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1), \quad c = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \tag{103}$$

je rozkladem $g(y)$ na jednoduché zlomky. Funkce

$$G(y) := -\lg|2y-1| + \frac{b}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}\,y - 1| + \frac{c}{\sqrt{2}}\lg|\sqrt{2}\,y + 1|, \tag{104}$$

kterou lze napsat také ve tvaru

$$G(y) = -\lg|2y-1| + \tfrac{1}{2}\lg|2y^2-1| + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\lg\left|\frac{\sqrt{2}y-1}{\sqrt{2}y+1}\right|, \tag{104'}$$

je proto funkcí primitivní ke $g(y)$ (v intervalech, které neobsahují žádný z bodů $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$) a funkce $G(\cos x)$, tj. funkce

$$F(x) := -\lg|2\cos x-1| + \tfrac{1}{2}\lg|2\cos^2 x-1| + \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\lg\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|, \tag{105}$$

funkcí primitivní k $f(x)$ v každém z intervalů (100).

* * *

Příklad 9.12. Integrace funkcí tvaru

$$f(x) := R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \tag{106}$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných a $a \neq 0$, b, c jsou konstanty.

Označíme

$$p(x) := ax^2+bx+c, \quad P := \{x \in \mathbb{R} : p(x) > 0\}, \quad D := b^2-4ac \tag{107}$$

a vyšetříme tyto dva případy:

A. $a \in \mathbb{R}_-$ a p má dva různé reálné kořeny $x_1 < x_2$, takže $P = (x_1, x_2)$.

B. $a \in \mathbb{R}_+$ a p má dva různé kořeny – buď reálné, nebo imaginární. [11])

V případě **A** vysvětlíme dvě metody hledání funkce primitivní k funkci (106):

A1. Je-li $x \in P$, je $p(x) = -a(x-x_1)(x_2-x)$ a všechny tři faktory jsou kladné. Vytkneme-li před odmocninu z $p(x)$ např. výraz (x_2-x), tj. napíšeme-li

$$\sqrt{p(x)} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{-a}\,(x_2-x)\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}, \tag{108}$$

změní se (106) na funkci tvaru $R^*(x, \sqrt{(x-x_1)/(x_2-x)}$, kde R^* je zřejmě opět racionální funkce. Dále tedy můžeme postupovat jako v odstavci 9.10. [12])

A2. Napišme $p(x)$ ve tvaru

$$p(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = -a\left(\frac{D}{4a^2} - \left(x-\frac{b}{2a}\right)^2\right); \tag{109}$$

[11]) Jen tyto dva případy přinesou totiž něco nového: Je-li $a = b = 0$ a $c \geq 0$, je $f(x)$ racionální funkce; je-li $a = b = 0$ a $c < 0$, nemá odmocnina v (106) smysl. Případ $a = 0 \neq b$ jsme již vyšetřili v odstavci 9.10. Má-li p dvojnásobný kořen x_0 a je-li $a < 0$, má odmocnina smysl jen v bodě x_0; je-li $a > 0$, je $\sqrt{p(x)} = \sqrt{a(x-x_0)^2} = \pm\sqrt{a}\,(x-x_0)$ a $f(x)$ je racionální funkce.

[12]) Lze vytknout i výraz $x - x_1$; *ať již však vytýkáme cokoli, měli bychom pečlivě zkontrolovat znaménko vytýkaného výrazu.*

protože předpokládáme, že $p(x)$ má dva různé reálné kořeny, je $D > 0$, takže lze provést substituci

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{-2a}\, y\,. \tag{110}$$

Tím $p(x)$ přejde ve výraz $d(1 - y^2)$, kde $d := -D/4a$. Další substitucí $y = \sin t$ nebo $y = \cos t$ pak dostaneme funkci tvaru (77) z odstavce 9.11. $\square$

Má-li polynom p za situace **B** imaginární kořeny, je $P = \mathbb{R}$; má-li reálné kořeny

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;<\; x_2 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \tag{111}$$

je $P = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$. V obou případech je funkce

$$\psi(x) := \sqrt{a}\, x + \sqrt{ax^2 + bx + c} \tag{112}$$

diferencovatelná všude v P. Její derivace

$$\psi'(x) = \sqrt{a} + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{113}$$

tam nemá žádný kořen, protože z rovnosti $\psi'(x) = 0$ by plynula – jak čtenář snadno ověří – rovnost $D = 0$. Substituční rovnice $\psi(x) = t$, kterou je obvyklé psát spíše ve tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}\, x\,, \tag{114}$$

má pro $x \in P$ a $t \in \psi(P)$ právě jedno řešení

$$x = \omega(t) := \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\, t + b}\,. \tag{115}$$

Funkce $\psi : P \to \mathbb{R}$ a $\omega : \psi(P) \to_{\text{na}} P$ jsou navzájem inverzní, přičemž druhá z nich splňuje všechny předpoklady 2SM v každém otevřeném intervalu $J \subset \psi(P)$. Protože $\omega(t)$ je racionální funkce proměnné t, platí totéž o její derivaci

$$\omega'(t) = 2\, \frac{\sqrt{a}\, t^2 + bt + \sqrt{a}\, c}{(2\sqrt{a}\, t + b)^2}\,; \tag{116}$$

totéž však platí i o výrazu

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}\, \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\, t + b} = \frac{\sqrt{a}\, t^2 + bt + \sqrt{a}\, c}{2\sqrt{a}\, t + b}\,. \tag{117}$$

Z toho plyne, že substituce (114), jedna z tzv. **Eulerových substitucí**, převádí (za situace **B**, tj. při $a > 0$) integraci funkce (106) na integraci racionální funkce.

Z početního hlediska je velmi výhodné, že *při aplikaci Eulerovy substituce v konkrétních příkladech není nutné ověřovat předpoklady druhé substituční metody*, protože jsme je ověřili obecně.

Všimněme si ještě, že poslední zlomky ve (116) a (117) jsou velmi podobné; je-li navíc $a = 1$, je v jejich čitatelích totéž co pod odmocninou na levé straně (114) – jen x je třeba nahradit t. Této podobnosti lze využít při kontrole správnosti výpočtů v konkrétních situacích.

Bylo by zbytečné pamatovat si (115); daleko lépe se asi pamatuje Eulerova substituce (114). Z této substituční rovnice vypočteme x jako funkci t, tj. najdeme funkci ω. Z toho, co jsme dokázali, plyne, že při výpočtech nebudeme mít žádné potíže, jako je např. nula ve jmenovateli nebo nejednoznačnost výsledku.

Příklad 9.12a. Hledejme funkci primitivní k funkci

$$f(x) := x\sqrt{6 + x - x^2}\,. \tag{118}$$

Protože koeficient u x^2 je záporný a protože polynom pod odmocninou má kořeny -2 a 3, je $(-2, 3)$ (jediný) maximální interval, v němž primitivní funkce existuje. Napišme $f(x)$ ve tvaru $x\,(3-x)\sqrt{(x+2)/(3-x)}$, položme

$$\sqrt{\frac{x+2}{3-x}} = t\,, \quad \text{tj.} \;\; x = \omega(t) := \frac{3t^2-2}{t^2+1}\,, \tag{119}$$

a vypočítejme

$$\omega'(t) = \frac{10t}{(t^2+1)^2}\,, \quad 3 - x = \frac{5}{t^2+1}\,. \tag{120}$$

Protože $(-2, 3) = \omega(\mathbb{R}_+)$, budeme hledat funkci primitivní k funkci

$$\begin{aligned} g(t) :&= f(\omega(t))\,\omega'(t) = \frac{3t^2-2}{t^2+1}\cdot\frac{5}{t^2+1}\cdot t\cdot\frac{10t}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{150}{(t^2+1)^2} - \frac{400}{(t^2+1)^3} + \frac{250}{(t^2+1)^4} \end{aligned} \tag{121}$$

v $\mathbb{R}_+$. Násobíme-li identity (28_2), (28_3), (28_4) po řadě čísly 150, -400, 250 a sečteme-li výsledky, dostaneme (po evidentní úpravě) identitu

$$g(t) = \Big(\frac{25}{8}\operatorname{arctg} t + \frac{25}{8}\,\frac{t}{t^2+1} - \frac{575}{12}\,\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{125}{3}\,\frac{t}{(t^2+1)^3}\Big)' \tag{122}$$

platnou všude v $\mathbb{R}_+$. Dosadíme-li podle první rovnosti ve (119) a druhé rovnosti ve (120), dostaneme (po úpravě) tento konečný výsledek:

$$f(x) = \left(\frac{25}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+2}{3-x}} - \frac{8x^2-2x-51}{8}\sqrt{6+x-x^2}\right)' \;\text{ v }\; (-2, 3)\,. \tag{123}$$

Příklad 9.12b. Vzhledem k tomu, že polynom $-x^2+5x-4$ má kořeny 1 a 4, budeme primitivní funkci funkce

$$f(x) := \sqrt{-x^2+5x-4} \tag{124}$$

hledat v intervalu $I := (1,4)$; abychom ilustrovali i druhý možný postup za situace **A**, užijeme tentokrát rozklad

$$-x^2+5x-4 = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}\left[1-\left(\frac{2x-5}{3}\right)^2\right]; \tag{125}$$

při lineární substituci

$$\tfrac{1}{3}(2x-5) = t \ \text{ neboli } \ x = \omega(t) := \tfrac{1}{2}(3t+5) \tag{126}$$

odpovídá intervalu I proměnné x interval $J := (-1,1)$ proměnné t a $\omega'(t) = \frac{3}{2}$.

Podle 2SM sestrojíme funkci

$$g(t) := f(\omega(t))\,\omega'(t) = \tfrac{9}{4}\sqrt{1-t^2}, \quad t \in J, \tag{127}$$

a provedeme hned další substituci $t = \tau(s) := \sin s$, $s \in K := (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Její derivace $\tau'(s) = \cos s$ je v K kladná, přičemž $\tau(K) = J$. Aplikujeme opět 2SM a píšeme

$$\begin{aligned} h(s) :&= g(\tau(s))\,\tau'(s) = \tfrac{9}{4}\cos^2 s = \tfrac{9}{8}(1+\cos 2s) \\ &= \left(\tfrac{9}{8}(s+\tfrac{1}{2}\sin 2s)\right)' = \left(\tfrac{9}{8}(s+\sin s\cos s)\right)' \end{aligned} \tag{128}$$

pro všechna $s \in K$. Protože v K je $\cos s = \sqrt{1-\sin^2 s}$ [13]), je

$$g(t) = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\,\right)' \ \text{ v } \ (-1,1), \tag{129}$$

takže

$$f(x) = \left(\tfrac{9}{8}\arcsin\tfrac{1}{4}(2x-5) + \tfrac{1}{4}(2x-5)\sqrt{-x^2+5x-4}\,\right)' \ \text{ v } \ (1,4). \tag{130}$$

Příklad 9.12c. Protože je $x^2+4x+5 > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, má funkce

$$f(x) := x\sqrt{x^2+4x+5} \tag{131}$$

---

[13]) Obecně je $\cos u = \pm\sqrt{1-\sin^2 u}$ (a podobně $\sin u = \pm\sqrt{1-\cos^2 u}$); *před užitím kterékoli z těchto identit je třeba vždy pečlivě zvážit, které znaménko je v té které konkrétní situaci správné.* Kdybychom se např. rozhodli pro substituci $t = \cos s$ v intervalu $(-\pi, 0)$, museli bychom $\sin s$ nahrazovat výrazem $-\sqrt{1-\cos^2 s}$.

primitivní funkce v celém $\mathbb{R}$. Položíme-li $\sqrt{x^2+4x+5} = t - x$, bude

$$x = \omega(t) := \frac{t^2-5}{2\,(t+2)}\,, \quad \omega'(t) = \frac{t^2+4t+5}{2\,(t+2)^2}\,, \tag{132a}$$

$$\sqrt{x^2+4x+5} = t - \frac{t^2-5}{2\,(t+2)} = \frac{t^2+4t+5}{2\,(t+2)}\,; \tag{132b}$$

podle 2SM budeme proto v intervalu $(-2,+\infty) = \omega_{-1}(\mathbb{R})$ [14]) integrovat funkci

$$\begin{aligned} g(t) :&= f(\omega(t))\,\omega'(t) = \frac{t^2-5}{2\,(t+2)} \cdot \frac{t^2+4t+5}{2\,(t+2)} \cdot \frac{t^2+4t+5}{2\,(t+2)^2} \\ &= \frac{t^2-3}{8} - \frac{1}{t+2} - \frac{1}{8\,(t+2)^2} - \frac{1}{2\,(t+2)^3} - \frac{1}{8\,(t+2)^4}\,. \end{aligned} \tag{133}$$

Dostaneme tak identitu

$$g(t) = \left(\frac{t^3}{24} - \frac{3t}{8} - \lg(t+2) + \frac{1}{8\,(t+2)} + \frac{1}{4\,(t+2)^2} + \frac{1}{24\,(t+2)^3}\right)'. \tag{134}$$

Dosazením $t = x + \sqrt{x^2+4x+5}$ a algebraickou úpravou výsledku (při níž vynecháme nepodstatnou aditivní konstantu $5/12$) získáme identitu

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{3}\,(x^2+x-1)\sqrt{x^2+4x+5} - \lg\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\,\right)\right)' \tag{135}$$

platnou všude v $\mathbb{R}$.

Poznámka 9.5. Protože funkce lze často integrovat několika různými způsoby, může se stát, že získané výsledky se na první pohled dosti podstatně liší; jeden z nich může např. obsahovat funkci arcsin nebo arccos, druhý funkci arctg. Snad je proto vhodné připomenout, že platí např. identity

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}\,, \tag{136$'$}$$

$$\arccos x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{pro všechna } x \in (-1, 1\rangle\,. \tag{136$''$}$$

I když však tyto identity při porovnávání výsledků užijeme, nemusíme dostat stejnou primitivní funkci; v každém intervalu by se však výsledky měly lišit nejvýše o aditivní konstantu.

* * *

[14]) Tento interval lze najít např. tak, že vypočítáme limity v $\pm\infty$ (ryze monotónní) funkce $\psi(x) := x + \sqrt{x^2+4x+5}$, která je funkcí inverzní k funkci $\omega(t)$.

Příklad 9.13. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu. Tak zde budeme nazývat rovnice tvaru

$$y' + fy = g\,, \tag{137}$$

kde

(138) funkce f, g jsou spojité v jistém intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Říkáme, že funkce $y : (a,b) \to \mathbb{R}$ je **řešení**[15]) této rovnice (v intervalu (a,b)), je-li všude v (a,b) diferencovatelná a splňuje-li identitu

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x) \tag{137'}$$

pro každé $x \in (a,b)$.

Obecným řešením rovnice (137) (v intervalu (a,b)) se nazývá množina všech jejích řešení (v (a,b)); **rozřešit** rovnici (137) znamená najít její obecné řešení.

Integračním faktorem rovnice (137) nazýváme každou funkci tvaru $\pm \exp \circ F$, kde $F \in PF(f; a, b)$. Podle V.9.2 integrační faktory existují; snadno přitom nahlédneme (sr. s V.9.1), že platí:

Je-li H integrační faktor rovnice (137), *jsou integračními faktory této rovnice právě všechny funkce tvaru kH, kde $0 \neq k \in \mathbb{R}$.*

Popišme nyní jednoduchý *algoritmus řešení* rovnice (137) (za předpokladu (138)):

1. Rovnici (137) vynásobíme (kterýmkoli) jejím integračním faktorem; protože tento faktor je všude nenulová funkce, je rovnost (137) *ekvivalentní* s rovností

$$(y' + fy) \cdot \exp \circ F = g \cdot \exp \circ F \tag{139}$$

v tom smyslu, že identita (137′) platí všude v (a,b), právě když všude v (a,b) platí identita

$$(y'(x) + f(x)y(x))\, e^{F(x)} = g(x)\, e^{F(x)}\,. \tag{139'}$$

2. Levá strana rovnice (139′) je zřejmě derivací funkce $y(x)e^{F(x)}$. Pravá strana této rovnice je funkce spojitá v (a,b), a má tam tedy primitivní funkce. Je-li $G(x)$ kterákoli z nich, je (139′) ekvivalentní s rovnicí

$$\big(y(x)e^{F(x)}\big)' = G'(x)\,. \tag{139''}$$

3. Právě napsaná rovnost derivací, platná všude v (a,b), je ekvivalentní s existencí konstanty $c \in \mathbb{R}$, pro niž je $y(x)e^{F(x)} = G(x) + c$ všude v (a,b), což je dále ekvivalentní s rovností

$$y(x) = e^{-F(x)}(G(x) + c) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (a,b)\,. \tag{140}$$

[15]) Často se podrobněji říká „*partikulární řešení*“.

Z postupu řešení je zřejmé, že

(141) *funkce* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *je řešením rovnice* (137), *právě když existuje* $c \in \mathbb{R}$ *tak, že platí* (140).

Zároveň je patrné, že

(142) *pro každá dvě čísla* $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *existuje právě jedno řešení* $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ *rovnice* (137) *tak, že* $y(x_0) = y_0$;

dosazením do (140) získáme ihned příslušnou konstantu $c = y_0\, e^{F(x_0)} - G(x_0)$.

Zadáme-li čísla $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, říkáme, že jsme zadali **počáteční podmínky řešení** rovnice (137); často se stručněji mluví o **počáteční podmínce** $y(x_0) = y_0$. Jak je patrné, zadání počáteční podmínky vede k výběru *právě jednoho* řešení z nekonečné množiny *všech* řešení rovnice (137) neboli z jejího *obecného řešení*.

Poznámka 9.6. Grafy řešení se nazývají *integrální křivky*. Tvrzení (142) názorně znamená, že každým bodem množiny $(a, b) \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka.

Příklad 9.13a. Rozřešme diferenciální rovnici

$$y' + xy = x\,. \tag{143}$$

Protože je $x = \left(\frac{1}{2}x^2\right)'$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je funkce $\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ integračním faktorem rovnice. Kromě toho je $xe^{x^2/2} = \left(e^{x^2/2}\right)'$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Řešeními rovnice (143) jsou tedy právě všechny funkce $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$y(x) = e^{-x^2/2} \cdot \left(e^{x^2/2} + c\right) = 1 + ce^{x^2/2}, \text{ kde } c \in \mathbb{R}. \tag{144}$$

Řešení y, splňující např. počáteční podmínku $y(0) = 0$, získáme dosazením této rovnosti do (144); odpovídající konstantou je zřejmě $c = -1$.

Příklad 9.13b. Rozřešme diferenciální rovnici

$$y' + y \operatorname{cotg} x = \cos x\,; \tag{145}$$

maximálními intervaly, v nichž jsou spojité funkce $\operatorname{cotg} x$ a $\cos x$ jsou intervaly $I_k := (k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Protože v každém I_k je

$$\operatorname{cotg} x = (\lg|\sin x|)', \ \ \cos x\,|\sin x| = \cos x \cdot (-1)^k \sin x = \left((-1)^k \tfrac{1}{2} \sin^2 x\right)', \tag{146}$$

je funkce $y : I_k \to \mathbb{R}$ řešením rovnice (145), právě když existuje konstanta c_k tak, že rovnost

$$y(x) = \frac{(-1)^k}{\sin x}\left(\tfrac{1}{2}(-1)^k \sin^2 x + c_k\right) = \tfrac{1}{2}\sin x + \frac{(-1)^k c_k}{\sin x} \tag{147}$$

platí pro všechna $x \in I_k$. Protože každé číslo c_k lze napsat ve tvaru $(-1)^k d_k$, lze ekvivalentně říci, že funkce $y : I_k \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice (145), právě když existuje konstanta $d_k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\sin x + \frac{d_k}{\sin x} \quad \text{pro všechna } x \in I_k\,. \tag{147'}$$

Řešení y (v I_k), které splňuje počáteční podmínku $y\big(\frac{1}{2}(2k+1)\pi\big) = 0$, se získá dosazením do (147′); odpovídá mu konstanta $d = -\frac{1}{2}$. $\square$

Algoritmus řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu pomocí integračního faktoru není v zásadě nijak složitý; často však narazíme na neodstranitelnou překážku související s tím, že primitivní funkce některých jednoduchých spojitých funkcí nepatří mezi tzv. *elementární funkce* [16]). Ilustrujme to příkladem:

Příklad 9.13c. Rovnice

$$y' - 2xy = 1\,, \tag{148}$$

na první pohled jednodušší než rovnice (143), má řešení opět v celém $\mathbb{R}$. Protože jejím integračním faktorem je funkce $\exp(-x^2)$, je rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$\big(ye^{-x^2}\big)' = e^{-x^2}\,, \tag{149}$$

jejíž pravá strana patří mezi nejznámější funkce, které nemají elementární primitivní funkci. Označíme-li však $\mathrm{Erf}(x)$ funkci primitivní k $\exp(-x^2)$ splňující podmínku $\mathrm{Erf}(0) = 0$, můžeme v algoritmu pokračovat: Všude v $\mathbb{R}$ je

$$y(x)e^{-x^2} = \mathrm{Erf}(x) + c\,, \quad \text{tedy} \quad y(x) = (\mathrm{Erf}(x) + c)\,e^{x^2}\,, \tag{150}$$

kde c je libovolná konstanta. Tím je popsáno obecné řešení rovnice (148).

Pokud poněkud předběhneme a užijeme výsledků z kapitoly 10, můžeme funkci $\mathrm{Erf}(x)$ napsat ve tvaru

$$\mathrm{Erf}(x) = \int_0^x e^{-x^2}dx\,, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{151}$$

druhý ze vztahů (150) lze pak nahradit rovností

$$y(x) = e^{x^2}\Big(\int_0^x e^{-x^2}dx + c\Big), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{150'}$$

z níž je patrné na první pohled, kterou funkci jsme integrovali. [17])

---

[16]) Jsou to zhruba řečeno funkce, které nelze vytvořit z „běžných funkcí“ (jako jsou obecné mocniny, exponenciály, logaritmy, goniometrické a cyklometrické funkce) *konečným počtem* algebraických operací a superpozic.

[17]) Funkce (151) („Er*ror function*“) má principiální význam pro teorii pravděpodobnosti, ale také např. pro některé fyzikální obory; až na multiplikativní konstantu $2/\sqrt{\pi}$ je to tzv. *pravděpodobnostní integrál*, jehož hodnoty jsou již desítky let podrobně tabelovány.

Cvičení

V každém z příkladů 9.01– 9.148 je úkolem najít funkci primitivní k dané funkci, a to ve všech maximálních (otevřených) intervalech, v nichž existuje; α a β jsou libovolná reálná čísla.

9.01. $x^3 \sin x^2$

9.02. $x^5 e^{-x^2}$

9.03. $x^3 \lg(1+x^2)$

9.04. $x^\alpha \lg x$

9.05. $x \sin x$

9.06. $x \cos x$

9.07. $x^2 \sin x$

9.08. $x^2 \cos x$

9.09. $x^3 \sin x$

9.10. $x^3 \cos x$

9.11. $\sin^2 x$

9.12. $\cos^2 x$

9.13. $\sin^3 x$

9.14. $\cos^3 x$

9.15. $x \sinh x$

9.16. $x \cosh x$

9.17. $x^2 \sinh x$

9.18. $x^2 \cosh x$

9.19. $\arcsin x$

9.20. $\operatorname{arctg} x$

9.21. $x^2 \operatorname{arctg} x$

9.22. $x^2 \operatorname{arccotg} x$

9.23. $x^2 \arcsin x$

9.24. $x^2 \arccos x$

9.25. $\dfrac{x}{x^4+1}$

9.26. $\dfrac{x^3}{x^4+1}$

9.27. $\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

9.28. $\dfrac{\cos x}{1+3\sin^2 x}$

9.29. $\dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1}$

9.30. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$

9.31. $\dfrac{1}{x \lg^2 x\,(\lg x - 1)}$

9.32. $\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x - 3}$

9.33. $\dfrac{1}{e^{2x}-1}$

9.34. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

9.35. $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

9.36. $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

9.37. $\dfrac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$

9.38. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

9.39. $\dfrac{x}{\sin^2 x}$

9.40. $\dfrac{x}{\cos^2 x}$

9.41. $\dfrac{1}{x^4-1}$

9.42. $\dfrac{4x^2}{x^4-1}$

9.43. $\dfrac{1}{x^3+1}$

9.44. $\dfrac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}$

9.45. $\dfrac{3x-1}{x^2(x-1)^2}$

9.46. $\dfrac{32x^5}{(2x-1)^3}$

9.47. $\dfrac{x^5}{(x^2-4)^2}$

9.48. $\dfrac{x^6}{(x^2+2)^2}$

9.49. $\dfrac{1}{(x-1)^3(x+1)}$

9.50. $\dfrac{x^4}{(x^2-1)(x-2)}$

9.51. $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x}$

9.52. $\cos \alpha x \, \cos \beta x$

9.53. $\sqrt{x^2+1}$

9.54. $\sqrt{x^2-1}$

9.55. $\dfrac{1}{x^4+1}$

9.56. $\dfrac{x^2}{x^4+1}$

9.57. $3\sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

9.58. $\dfrac{\sin x}{(\cos x-1)(2\cos x-1)}$

9.59. $\dfrac{1}{\sin x\,(2\cos^2 x-1)}$

9.60. $\dfrac{\sinh x}{\cosh x\,(\sinh^2 x-3)}$

9.61. $\dfrac{6\lg x}{x\,(\lg^2 x-1)(\lg^2 x-4)}$

9.62. $\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

9.63. $\dfrac{x^3+2x+2}{x^3-3x^2+2x}$

9.64. $\dfrac{2x^2+6x+5}{x^4+5x^2+4}$

9.65. $\dfrac{x^4-6x^2+81}{x\,(x^2-9)^2}$

9.66. $\dfrac{x^4}{x^3-2x^2-5x+6}$

9.67. $\dfrac{7x^2-x+5}{x^4+x^2+1}$

9.68. $\dfrac{x^4+x^3-4x^2+20x+16}{(x+2)^3(x-2)^2}$

9.69. $\dfrac{x^5+3x^4+2x^3+4x^2+2x+2}{x^2\,(x^2+2x+2)}$

9.70. $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2(x^2-2x+2)(x-1)^2}$

9.71. $\dfrac{e^{2x}}{e^{4x}+1}$

9.72. $\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$

9.73. $\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}-1}$

9.74. $\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+e^{x}+1}$

9.75. $\dfrac{1}{e^{2x}-e^{x}+1}$

9.76. $\dfrac{e^{x}}{e^{4x}+1}$

9.77. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg^2 x}{\lg^3 x+8}$

9.78. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg^2 x}{(\lg x-1)^2}$

9.79. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg x+1}{\lg^2 x-\lg x+1}$

9.80. $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\lg^4 x-1}$

9.81. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\lg(2x)}{\lg^2 x+3}$

9.82. $\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\lg^3 x-5\lg^2 x+6\lg x}$

9.83. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

9.84. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$

9.85. $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$

9.86. $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$

9.87. $\dfrac{1}{x-3}\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$

9.88. $(x-3)\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$

9.89. $x\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$

9.90. $x^2\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$

9.91. $\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1}$

9.92. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+1}$

9.93. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}-4}$

9.94. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}}$

9.95. $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$

9.96. $\dfrac{2\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}-2\sqrt[3]{x+3}+2}$

9.97. $\dfrac{2\sqrt[3]{x-1}+1}{2\sqrt[3]{x-1}-1}$

9.98. $\dfrac{\cos x}{\cos x+1}$

9.99. $\dfrac{\sin x}{\sin x+1}$

9.100. $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x-1}$

9.101. $\dfrac{1}{(1-\cos x)\sin x}$

9.102. $\dfrac{1}{(1+\cos x)\sin x}$

9.103. $\dfrac{1}{2\sin^2 x-1}$

9.104. $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

9.105. $\dfrac{\cos x}{\sin x-\cos x}$

9.106. $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$

9.107. $\dfrac{2\sin x}{\sin^2 x+1}$

9.108. $\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$

9.109. $\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

9.110. $\dfrac{1}{\sin x+2}$

9.111. $\dfrac{1}{\cos x+3}$

9.112. $\dfrac{\sin x}{\sin^4 x-1}$

9.113. $\dfrac{\cos x}{(\sin x-1)(\sin^2 x+1)}$

9.114. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-4\sin x\cos x}$

9.115. $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(4\sin^2 x-1)}$

9.116. $\dfrac{1}{(2\sin^2 x-1)(2\cos^2 x-1)}$

9.117. $\dfrac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

9.118. $\dfrac{1}{3\cos x+4\sin x+5}$

9.119. $\dfrac{\sin x+\sin^3 x}{\cos x+\cos^3 x}$

9.120. $\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}$

9.121. $\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+3}$

9.122. $\dfrac{1}{\cos^2 x-4\cos x\sin x+5\sin^2 x}$

9.123. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x+2}$

9.124. $\dfrac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+2\cos^2 x}$

9.125. $\sqrt{x^2+2x-3}$

9.126. $x\sqrt{x^2+2x-3}$

9.127. $\frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x-3}$

9.128. $\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+2x-3}$

9.129. $\sqrt{x^2-5x+4}$

9.130. $x\sqrt{x^2-5x+4}$

9.131. $\frac{1}{x}\sqrt{x^2-5x+4}$

9.132. $\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2-5x+4}$

9.133. $\sqrt{(x-1)(5-x)}$

9.134. $\sqrt{x^2+x+1}$

9.135. $\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+1}$

9.136. $\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2+x+1}$

9.137. $x\sqrt{x^2+x+1}$

9.138. $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

9.139. $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{\sqrt{x^2-x+1}-x}$

9.140. $\dfrac{x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

9.141. $\dfrac{1}{x\sqrt{8+2x-x^2}}$

9.142. $\dfrac{15}{x^2\sqrt{15-2x-x^2}}$

9.143. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

9.144. $\dfrac{2x}{\sqrt{9-x^2}-(9-x^2)}$

9.145. $\dfrac{8x^3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4}}$

9.146. $\dfrac{x+1}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}}$

9.147. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

9.148. $\dfrac{1}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}$

V příkladech 9.149 – 9.170 je úkolem najít obecná řešení příslušných rovnic, a to v maximálních intervalech, v nichž existují.

9.149. $y'-xy=x$

9.150. $y'-y=x^3$

9.151. $y'-x^2y=x^2$

9.152. $y'+y=e^x$

9.153. $y'-y=e^x\sin x$

9.154. $y'+y=\sin x$

9.155. $y'+3x^2y=3x^5$

9.156. $y'+y=5e^x\sin x$

9.157. $y'+\sin x\cdot y=\sin x$

9.158. $y'+\dfrac{y}{x}=x$

9.159. $y'+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$

9.160. $y'+\dfrac{y}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9.161. $y'+\dfrac{y}{x\lg x}=1$

9.162. $y'+\dfrac{xy}{x^2+1}=x$

9.163. $y'+\lg x\cdot y=x^{-x}$

9.164. $y'-\operatorname{tg} x\cdot y=x$

9.165. $y' + \dfrac{x^2 y}{x^3 - 1} = x^2$

9.166. $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 3x$

9.167. $y' + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9.168. $y' + \dfrac{y}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = 1$

9.169. $y' + \dfrac{y}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} = x$

9.170. $y' - \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}} = 3\sqrt{1+x^2}$

Řešení

Připomeňme, že lze napsat „$F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in M$", protože derivování se provádí v množině M „bod po bodu", ale případě, že M je např. sjednocením dvou disjunktních intervalů (a, b), (c, d), je třeba říci, že „F je primitivní funkcí funkce f v (a, b) a v (c, d)", protože pojem primitivní funkce byl zaveden jen v (otevřených) intervalech. (P ř í k l a d : Lze napsat „$\bigl(x(\lg|x| - 1)\bigr)' = \lg|x|$ pro všechna $x \neq 0$", ale je třeba říci, že „$x(\lg|x| - 1)$ je funkce primitivní k funkci $\lg|x|$ v intervalech $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$".)

V seznamu řešení příkladů 9.01 − 9.148 dáme přednost prvnímu způsobu zápisu, protože je stručnější; každá z funkcí uvedených v následujícím seznamu má tedy v uvedeném oboru derivaci rovnou funkci zadané pod týmž číslem ve Cvičení.

9.01. $\frac{1}{2}(\sin x^2 - x^2 \cos x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.02. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}\bigl(2 + 2x^2 + x^4\bigr)$ v $\mathbb{R}$

9.03. $\frac{1}{4}(x^4 - 1)\lg(1 + x^2) + \frac{1}{8}x^2(2 - x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.04. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\bigl((\alpha+1)\lg x - 1\bigr) & \text{pro } \alpha \neq -1 \\ \frac{1}{2}\lg^2 x & \text{pro } \alpha = -1 \end{array}\right\}$ v $\mathbb{R}_+$

9.05. $\sin x - x\cos x$ v $\mathbb{R}$

9.06. $\cos x + x\sin x$ v $\mathbb{R}$

9.07. $(2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$ v $\mathbb{R}$

9.08. $(x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x$ v $\mathbb{R}$

9.09. $(6 - x^2)x\cos x + 3(x^2 - 2)\sin x$ v $\mathbb{R}$

9.10. $(x^2 - 6)x\sin x + 3(x^2 - 2)\cos x$ v $\mathbb{R}$

9.11. $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.12. $\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.13. $-\frac{1}{3}\cos x\,(2 + \sin^2 x)$ $(= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.14. $\frac{1}{3}\sin x\,(2+\cos^2 x)\ \ (=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x)$ v $\mathbb{R}$

9.15. $x\cosh x-\sinh x$ v $\mathbb{R}$

9.16. $x\sinh x-\cosh x$ v $\mathbb{R}$

9.17. $(x^2+2)\cosh x-2x\sinh x$ v $\mathbb{R}$

9.18. $(x^2+2)\sinh x-2x\cosh x$ v $\mathbb{R}$

9.19. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ v $(-1,1)$

9.20. $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\lg(x^2+1)$ v $\mathbb{R}$

9.21. $\frac{1}{6}(2x^3\,\mathrm{arctg}\,x+\lg(x^2+1)-x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.22. $\frac{1}{6}(2x^3\,\mathrm{arccotg}\,x-\lg(x^2+1)+x^2)$ v $\mathbb{R}$

9.23. $\frac{1}{9}(3x^3\arcsin x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\,)$ v $(-1,1)$

9.24. $\frac{1}{9}(3x^3\arccos x-(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\,)$ v $(-1,1)$

9.25. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2$ v $\mathbb{R}$

9.26. $\frac{1}{4}\lg(x^4+1)$ v $\mathbb{R}$

9.27. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ v $\mathbb{R}$

9.28. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}\sin x)$ v $\mathbb{R}$

9.29. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$ v $\mathbb{R}$

9.30. $\lg\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$ pro $x\neq 0$

9.31. $\lg\left|1-\dfrac{1}{\lg x}\right|+\dfrac{1}{\lg x}$ pro $x\in\mathbb{R}_+,\ 1\neq x\neq e$

9.32. $-\frac{1}{2}\lg(3-2\cos^2 x)$ v $\mathbb{R}$

9.33. $\frac{1}{2}\lg|e^{2x}-1|-x$ pro $x\neq 0$

9.34. $\frac{1}{2}\arcsin^2 x$ v $(-1,1)$

9.35. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\lg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ v $(-1,1)$

9.36. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ v $(-1,1)$

9.37. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\lg(x+\sqrt{1+x^2}\,)$ v $\mathbb{R}$

9.38. $\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \lg\sqrt{1-x^2}$ v $(-1,1)$

9.39. $\lg|\sin x| - x\operatorname{cotg} x$ pro $x \neq k\pi$

9.40. $\lg|\cos x| + x\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$

9.41. $\frac{1}{4}\lg\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ pro $x \neq \pm 1$

9.42. $\lg\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + 2\operatorname{arctg} x$ pro $x \neq \pm 1$

9.43. $\frac{1}{3}\lg\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$ pro $x \neq -1$

9.44. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$ v $\mathbb{R}$

9.45. $\lg\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-1}$, je-li $0 \neq x \neq 1$

9.46. $\frac{4}{3}x^3 + 3x^2 + 6x + 5\lg|2x-1| - \dfrac{5}{2(2x-1)} - \dfrac{1}{4(2x-1)^2}$ pro $x \neq \frac{1}{2}$

9.47. $\frac{1}{2}x^2 + 4\lg|x^2-4| - \dfrac{8}{x^2-4}$ pro $x \neq \pm 2$

9.48. $\frac{1}{3}x^3 - 4x + 5\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{2x}{x^2+2}$ v $\mathbb{R}$

9.49. $\dfrac{1}{8}\lg\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ pro $x \neq \pm 1$

9.50. $\dfrac{1}{6}\Big(\lg\left|\dfrac{x+1}{(x-1)^3}\right| + 32\lg|x-2| + 3x^2 + 12x\Big)$, je-li $\pm 1 \neq x \neq 2$

9.51. $2\sqrt{x} - \lg(x+\sqrt{x}+1) - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}$ v $\mathbb{R}_+$

9.52.
$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\sin(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} + \dfrac{\sin(\alpha-\beta)x}{\alpha-\beta}\Big) & \text{pro } \alpha^2 \neq \beta^2 \\ \dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{\sin\alpha x\cos\alpha x}{\alpha}\Big) & \text{pro } \alpha^2 = \beta^2 \neq 0 \\ x & \text{pro } \alpha = \beta = 0 \end{array}\right\}$$

9.53. $\frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+1} + \lg(x+\sqrt{x^2+1})\big)$ v $\mathbb{R}$

9.54. $\frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2-1} - \lg|x+\sqrt{x^2-1}|\big)$, je-li $|x| > 1$

9.55. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) + \lg\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Big)$ v $\mathbb{R}$

9.56. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\Big(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + 2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1) - \lg\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Big)$ v $\mathbb{R}$

9.57. $2\sqrt{x^3}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \lg(x+1) - x$ v $\mathbb{R}_+$

9.58. $\lg\left|\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-1}\right|$, je-li $0\not\equiv x\not\equiv\pm\frac{1}{3}\pi \mod 2\pi$

9.59. $\dfrac{1}{2}\Big(\lg\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+\sqrt{2}\lg\left|\dfrac{\sqrt{2}\cos x+1}{\sqrt{2}\cos x-1}\right|\Big)$, je-li $k\pi\neq x\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{4}$

9.60. $\frac{1}{8}\lg\dfrac{|\sinh^2 x-3|}{\cosh^2 x}$ pro $x\neq\pm\operatorname{argsinh}\sqrt{3}$

9.61. $\lg\left|\dfrac{\lg^2 x-4}{\lg^2 x-1}\right|$ pro $x\in\mathbb{R}_+-\{e,e^{-1},e^2,e^{-2}\}$

9.62. $x\big(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\big)+\lg\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{|x+\sqrt{x^2-1}|}$, je-li $|x|>1$

9.63. $x+\lg|x|-5\lg|x-1|+7\lg|x-2|$ pro $x\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$

9.64. $\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x+\lg\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$ v $\mathbb{R}$

9.65. $\lg|x|-\dfrac{6}{x^2-9}$, je-li $0\neq x\neq\pm 3$

9.66. $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{16}{15}\lg|x+2|-\frac{1}{6}\lg|x-1|+\frac{81}{10}\lg|x-3|$
pro $x\in\mathbb{R}-\{-2,1,3\}$

9.67. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(7\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+5\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)+\frac{1}{2}\lg\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ v $\mathbb{R}$

9.68. $\lg|x+2|-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$ pro $x\neq\pm 2$

9.69. $\frac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{x}-\lg(x^2+2x+2)+3\operatorname{arctg}(x+1)$ pro $x\neq 0$

9.70. $\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(x-1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{10}\lg\dfrac{(x^2+1)(x-1)^{10}}{(x^2-2x+2)^6}-\dfrac{1}{x-1}$ pro $x\neq 1$

9.71. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x}$ v $\mathbb{R}$

9.72. $e^x-\operatorname{arctg} e^x$ v $\mathbb{R}$

9.73. $e^x+\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|$ pro $x\neq 0$

9.74. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2e^x+1}{\sqrt{3}}$ v $\mathbb{R}$

9.75. $x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2e^x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\lg(e^{2x}-e^x+1)$ v $\mathbb{R}$

9.76. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Big(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}e^x+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}e^x-1)+\frac{1}{2}\lg\dfrac{e^{2x}+\sqrt{2}e^x+1}{e^{2x}-\sqrt{2}e^x+1}\Big)$ v $\mathbb{R}$

9.77. $\frac{1}{3}\lg|\lg^3 x+8|$ v $\mathbb{R}_+-\{e^{-2}\}$

9.78. $\lg x + 2\lg|\lg x - 1| - \dfrac{1}{\lg x - 1}$ v $\mathbb{R}_+ - \{e\}$

9.79. $\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2\lg x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\lg(\lg^2 x - \lg x + 1)$ v $\mathbb{R}_+$

9.80. $\frac{1}{4}\lg\left|\dfrac{\lg x - 1}{\lg x + 1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\lg x)$ v $\mathbb{R}_+ - \{e, e^{-1}\}$

9.81. $\dfrac{\lg 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\lg x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\lg(\lg^2 x + 3)$ v $\mathbb{R}_+$

9.82. $\frac{1}{6}\lg|\lg x| - \frac{1}{2}\lg|\lg x - 2| + \frac{1}{3}\lg|\lg x - 3|$ v $\mathbb{R}_+ - \{1, e^2, e^3\}$

9.83. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}} - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2(x-1)}{2-x}}$ v $(1, 2)$

9.84. $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}} - \sqrt{(x-1)(2-x)}$ v $(1, 2)$

9.85. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}} - \dfrac{4}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3(2-x)}{2(x-3)}}$ v $(2, 3)$

9.86. $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}\,\dfrac{x-2}{3-x}} - \dfrac{\sqrt{(x-2)(3-x)}}{3x}$ v $(2, 3)$

9.87. $\arcsin\dfrac{2x-9}{3}$ nebo $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$ v $(3, 6)$

9.88. $\dfrac{27}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}} + \frac{1}{4}(x-6)(2x+3)\sqrt{\dfrac{x-3}{6-x}}$ v $(3, 6)$

9.89. $\dfrac{7}{2}\left(\lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} + 1\right| - \lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} - 1\right|\right) + \frac{1}{2}(x+4)(x-5)\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$
v $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$

9.90. $\dfrac{25}{2}\left(\lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} - 1\right| - \lg\left|\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}} + 1\right|\right)$

$+ \frac{1}{6}(x+4)(2x^2 - 9x + 49)\sqrt{\dfrac{x+2}{x+4}}$ v $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$

9.91. $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt{3}}\right) + 2\left(\lg(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1) - \sqrt{x}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

9.92. $\frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{x} - \sqrt{x(x+1)} - \lg(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\,\right)$ v $\mathbb{R}_+$

9.93. $\frac{1}{5}\left(48\lg|\sqrt[3]{x+2} - 4| - 3\lg|\sqrt[3]{x+2} + 1| + 15\sqrt[3]{x+2}\,\right)$,
je-li $-3 \neq x \neq 62$

9.94. $3\left(\sqrt[3]{x-1} - \lg|\sqrt[3]{x-1} + 1|\right)$, je-li $0 \neq x \neq 1$

9.95. $(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}} - \dfrac{1}{2}\left(\lg|x-1| + 3\lg\left|\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}} - 1\right|\right)$

$+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}} + 1\right)\right)$ pro $x \neq 1$

9.96. $6\lg\left(\sqrt[3]{(x+3)^2} - 2\sqrt[3]{x+3} + 2\right) + 3\sqrt[3]{(x+3)^2} + 12\sqrt[3]{x+3}$

$-\,12\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt[3]{x+3} - 1\right)$

9.97. $x + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x-1}\right) + \frac{3}{4}\lg\left|2\sqrt[3]{x-1} - 1\right|$ pro $x \neq \frac{9}{8}$

9.98. $x - \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$, je-li $x \not\equiv \pi \mod 2\pi$

9.99. $x + \dfrac{\cos x}{\sin x + 1}$, je-li $x \not\equiv -\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$

9.100. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\cos x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\lg\dfrac{1-\cos^3 x}{(1-\cos x)^3}$, je-li $x \neq 2k\pi$

9.101. $\dfrac{1}{2(\cos x - 1)} + \frac{1}{4}\lg\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$, je-li $x \not\equiv 0 \mod \pi$

9.102. $\dfrac{1}{2(\cos x + 1)} + \frac{1}{4}\lg\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ pro $x \not\equiv 0 \mod \pi$

9.103. $\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right|$ pro $x \neq \frac{1}{4}(2k+1)\pi$

9.104. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lg\left|\dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right|$ pro $x \neq \frac{1}{4}(2k+1)\pi$

9.105. $\frac{1}{2}\left(\lg|\sin x - \cos x| - x\right)$ pro $x \neq \frac{1}{4}(4k+1)\pi$

9.106. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg\left|\dfrac{1-\cos x + (1-\sqrt{2})\sin x}{1-\cos x + (1+\sqrt{2})\sin x}\right|$ pro $x \not\equiv \frac{1}{4}\pi \mod \pi$

9.107. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\lg\dfrac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}$ v $\mathbb{R}$

9.108. $-\,\mathrm{arctg}(\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.109. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(2\sin^2 x - 1)$ v $\mathbb{R}$

9.110. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{2+\sin x - 2\cos x}{\sqrt{3}\sin x} + k\pi\right) & \text{v } ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = (2k+1)\pi \end{array}\right\}$

9.111. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{2}\sin x} + k\pi\right) & \text{v } ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi) \\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} & \text{pro } x = (2k+1)\pi \end{array}\right\}$

9.112. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\lg\dfrac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}-\dfrac{1}{2\cos x}$ pro $x\neq\frac{1}{2}(2k+1)\pi$

9.113. $\frac{1}{4}\lg\dfrac{(1-\sin x)^2}{1+\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin x)$ pro $x\neq\frac{1}{2}(4k+1)\pi$

9.114. $\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x-\cos x}\right|$, je-li $k\pi+\frac{1}{6}\pi\neq x\neq k\pi+\frac{1}{3}\pi$

9.115. $\dfrac{1}{3}\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\lg\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}\right|\right)$, je-li $\frac{1}{2}\pi\not\equiv x\not\equiv\pm\frac{1}{6}\pi \mod \pi$

9.116. $\dfrac{\sin x\cos x}{1-2\cos^2 x}$ pro $x\neq\frac{1}{4}(2k+1)\pi$

9.117. $\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(2k\pi+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+1) & \\ +\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x-1)\big) & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right)\\ (2k+1)\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.118. $\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\sin x}{\cos x-2\sin x-1}, & \text{je-li } \pi\not\equiv x\not\equiv\pi+2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \mod 2\pi\\ 0 & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.119. $\frac{3}{2}\lg(\cos^2 x+1)-2\lg|\cos x|$ pro $x\neq\frac{1}{2}(2k+1)\pi$

9.120. $\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(k\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x+\cos x}{\sqrt{3}\cos x}\right) & \\ -\frac{1}{2}\lg(1+\sin x\cos x) & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right)\\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \text{pro } x=\frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.121. $\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{2\sin x}{\cos x+1}\right)+k\pi & \text{v } \left((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\right)\\ \frac{1}{2}(2k+1)\pi & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.122. $\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}(5\operatorname{tg}x-2)+k\pi & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right)\\ \frac{1}{2}(2k+1)\pi & \text{pro } \frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.123. $\left\{\begin{array}{ll}x-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+1}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}k\pi & \text{v } \left((2k-1)\pi,(2k+1)\pi\right)\\ (2k+1)(1-\sqrt{2})\pi & \text{pro } x=(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.124. $\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)+k\pi & \text{v } \left(\frac{1}{2}(2k-1)\pi,\frac{1}{2}(2k+1)\pi\right)\\ \frac{1}{2}(2k+1)\pi & \text{pro } \frac{1}{2}(2k+1)\pi\end{array}\right\}$

9.125. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3} - \lg\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2$

v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.126. $\frac{1}{6}(2x^2+x-9)\sqrt{x^2+2x-3} + \lg\left(x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)^2$

v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.127. $\sqrt{x^2+2x-3} - \lg\left|x+1-\sqrt{x^2+2x-3}\right|$

$+\,2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{3}}$ v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.128. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$

$+\lg\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right|$ v $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

9.129. $\frac{1}{4}(2x-5)\sqrt{x^2-5x+4} - \frac{9}{8}\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$

v $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

9.130. $\frac{1}{24}(8x^2-10x-43)\sqrt{x^2-5x+4} - \frac{45}{16}\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$

v $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

9.131. $\sqrt{x^2-5x+4} + 2\lg\left|\dfrac{5x-8+4\sqrt{x^2-5x+4}}{x}\right|$

$-\,\frac{5}{2}\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$ v $\mathbb{R}_-\cup(0,1)\cup(4,+\infty)$

9.132. $-\,\frac{5}{4}\lg\left|\dfrac{5x-8-4\sqrt{x^2-5x+4}}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x}$

$+\lg\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+4}\right|$ v $\mathbb{R}_-\cup(0,1)\cup(4,+\infty)$

9.133. $\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} - 4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}}$ nebo

$\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} + 2\arcsin\frac{1}{2}(x-3)$ v $(1,5)$

9.134. $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\lg\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)$

9.135. $\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\lg\left|2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right|$

$+\lg\left|\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right|$ v $\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+$

9.136. $\frac{1}{2}\lg\left|\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right| - \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

$+\lg\left(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1\right)$ v $\mathbb{R}_-\cup\mathbb{R}_+$

9.137. $\frac{1}{24}(8x^2+2x+5)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{16}\lg(2\sqrt{x^2+x+1}+2x+1)$ v $\mathbb{R}$

9.138. $\frac{15}{4}\lg(2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1)-4\lg(\sqrt{x^2-x+1}+x)$

$+\frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1}-x^2-x$ v $\mathbb{R}$

9.139. $\frac{1}{4}\lg(2\sqrt{x^2-x+1}+2x-1)-4\lg\left|\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right|$

$-\frac{1}{2}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1}-x^2-x$ v $\mathbb{R}-\{1\}$

9.140. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x+2}{4-x}}-\sqrt{8+2x-x^2}$ nebo

$\arcsin\frac{1}{3}(x-1)-\sqrt{8+2x-x^2}$ v $(-2,4)$

9.141. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\lg\left|\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{8+2x-x^2}-x-8}{x}\right|$ v $(-2,0)\cup(0,4)$

9.142. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\lg\left|\dfrac{\sqrt{15}\sqrt{15-2x-x^2}+x-15}{x}\right|-\dfrac{\sqrt{15-2x-x^2}}{x}$

v $(-5,0)\cup(0,3)$

9.143. $2\operatorname{arctg}\left(x-1+\sqrt{x^2-2}\right)$, je-li $|x|>\sqrt{2}$

9.144. $2\lg\left|\sqrt{9-x^2}-1\right|$, je-li $2\sqrt{2}\neq|x|<3$

9.145. $\frac{1}{15}\left((3x^2-8)\sqrt{(x^2+4)^3}-(3x^2+8)\sqrt{(x^2-4)^3}\right)$, je-li $|x|>2$

9.146. $\dfrac{2}{3}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ v $\mathbb{R}$

9.147. $\dfrac{1}{4}\left(\lg\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{|\sqrt{x^2-1}+x|}+x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$, je-li $|x|>1$

9.148. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\lg\dfrac{\sqrt{2-x}+(2+\sqrt{3})\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+(2-\sqrt{3})\sqrt{2+x}}$ v $(-2,2)$.

Následují obecná řešení diferenciálních rovnic 9.149 – 9.170; c znamená libovolnou reálnou konstantu.

9.149. $c\exp(-\frac{1}{2}x^2) - 1$ v $\mathbb{R}$

9.150. $ce^x - (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$ v $\mathbb{R}$

9.151. $c\exp(\frac{1}{3}x^3) - 1$ v $\mathbb{R}$

9.152. $\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$ v $\mathbb{R}$

9.153. $e^x(c - \cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.154. $ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.155. $x^3 - 1 + c\exp(-x^3)$ v $\mathbb{R}$

9.156. $e^x(2\sin x - \cos x) + ce^{-x}$ v $\mathbb{R}$

9.157. $1 + c\exp(\cos x)$ v $\mathbb{R}$

9.158. $\dfrac{c}{x} + \frac{1}{3}x^2$ v $\mathbb{R}_-$ a v $\mathbb{R}_+$

9.159. $1 + ce^{1/x}$ v $\mathbb{R}_-$ a v $\mathbb{R}_+$

9.160. $c\exp(\operatorname{cotg} x) + 1$ v $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

9.161. $\dfrac{c - x}{\lg x} + x$ v $(0, 1)$ a v $(1, +\infty)$

9.162. $\frac{1}{3}(x^2 + 1) + \dfrac{c}{\sqrt{x^2 + 1}}$ v $\mathbb{R}$

9.163. $(ce^x - 1)x^{-x}$ v $\mathbb{R}_+$

9.164. $1 + x\operatorname{tg} x + \dfrac{c}{\cos x}$ v $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

9.165. $\frac{1}{4}(x^3 - 1) + \dfrac{c}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ v $(-\infty, 1)$ a v $(1, +\infty)$

9.166. $\dfrac{c}{x + \sqrt{1 + x^2}} + 1 + 2x^2 - x\sqrt{1 + x^2}$ v $\mathbb{R}$

9.167. $1 + c\exp(-\arcsin x)$ v $(-1, 1)$

9.168. $x + \dfrac{c + \sqrt{1 - x^2}}{\arcsin x}$ v $(-1, 0)$ a v $(0, 1)$

9.169. $\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{c + x\sqrt{1 - x^2}}{\arcsin x} + 2x^2 - 1\Big)$ v $(-1, 0)$ a v $(0, 1)$

9.170. $x^2 + cx - 1 + (c + 2x)\sqrt{1 + x^2}$ v $\mathbb{R}$

Dodatek ke kapitole 9

Hledání funkce primitivní k funkci f je v literatuře nerozlučně spjato se symbolem $\int f(x)\,dx$, který se nazývá *neurčitý integrál* a v němž lze místo „integrační proměnné" x napsat kterékoli jiné, nezadané písmeno. Rovnost

$$\text{(i)} \qquad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x)+g(x))\,dx$$

má naznačit, že sečtením funkcí F, G primitivních k f, g získáme funkci primitivní k součtu $f+g$. Integrace per partes má při tomto značení tvar

$$\text{(ii)} \qquad \int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int f(x)\,G(x)\,dx\,,$$

přičemž $F(x) := \int f(x)\,dx$, $G(x) := \int g(x)\,dx$. Substituce se provádí prostřednictvím vzorce

$$\text{(iii)} \qquad \int f(x)\,dx = \int f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,.$$

Pokud zůstaneme na takovéto úrovni „vyprávění", neobjeví se žádný problém; hůře to ovšem dopadne, budeme-li chtít smysl symbolu $\int f(x)\,dx$ vysvětlit a dodržet při zacházení s ním běžná matematická pravidla. Máme v zásadě dvě možnosti: snažit se smysl uvedeného symbolu přesně definovat, nebo – zejména pokud se nám to nepovede – přestat tento symbol užívat. Autor se nesetkal s žádnou korektní definicí symbolu $\int f(x)\,dx$ a navíc jej považuje za zbytečný; důkaz, že primitivní funkce lze s úspěchem hledat bez tohoto symbolu, je podán v této kapitole. [18])

Ptejme se, co by mohl symbol $\int$ v identitách (i) – (iii) znamenat.

1) Nikdo se pravděpodobně symbolem $\int f(x)\,dx$ nesnaží přiřadit funkci f (řekněme raději v nějakém otevřeném intervalu I, jinak bude zmatek ještě větší) nějakou její *jednoznačně definovanou* primitivní funkci. Žádný návod použitelný v početní praxi, který by zaručil platnost všech rovností typu (i), totiž zřejmě neexistuje. Pokud autor (např. při řešení diferenciální rovnice) potřebuje jednoznačně definované primitivní funkce, nenapíše $\int f(x)\,dx$, ale např. $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, kde $x_0 \in I$, a zápis $\int_{x_0}^{x} f + \int_{x_0}^{x} g = \int_{x_0}^{x} (f+g)$ je samozřejmě zcela korektní. $\square$

V literatuře se kromě neurčitého prohlášení, že „$\int f(x)\,dx$ je funkce primitivní k $f(x)$" (bez jakéhokoli dalšího vysvětlení nebo kvantifikátoru), setkáme s dvěma „definicemi" tohoto symbolu.

---

[18]) Autorem korektního hledání primitivních funkcí je prof. Jan Mařík, který mnoho let pracoval na Karlově univerzitě; tento vynikající matematik, který mnoho energie věnoval metodice matematiky a jemuž dával často za pravdu i prof. Jarník, autor základních učebnic reálné analýzy, byl znám mj. jako tvrdý kritik všech nekorektností, nesrozumitelností a zbytečností.

2) Definuje-li se $\int f(x)\,dx$ jako *libovolná* funkce z $\mathrm{PF}(f;a,b)$, identita (i) *neplatí.* Je-li totiž na levé straně rovnosti (i) součet *libovolně, ale pevně vybraných* funkcí F, G (primitivních k f, g), *nemůže již být vpravo libovolně vybraná funkce*; musí tam být součet $F+G$. Situaci přitom *nelze zachránit* tím, že místo (i) napíšeme

$$\text{(i}'\text{)} \qquad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x)+g(x))\,dx + c\,,$$

kde c je konstanta. Uznáme-li totiž např. správnost identit $\int 2x\,dx = x^2 + c_1$, $\int 4x^3\,dx = x^4 + c_2$, kde c_1, c_2 jsou *libovolné* konstanty, bude rovnost $\int 2x\,dx + \int 4x^3\,dx = \int (2x+4x^3)\,dx = x^2 + x^4 + c$ platit jen v případě, že $c = c_1 + c_2$, tedy s *vhodně zvolenou, nikoli libovolnou* konstantou. Nesrovnalosti se tedy jen přenesou z funkcí na konstanty.

3) Při pokusu definovat $\int f(x)\,dx$ jako *množinu* $\mathrm{PF}(f;a,b)$, je třeba vysvětlit, že „+" v součtu $\mathrm{PF}(f;a,b) + \mathrm{PF}(g;a,b)$ na levé straně (i) *nemá* (*na rozdíl od součtu $f+g$ vpravo*) *význam obvyklého sčítání*. Smíříme-li se s tím a rozumíme-li znaménku + vlevo tak, že máme utvořit množinu všech součtů tvaru $F(x)+G(x)$, kde $F \in \mathrm{PF}(f;a,b)$, $G \in \mathrm{PF}(g;a,b)$, dostaneme tím skutečně množinu všech funkcí primitivních k $f+g$ v (a,b). Napišme však identitu (ii) ve tvaru

$$\text{(ii}''\text{)} \qquad \int F(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,G(x)\,dx = F(x)\,G(x)\,,$$

který by měl být s (ii) ekvivalentní; pak máme vlevo množinu všech funkcí primitivních k $Fg + fG$, vpravo jednu konkrétní funkci. Měli bychom se tedy nejen smířit s tím, že „+" má při hledání primitivních funkcí dva různé významy, ale zakázat i převádění výrazů z jedné strany rovnice na druhou? Nebo dovolíme, aby se nekonečná množina rovnala funkci? $\square$

Přestože ohromující procento uživatelů symbolu $\int$ je nakloněno tvrdit, že

$$\int f(x)\,dx - \int f(x)\,dx = 0\,,$$

což není pravda ani při definici z 2), ani z 3), nejvíce námitek lze mít proti identitě (iii). Ať již strany rovnosti (iii) znamenají funkci nebo množinu funkcí, rovnost nemůže nastat nikdy, protože vlevo se proměnná jmenuje x, vpravo t, a v naprosté většině případů mají primitivní funkce k f jiný definiční obor než funkce primitivní k $(f \circ \omega)\,\omega'$. Rovnost (iii) je tedy v příkrém rozporu se všeobecně přijatou definicí rovnosti funkcí. Kdybychom se snažili vadu odstranit, museli bychom sáhnout k poměrně složitému komentáři: Není-li ω ryze monotónní funkce, je po integraci vlevo třeba za x dosadit $\omega(t)$; v tomto případě lze ovšem (iii) užít jen „zprava doleva", tj. místo funkce primitivní k funkci tvaru $(f \circ \omega)\,\omega'$ hledat funkci primitivní k f. Je-li funkce ω ryze monotónní, lze (iii) aplikovat jak „zprava doleva", tak i „zleva doprava"; ve druhém případě je třeba po integraci vpravo za t dosadit $\omega_{-1}(x)$.

V obou případech lze ovšem substituci provést jen za dalších předpokladů, které jsme vysvětlili v textu o 1SM a 2SM. Naučí-li se někdo jen heslu, že „za dx se dosadí

$\omega'(t)\,dt$“, dojde asi brzy k nesmyslným výsledkům – autor se mnohokrát setkal např. se substitucí $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} t$ v intervalu $(0, 2\pi)$. $\square$

Uživatelé symbolu $\int$, včetně autorů různých tabulek „neurčitých integrálů“, píší i další nepřijatelné vzorce – např.

$$\text{(iv)} \qquad \int \frac{dx}{x} = \lg x + c \quad \text{resp.} \quad \int \frac{dx}{x} = \lg |x| + c\,.$$

První z nich, který užívají všechny autorovi známé počítačové programy, ignoruje, že funkce $1/x$ má primitivní funkci i v $\mathbb{R}_-$, kde výraz $\lg x$ nemá smysl; to pak vede k neúplným výsledkům např. při hledání funkce primitivní k f'/f, kde f je někde kladná, někde záporná.

Znamená-li levá strana druhé z identit (iv) např. nějakou funkci F splňující v $\mathbb{R} - \{0\}$ rovnost $F'(x) = 1/x$, liší se $F(x)$ od $\lg |x|$ v $\mathbb{R}_+$ obecně o jinou konstantu než v $\mathbb{R}_-$ a je velmi problematické obě tyto konstanty značit c. V případě „ještě nespojitějších“ funkcí je situace pochopitelně ještě horší; napíšeme-li např. rovnost

$$\text{(iv}'\text{)} \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \lg \left| \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x \right| + c\,,$$

znamená c v každém intervalu $((k-1)\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, obecně jinou konstantu. $\square$

Shrneme-li, vidíme, že obě uvedené, v literatuře převažující definice symbolu $\int f(x)\,dx$ vedou ke značným nekorektnostem, k nutnosti každou z napsaných identit buď komentovat, nebo tolerovat, že doslova vzato neplatí. Zavedení symbolu $\int$ navíc zakrývá, že nejčastěji užívané identity (i) – (iii) nejsou ničím novým, protože se jedná jen o parafráze dobře známých vět o diferencování součtu, součinu a superpozice.

Symbol $\int$, který je nejen zdrojem všech nepříjemností a nejasností, ale svádí i k formálnímu přístupu na úkor porozumění, je tedy zřejmě zbytečný a podle Occamovy břitvy měl být dávno z matematiky odstraněn. Způsob hledání primitivních funkcí, vyložený v této kapitole, je naopak zcela exaktní a nevyžaduje žádné licence, konvence a komentáře.

Symbol $\int$ ilustruje jednu z charakteristických vlastností kalkulu: Nevadí, že nevíme, co symbol znamená, a že např. znaky „+“ a „=“ užíváme jinak, než je obvyklé. Držme se třísetleté tradice a hlavně počítejme; výsledek snad bude možné šikovnou slovní ekvilibristikou, měnící se případ od případu, nějak vysvětlit.

10. Newtonův integrál

Definice. Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body a, b. Říkáme, že F je **zobecněnou primitivní funkcí funkce** f **v intervalu** I, je-li funkce F *spojitá* v I a platí-li rovnost $F' = f$ všude v $I - K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina. Slova „zobecněná primitivní funkce“ budeme často zkracovat na „z.p.f.“, množinu všech z.p.f. funkce f v intervalu I budeme značit $\mathrm{ZPF}(f;\, I)$.

Poznámka 10.1. Všimněme si, že funkce f může mít v intervalu I z.p.f., *aniž je všude v I definována*; stačí, aby byla definována *všude v I až na jistou konečnou množinu*. Všimněme si dále, že na rozdíl od primitivní funkce mluvíme o z.p.f. v libovolných (nejen tedy v otevřených) intervalech. [1]) □

Je zřejmé, že

$$F \in \mathrm{ZPF}(f;\, I),\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow F + c \in \mathrm{ZPF}(f;\, I). \tag{1}$$

Důležité však je, že platí i obrácené tvrzení:

Věta 10.1. *Je-li $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, I)$ a $G \in \mathrm{ZPF}(f;\, I)$, existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G = F + c$.*

V důsledku toho platí:

(2) *Má-li f v (a, b) primitivní funkci, je $\mathrm{ZPF}(f;\, (a, b)) = \mathrm{PF}(f; a, b)$.*

Věta 10.2. (Základní existenční věta.) *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a, b), je $\mathrm{ZPF}(f;\, \langle a, b\rangle) \neq \emptyset$ a každá z.p.f. funkce f v $\langle a, b\rangle$ je primitivní funkcí funkce f v (a, b).*

Příklad 10.1. A. Protože funkce $|x|$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a protože rovnost $|x|' = \operatorname{sgn} x$ platí pro všechna $x \neq 0$, je $|x|$ z.p.f. funkce $\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$.

B. Protože je $\lg|x| = x(\lg|x| - 1)'$ pro všechna $x \neq 0$ a $\lim\limits_{x \to 0} x(\lg|x| - 1) = 0$, je funkce

$$F(x) := \left\{ \begin{array}{cl} x(\lg|x| - 1) & \text{pro } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } \ x = 0 \end{array} \right\} \tag{3}$$

z.p.f. funkce $\lg|x|$ v $\mathbb{R}$.

C. Funkce $f(x) := \operatorname{sgn}(\cos x)$ nemá žádnou z.p.f. v $\mathbb{R}$ (obecněji: v žádném neomezeném intervalu), funkce $F(x) := \arcsin(\sin x)$ je však její z.p.f. v každém omezeném intervalu. [2])

---

[1]) V obou případech je právě takto zavedená terminologie výhodná všude tam, kde s pojmem primitivní resp. zobecněné primitivní funkce pracujeme.

[2]) To je samozřejmě důsledek definice, v níž se připouští pouze konečný počet výjimečných bodů, v nichž rovnost $F' = f$ neplatí. Definici z.p.f. by však bylo možné zobecnit tak, aby funkce F z příkladu 10.1C byla (podle obecnější definice) z.p.f. funkce f v celém $\mathbb{R}$. Dáváme však přednost vyslovené definici, protože je jednoduchá a protože s ní v dalším vystačíme.

Označení. Je-li $-\infty \le a < b \le +\infty$, je-li F spojitá v (a, b) a existují-li *konečné* limity $F(a+)$, $F(b-)$, budeme číslo

$$[F]_a^b \quad (\equiv [F(x)]_a^b) := F(b-) - F(a+) \tag{4}$$

nazývat **zobecněný přírůstek funkce** F **na intervalu** (a, b). Existují-li konečné limity $F(a+)$, $F(b-)$, budeme říkat, že zobecněný přírůstek **má smysl**; v opačném případě (tj. když některá z limit $F(a+)$, $F(b-)$ buď neexistuje, nebo není konečná) řekneme, že zobecněný přírůstek **nemá smysl**. $\square$

Všimněme si, že limitu $F(a+)$ resp. $F(b-)$ lze nahradit hodnotou $F(a)$ resp. $F(b)$, právě když je F spojitá v bodě a zprava resp. v bodě b zleva. *Je-li F spojitá v $\langle a, b\rangle$, je zobecněný přírůstek $[F]_a^b$ totožný s přírůstkem $F(b) - F(a)$ funkce F na intervalu $\langle a, b\rangle$.* $\square$

Předpokládejme, že

1) $-\infty \le a < b \le +\infty$ a že I je interval s krajními body a, b;

2) $\mathrm{ZPF}(f;\, (a, b)) \ne \emptyset$, $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, (a, b))$;

3) zobecněný přírůstek $[F]_a^b$ má smysl.

Protože každá z.p.f. k f v (a, b) se (podle V.10.1) od F liší jen aditivní konstantou, *nezávisí zobecněný přírůstek na bližší volbě funkce* $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, (a, b))$, a (za právě vyslovených předpokladů) má proto dobrý smysl tato definice:

Newtonův integrál funkce f **přes interval** I **s krajními body** $a < b$ definujeme rovností

$$\int_a^b f := [F]_a^b\,, \text{ kde } F \in \mathrm{ZPF}(f;\, (a, b)), \tag{5}$$

má-li její pravá strana smysl. Symbolu vlevo se též říká (Newtonův) integrál funkce f **od** a **do** b, číslo a resp. b je tzv. **dolní** resp. **horní mez** integrálu (5). Funkce f se nazývá **integrand** nebo **integrovaná funkce**, interval I je **integrační obor**.

Z praktických (i historických) důvodů se místo $\int_a^b f$ často píše např. $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b f(t)\, dt$, …, přičemž x, t, … se pak nazývá **integrační proměnná**.

P ř í k l a d :

$$\int_1^2 x^t\, dx \quad \text{resp.} \quad \int_1^2 x^t\, dt$$

znamená integrál *obecné mocniny* Id^t resp. *obecné exponenciály* $\exp_x$.

Symboly dx, dt, … (které čteme „dé iks“, „dé té“, … a které se do integrálu dostaly v souvislosti s historickými představami o tom, že integrál je jakýsi součet nekonečně mnoha nekonečně malých veličin) v současnosti jen vyznačují, „podle které proměnné se integruje“; to je samozřejmě nutné vědět, integruje-li se funkce více než jedné proměnné.

Úmluva. Protože se v dalším budeme zabývat jen Newtonovým integrálem, budeme mluvit krátce o *integrálu*. $\square$

Poznámka 10.2. Danou funkci f lze integrovat v daných mezích a, b podle celé řady více nebo méně obecných definic integrálu, z nichž každá má své výhody i nevýhody. Newtonův integrál se počítá (na rozdíl např. od dobře známého Riemannova integrálu nebo od daleko obecnějšího integrálu Lebesgueova) v zásadě podle definice, a to *jak pro omezené, tak i pro neomezené intervaly a integrandy.* Omezenost resp. neomezenost intervalu (a, b) resp. integrandu f může ovšem mít vliv na *existenci* integrálu. Do výkladu elementární analýzy se však tento integrál hodí i proto, že není nutný (pro studenty zpravidla velmi nudný) výklad tzv. *zobecněného* resp. *nevlastního integrálu*, bez něhož nelze v Riemannově teorii mluvit ani o integrálu přes neomezený interval, ani o integrálu z neomezené funkce.

Všem, kteří se ve své práci bez integrálů neobejdou, autor vřele doporučuje seznámit se s Newtonovým a Lebesgueovým integrálem. Lebesgueův integrál má (nejen v $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$, ale i v eukleidovských prostorech $\mathbb{R}^n$ libovolné dimenze $n \in \mathbb{N}$) vynikající vlastnosti; jeho výpočet se přitom v mnohých případech převádí na výpočet integrálu Newtonova.

Poznámka 10.3. Je jistě zřejmé, že *z existence integrálu $\int_a^b f$ plyne existence integrálu $\int_c^d f$ pro každý interval $(c, d) \subset (a, b)$.*

Věta 10.3. (Základní věta o existenci integrálu.) *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a, b), integrál $\int_a^b f$ existuje.*

Příklad 10.2. A. Z rovnosti $\sin x = (-\cos x)'$ v $\mathbb{R}$ plyne, že např.

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -2;$$

protože funkce $\cos x$ nemá ani v $-\infty$, ani v $+\infty$ limitu, nemá funkce $\sin x$ integrál přes žádný neomezený interval.

B. Při označení z části B příkladu 10.1 je

$$\int_{-e}^{1} \lg |x| \, dx = [F(x)]_{-e}^{1} = 1 \cdot (0-1) - (-e) \cdot (1-1) = -1;$$

vůbec nevadí, že integrand není v bodě 0 definován a že není omezený.

C. Z identity $x e^{-x} = \big(-(x+1) e^{-x}\big)'$ platné pro všechna $x \in \mathbb{R}$ plyne, že

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx = \big[-(x+1) e^{-x}\big]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1;$$

jak je patrné, nekonečná horní mez výpočet integrálu vůbec nekomplikuje.

D. Protože $\cos x/(1 + \sin x) = \big(\lg(1 + \sin x)\big)'$ pro všechna $x \not\equiv -\frac{1}{2}\pi \mod 2\pi$, je např.

$$\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \, dx = \lg\big(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\big) - \lg\big(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\big) = 2 \lg\big(1 + \sqrt{2}\big) \doteq 1.763.$$

Na rozdíl od toho

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx \quad \textit{neexistuje}\,,$$

protože integrand nemá v $(0, 2\pi)$ žádnou z.p.f. Kdyby totiž taková funkce G existovala, lišila by se v intervalu $(0, \frac{3}{2}\pi)$ od funkce $F(x) := \lg(1+\sin x)$ jen aditivní konstantou a z rovnosti $\lim_{x\to 3\pi/2} F(x) = -\infty$ by plynula rovnost $\lim_{x\to 3\pi/2-} G(x) = -\infty$; to však by bylo ve sporu se spojitostí funkce G v $(0, 2\pi)$.

Tento příklad měl čtenáře varovat: Nestačí mechanicky počítat a pak zjistit, že nalezená funkce $F(x)$ má v krajních bodech příslušného intervalu (a, b) konečné limity; je nutné zkontrolovat, zdali je $F(x)$ v (a, b) spojitá. V případě, že tomu tak není, je třeba existenci z.p.f. v (a, b) i příslušného integrálu pečlivě zvážit.

E. Je jistě zřejmé, že

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^{\,1} \;= \pi\,;$$

tentokrát jsme (bez potíží) integrovali funkci, která není v bodech ± 1 definována a v intervalu $(-1, 1)$ není omezená.

F. Protože v $\mathbb{R}_+$ platí identity

(6) $$\frac{1}{x} = (\lg x)', \quad \frac{1}{x^\alpha} = \Big(\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big)' \text{ pro všechna } \alpha \neq 1\,,$$

je

(7) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \textit{pro všechna} \;\; \alpha < 1\,,$$

zatímco *pro žádné* $\alpha \geq 1$ *tento integrál neexistuje*, a

(8) $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \quad \textit{pro všechna} \;\; \alpha > 1\,,$$

zatímco *pro žádné* $\alpha \leq 1$ *tento integrál neexistuje*. Integrál

(9) $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \textit{neexistuje pro žádné} \;\; \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

G. Podle V.10.3 integrály

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\, dx\,, \quad \int_0^1 \cos\frac{1}{x}\, dx$$

existují, což bohužel neznamená, že je dovedeme vypočítat. Problém je v nalezení primitivní funkce k integrandu. □

Obsahem následujících pěti vět jsou základní vlastnosti Newtonova integrálu; jejich znalost je nutná jak při počítání, tak při zjišťování existence integrálu.

Věta 10.4. (Linearita integrálu vzhledem k integrandu.) *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li $f_1, \ldots, f_n$ funkce, $c_1, \ldots, c_n$ (konečné reálné) konstanty, je*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k \,, \tag{10}$$

existují-li integrály vpravo.

Věta 10.5. (Monotonie integrálu.) *Je-li $f \le g$, je*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g \,, \tag{11}$$

existují-li oba integrály.

Věta 10.6. (Aditivita integrálu vzhledem k integračnímu oboru.) *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a je-li*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{12}$$

libovolné dělení intervalu (a, b), je

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f \,, \tag{13}$$

má-li jedna strana této rovnosti smysl.

Věta 10.7. (Integrace per partes.) *Je-li $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, (a,b))$, $G \in \mathrm{ZPF}(g;\, (a,b))$, je*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b \; - \int_a^b fG \,, \tag{14}$$

mají-li (aspoň) dva ze tří napsaných výrazů smysl.

Věta 10.8. (Věta o substituci.) *Předpokládejme, že spojitá ryze monotónní funkce $\omega : (\alpha, \beta) \to_{\mathrm{na}} (a, b)$ má konečnou nenulovou derivaci všude v $(\alpha, \beta) - K$, kde $K \subset (\alpha, \beta)$ je konečná množina. Pak je*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\omega(t))\, |\omega'(t)|\, dt \,, \tag{15}$$

existuje-li jeden z napsaných integrálů.

Poznámka 10.4. Je-li ω rostoucí, je $\omega' > 0$ všude v $(\alpha, \beta) - K$, $a = \omega(\alpha+)$, $b = \omega(\beta-)$, $\alpha = \omega_{-1}(a+)$, $\beta = \omega_{-1}(b-)$ a pravou stranu (15) lze psát bez absolutní hodnoty:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\omega(t))\, \omega'(t)\, dt \,. \tag{15_{r}}$$

Je-li ω klesající, je $\omega' < 0$ v $(\alpha, \beta) - K$, $a = \omega(\beta-)$, $b = \omega(\alpha+)$, $\alpha = \omega_{-1}(b-)$, $\beta = \omega_{-1}(a+)$ a (15) je ekvivalentní s rovností

$$(15_{\mathrm{k}}) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,.$$

Poznamenejme při příležitosti, že je výhodné **zobecnit pojem integrálu** takto:

1) Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ a pro každou funkci f položíme $\int_a^a f = 0$.

2) Je-li $+\infty \geq a > b \geq -\infty$, klademe $\int_a^b f = -\int_b^a f$, existuje-li integrál vpravo podle dosavadní definice.

Po tomto zobecnění lze (15) napsat v těchto dvou ekvivalentních tvarech:

$$(15^*) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\omega_{-1}(a+)}^{\omega_{-1}(b-)} f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,,$$

$$(15^{**}) \qquad \int_{\omega(\alpha+)}^{\omega(\beta-)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\omega(t))\,\omega'(t)\,dt\,.$$

Obě rovnosti platí jak pro rostoucí, tak i pro klesající funkce ω – samozřejmě za předpokladů věty 10.8 o funkci ω a za předpokladu, že jedna strana příslušné rovnosti má smysl.

Poznámka 10.5. Jak věta o integraci per partes, tak i věta o substituci dovolují začít počítat integrál bez předběžného ověření, že existuje; to je z početního hlediska velmi výhodné, a tedy i důležité.

Má-li daný integrál tvar levé strany (14), můžeme integrovat per partes (třeba i několikrát za sebou) a teprve pak ověřit, že výsledek má smysl. (Sr. s Př. 10.3.)

Rovnost (15) lze (za příslušných předpokladů o substituující funkci ω) aplikovat „zleva doprava“ i „zprava doleva“. Postup v prvním případě, kdy výchozím integrálem je levá strana (15), připomíná 2SM; ve druhém případě, kdy počítáme integrál, který má tvar pravé strany (15), se postup podobá 1SM. Předpoklady o ω ve větě 10.8 nejsou ovšem stejné jako v 1SM a 2SM. Důležité však je, že nemusíme zjišťovat existenci výchozího integrálu; stačí, aby existoval integrál vzniklý substitucí. (Sr. s Př. 10.4.)

Příklad 10.3. Označme

$$(16) \qquad I_n := \int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx \ \text{ pro každé celé číslo } \ n \geq 0\,.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme integrací per partes ($F(x) = x^n$, $f(x) = nx^{n-1}$, $g(x) = e^{-x}$, $G(x) = -e^{-x}$) rovnosti

$$I_n := \int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx = \left[-x^n\,e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = nI_{n-1}\,,$$

existuje-li integrál I_{n-1}. Protože však $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$ existuje, platí totéž o $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$; formální důkaz indukcí jistě není třeba provádět. Z rekurentního vzorce $I_n = nI_{n-1}$ pak ihned plyne, že

$$(16^*) \qquad I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n! \ \ \textit{pro každé celé číslo} \ \ n \geq 0\,.$$

Příklad 10.4. Protože funkce $\omega(t) := e^t$ zobrazuje interval $(1, +\infty)$ na interval $(e, +\infty)$ a splňuje všechny předpoklady V. 10.8, je

$$(17) \qquad \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \lg^\alpha x} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\,t^{\alpha-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha - 1}\,, \ \text{je-li } \alpha > 1\,;$$

pro žádné $\alpha \leq 1$ integrál neexistuje (sr. s Př. 10.2, část F). □

Ke zjednodušení výpočtu integrálu se často dají využít specifické vlastnosti integrandu:

Věta 10.9. *Pro každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí tato dvě tvrzení:* 1. *Má-li f periodu $p \in \mathbb{R}_+$ a je-li $-\infty < a < b < +\infty$, platí pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovnost*

$$\int_a^b f = \int_{a+kp}^{b+kp} f\,, \quad \textit{existuje-li jeden z integrálů.}$$

2. *Je-li funkce f sudá (resp. lichá) a je-li $a \in \mathbb{R}_+$, je*

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f \ \ \Big(\textit{resp.} \int_{-a}^a f = 0\Big)\,, \ \textit{existuje-li integrál} \ \int_0^a f.$$

Příklad 10.5. V integrálu

$$(18) \qquad I := \int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x}\,dx$$

(ze spojité funkce na kompaktním intervalu) nelze přímo substituovat $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = t$, protože integrační obor je příliš dlouhý. Vzhledem k 2π-periodicitě integrandu je však $I = 5\int_{-\pi}^{\pi} f$; užijeme-li 2SM s $\omega = 2 \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to_{\text{na}} (-\pi, \pi)$, dostaneme:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(t^2+t+1)\,(t^2+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+t+1}\Big)\,dt$$

$$= \left[2 \operatorname{arctg} t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = 2\pi\Big(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) \doteq -0.972\,.$$

Je tedy $I = 10\pi\,(1 - 2/\sqrt{3}) \doteq -4.86$.

Poznámka 10.6. V knihách pojednávajících o elementech integrálního počtu se často *určitým integrálem* rozumí Riemannův integrál, *neurčitým integrálem* primitivní funkce. To není v souladu s terminologií teorie integrálu[3]), podle níž může být integrál podle jakékoli definice jak určitý, tak i neurčitý. Zhruba řečeno: *Určitý integrál* je integrál, jehož meze jsou (pevně zvolená) čísla, kdežto *neurčitý integrál* získáme tím, že např. horní mez ponecháme proměnnou.

P ř í k l a d : *Číslo* $\int_{-1}^{1} \lg|x|\,dx$ $(= -2)$ je určitý *Newtonův* integrál, *funkce* $\int_0^x \lg|x|\,dx$, kde $x \in \mathbb{R}$, je *Newtonův* neurčitý integrál. Podle Př. 10.1B oba integrály (jako Newtonovy) existují; příslušné Riemannovy integrály však *neexistují*, protože integrand není omezený v žádném $P(0)$ (a není tedy splněna základní podmínka existence Riemannova integrálu). Druhý z napsaných integrálů je *zobecněnou primitivní funkcí* funkce $\lg|x|$ v $\mathbb{R}$; *není to však její funkce primitivní.* □

Poslední tři věty této kapitoly se zabývají existencí Newtonova integrálu.

Věta 10.10. (Srovnávací kritérium – 1. verze.) *Nechť* $-\infty < a < b \le +\infty$, *nechť funkce* f *je spojitá v intervalu* $\langle a, b)$, *nechť spolu s funkcí* $g : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ *splňuje nerovnost* $|f| \le g$ *všude v* (a, b) *a nechť existuje integrál* $\int_a^b g$. *Pak existují i integrály*

$$\int_a^b f\,, \quad \int_a^b |f|\,. \tag{19}$$

Analogické tvrzení platí pro intervaly tvaru $(a, b\rangle$, *kde* $-\infty \le a < b < +\infty$.

Poznámka 10.7. *V obecném případě neexistuje žádný logický vztah mezi existencí integrálů* (19); ilustrují to tyto čtyři příklady:

A. Oba integrály (19) existují, je-li $-\infty < a < b < +\infty$ a je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$. (Sr. s V. 10.3.)

B. Je-li f *Dirichletova funkce*, tj. je-li $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$ a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, žádný z integrálů (19) neexistuje v žádných mezích $a \ne b$.[4])

C. Je-li $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = -1$ pro všechna $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ a je-li $-\infty < a < b < +\infty$, první integrál neexistuje, druhý existuje, protože $|f(x)| \equiv 1$.

D. Jak ukážeme v Př. 10.9,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \ \ \textit{existuje}, \qquad \int_0^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx \ \ \textit{neexistuje}.$$

Definice. Nechť existuje první z integrálů (19). Pak podle toho, zdali druhý z integrálů (19) existuje, nebo neexistuje, říkáme, že první integrál konverguje **absolutně** resp. **neabsolutně**. □

---

[3]) *Teorie integrálu* je rozsáhlá disciplína, v níž se studují různé definice integrálu. *Integrální počet* je zaměřen spíše na početní techniku vybraného druhu integrálu.

[4]) Důkaz bychom založili na známé větě, podle níž má derivace spojité funkce tzv. Darbouxovu vlastnost; protože Dirichletova funkce tuto vlastnost nemá, nemá primitivní funkci v žádném intervalu, a tedy nemá ani zobecněnou primitivní funkci. Totéž platí o funkci f z části C.

Jak je patrné, *srovnávací kritérium je kritériem absolutní konvergence; neabsolutní konvergenci podle něj zjišťovat nelze.* □

Praktické aplikace srovnávacího kritéria lze značně usnadnit zavedením dvou nových symbolů:

Definice a označení. Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a jsou-li f, g dvě funkce, píšeme

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro} \quad x \to c \tag{20}$$

(a čteme: „$f(x)$ je velké O $g(x)$ pro $x \to c$“), existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|f(x)| \le K|g(x)|$ platí všude v jistém $P(c)$.

Relace

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro} \quad x \to c- \,, \quad f(x) = O(g(x)) \quad \text{pro} \quad x \to c+ \tag{20*}$$

se definují analogicky; v první z nich nahradíme $P(c)$ okolím $P^-(c)$, ve druhé okolím $P^+(c)$ (za předpokladu, že $-\infty < c \le +\infty$ resp. $-\infty \le c < +\infty$).

Říkáme, že $f(x)$ a $g(x)$ jsou **stejného řádu pro** $x \to c$ a píšeme

$$f(x) \asymp g(x) \quad \text{pro} \quad x \to c, \tag{21}$$

je-li $f(x) = O(g(x))$ a zároveň $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to c$. Analogicky jsou definovány relace „$f(x) \asymp g(x)$ pro $x \to c-$“ a „$f(x) \asymp g(x)$ pro $x \to c+$“.

Poznámka 10.8. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x) = O(g(x)) \quad \textit{pro} \quad x \to c \tag{22}$$

a

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} - \{0\} \;\Rightarrow\; f(x) \asymp g(x) \quad \textit{pro} \quad x \to c; \tag{23}$$

analogické implikace platí samozřejmě i „zleva“ a „zprava“.

Příklad 10.6. Pro $x \to 0$ platí např. tyto relace:

$$\sin x \asymp x\,, \quad \arcsin x \asymp x\,, \quad \operatorname{tg} x \asymp x\,, \quad \operatorname{arctg} x \asymp x\,, \tag{24}$$

$$\sinh x \asymp x\,, \quad \operatorname{argsinh} x \asymp x\,, \quad \lg(1 \pm x) \asymp x\,, \quad \exp x - 1 \asymp x\,, \tag{25}$$

$$\cos x - 1 \asymp x^2\,, \quad \cosh x - 1 \asymp x^2\,, \quad \sin x - x \asymp x^3\,. \tag{26}$$

Pro $x \to 0+$ je

$$|\lg x|^\alpha = O(x^{-\beta}) \text{ pro všechna } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}_+\,, \tag{27}$$

pro $x \to +\infty$ je

$$\lg^\alpha x = O(x^\beta)\,, \quad x^\alpha = O(e^{\beta x}) \text{ pro všechna } \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}_+\,, \tag{28}$$

$$\operatorname{arccotg} x \asymp \frac{1}{x}\,, \tag{29}$$

a pro $x \to 1$ platí např. relace

$$\arccos x \asymp \sqrt{1-x} \asymp \sqrt{1-x^2}\,. \tag{30}$$

Všechny tyto vztahy lze snadno dokázat pomocí Taylorových polynomů a l'Hospitalova pravidla; *jejich znalost je nutná, chceme-li efektivně aplikovat tuto verzi srovnávacího kritéria*:

Věta 10.11. (Srovnávací kritérium – 2. verze.) *Jsou-li funkce f, g spojité a nezáporné v intervalu $\langle a, b)$, kde $-\infty < a < b \le +\infty$, platí tato dvě tvrzení:*

1. *Je-li $f(x) = O(g(x))$ pro $x \to b-$, pak*

$$\text{z existence integrálu } \int_a^b g \;\text{ plyne existence integrálu } \int_a^b f\,. \tag{31}$$

2. *Je-li $f(x) \asymp g(x)$ pro $x \to b-$, pak*

$$\text{existence integrálu } \int_a^b f \;\text{ je ekvivalentní s existencí integrálu } \int_a^b g\,. \tag{32}$$

Analogická tvrzení platí pro intervaly tvaru $(a, b\rangle$, kde $-\infty \le a < b < +\infty$. □

Tvrzení 2 věty 10.11 se často nazývá **symetrická verze srovnávacího kritéria.**

Příklad 10.7. Pro každou trojici čísel α, β, γ (z $\mathbb{R}$) je funkce

$$f(x) := \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x \operatorname{arccotg}^\beta x}{x^\gamma} \tag{33}$$

spojitá a kladná v $\mathbb{R}_+$; ke zjištění, pro která α, β, γ existuje $\int_0^{+\infty} f$, užijeme kromě V. 10.11 i výsledky z Př. 10.2 a z Př. 10.6.

Protože pro $x \to 0+$ je $\operatorname{arctg} x \asymp x$ a $\operatorname{arccotg} x \asymp 1$, je také $\operatorname{arctg}^\alpha x \asymp x^\alpha$ a $\operatorname{arccotg}^\beta x \asymp 1$ (pro každou dvojici čísel α a β). Z toho plyne, že $f(x) \asymp 1/x^{\gamma-\alpha}$, takže

$$\int_0^1 f\,dx \;\text{ existuje, právě když je }\; \gamma - \alpha > -1\,. \tag{34$'$}$$

Pro $x \to +\infty$ je $\operatorname{arctg}^\alpha x \asymp 1$ pro každé α a $\operatorname{arccotg}^\beta x \asymp 1/x^\beta$ pro každé β; z toho plyne, že $f(x) \asymp 1/x^{\beta+\gamma}$, takže

$$\int_1^{+\infty} f\,dx \;\text{ existuje, právě když je }\; \beta + \gamma > 1\,. \tag{34$''$}$$

Z (34′) a (34″) vyplývá, že

$$\int_0^{+\infty} f\,dx \;\text{ existuje, právě když je }\; \gamma > \max(\alpha - 1, 1 - \beta)\,. \tag{34}$$

Příklad 10.8. Pro každou dvojici čísel α, β (z $\mathbb{R}$) je funkce

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha \lg^\beta x} \tag{35}$$

spojitá a kladná v intervalu $(1, +\infty)$; vyšetříme, kdy existuje integrál $\int_2^{+\infty} f$.

Pro $\alpha = 1$ jsme velmi podobný problém (s jiným označením parametrů) vyřešili již v Př. 10.4 : $\int_e^{+\infty} f$ existuje, právě když je $\beta > 1$. Protože existence integrálu $\int_2^e f$ plyne ze spojitosti funkce f v intervalu $\langle 2, e\rangle$, je i existence integrálu $\int_2^{+\infty} f$ (pro $\alpha = 1$) ekvivalentní s nerovností $\beta > 1$.

Je-li $\alpha > 1$, je číslo $\gamma := \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ kladné, a v důsledku toho je $x^\gamma \lg^\beta x \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ a pro každé $\beta \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\gamma} \cdot x^\gamma \lg^\beta x} = O\Big(\frac{1}{x^{1+\gamma}}\Big) \quad \text{pro} \quad x \to +\infty,$$

a protože $1 + \gamma > 1$, integrál $\int_2^{+\infty} f$ existuje podle 1. části věty 10.11.

Je-li $\alpha < 1$, je číslo $\delta := \frac{1}{2}(1 - \alpha)$ kladné, takže $x^{-\delta} \lg^\beta x \to 0$ pro $x \to +\infty$ a pro každé $\beta \in \mathbb{R}$. Z toho plyne, že $h(x) := 1/(x^{-\delta} \lg^\beta x) \to +\infty$, a existuje tedy $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $h(x) \geq K$ platí pro všechna $x \in \langle 2, +\infty)$. [5]) V tomto intervalu pak platí i relace

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-\delta} \cdot x^{-\delta} \lg^\beta x} \geq \frac{K}{x^{1-\delta}} \,;$$

protože je $1 - \delta < 1$, integrál $\int_2^{+\infty} (K/x^{1-\delta})\, dx$ neexistuje; podle V. 10.10 platí totéž i o integrálu $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$.

Tím je dokázáno, že

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \lg^\beta x} \ \ \textit{existuje} \ \Leftrightarrow\ (\alpha > 1) \vee ((\alpha = 1) \wedge (\beta > 1)). \tag{36}$$

Poznámka 10.9. Vyšetření existence integrálu v právě dořešeném příkladě dalo dost práce; příčinou je skutečnost, že funkce $\lg^\beta x$ a x^α nejsou téhož řádu pro žádnou dvojici čísel α, β. (Relace $\lg^\beta x \asymp x^\alpha$ pro $x \to +\infty$ nemůže platit, protože pro každé $\beta \in \mathbb{R}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ je $\lg^\beta x = o(x^\alpha)$ pro $x \to +\infty$. [6]) V souvislosti s tím říkáme, že *každá kladná mocnina* x *roste do nekonečna rychleji než kterákoli mocnina* $\lg x$. Této okolnosti bylo nutné obratně využít – pro $\alpha > 1$ k důkazu existence, pro $\alpha < 1$ k důkazu neexistence integrálu. Podobně bychom postupovali, kdyby se

[5]) Podrobněji: Z podmínky $h(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ plyne existence čísla $c \in (2, +\infty)$, pro něž $x > c \Rightarrow h(x) > 1$. Protože h je na intervalu $\langle 2, c\rangle$ spojitá a kladná, má tam i kladné minimum; označíme-li je d, stačí položit $K = \min(d, 1)$.

[6]) Připomeňme, že to znamená, že podíl levé a pravé strany této „rovnosti" má pro $x \to +\infty$ nulovou limitu. (Sr. s (25) v kapitole 6.)

v integrálu vyskytl např. součin $x^\alpha \exp(\beta x)$, protože ani tentokrát nemají faktory stejný řád pro $x \to +\infty$. Čtenáři doporučujeme, aby si postupy užité v Př. 10. 8 dobře promyslil. $\square$

Dvě kritéria existence integrálu, která obsahuje následující věta, lze užít (na rozdíl od V. 10. 10 a V. 10. 11) i k vyšetření *neabsolutní konvergence*.

Věta 10.12. (Abelovo a Dirichletovo kritérium.) *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť funkce $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, funkce $g : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ spojitá a monotónní.*

Pak integrál

$$\int_a^b fg \tag{37}$$

existuje, platí-li jedna z těchto podmínek:

$$\int_a^b f \text{ existuje a funkce } g \text{ je omezená v } (a, b) \tag{38}$$

(Abelovo kritérium),

$$\text{funkce } f \text{ má omezenou primitivní funkci v } (a, b) \text{ a } \lim_{x \to b} g(x) = 0 \tag{39}$$

(Dirichletovo kritérium).

Dále platí: Jsou-li funkce h_1, h_2 spojité a kladné v $\langle a, b)$, je-li jejich podíl h_1/h_2 monotónní v $\langle a, b)$ a je-li $h_1(x) \asymp h_2(x)$ pro $x \to b-$, je existence integrálu $\int_a^b fh_1$ ekvivalentní s existencí integrálu $\int_a^b fh_2$ (symetrické Abelovo kritérium).

Analogická tvrzení platí pro intervaly $(a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, kde $-\infty \le a < b < +\infty$.

Příklad 10.9. Vyšetřme absolutní resp. neabsolutní konvergenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \tag{40}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Integrand $f(x) := \sin x / x^\alpha$ je spojitý v $\mathbb{R}_+$ a splňuje podmínky

$$f(x) \asymp \frac{1}{x^{\alpha-1}} \text{ pro } x \to 0+, \quad f(x) = O\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big) \text{ pro } x \to +\infty. \tag{41}$$

V intervalu $(0, \pi)$ je $f(x) > 0$, a podle V. 10. 11 $\int_0^\pi f$ tedy existuje, právě když je $\alpha < 2$; konvergence je pak samozřejmě absolutní. Podle druhé z relací (41), podle V. 10. 10 a podle F z Př. 10. 2 konverguje integrál $\int_\pi^{+\infty} f$ absolutně, je-li $\alpha > 1$. Zatím jsme tedy dokázali, že

$$\text{pro } \alpha \in (1, 2) \text{ konverguje integrál (40) absolutně.} \tag{42_1}$$

Dirichletovo kritérium nám poskytne další informaci: Protože funkce $-\cos x$ (která je funkcí primitivní k funkci $\sin x$) je v $\mathbb{R}_+$ omezená, protože funkce $1/x^\alpha$

je tam spojitá a monotónní a konverguje k 0 pro $x \to +\infty$, je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, integrál $\int_\pi^{+\infty} f$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$ existuje. Z toho plyne, že *integrál* (40) *existuje pro všechna* $\alpha \in (0, 2)$.

Dokažme nyní sporem, že

$$(42_2) \qquad \textit{pro každé } \alpha \in (0,1\rangle \textit{ konverguje integrál } (40) \textit{ neabsolutně.}$$

Předpokládejme, že integrál $\int_\pi^{+\infty}$ konverguje (pro některé $\alpha \in (0,1\rangle$) absolutně, tj. že existuje integrál

$$(43) \qquad I := \int_\pi^{+\infty} \Big| \frac{\sin x}{x^\alpha} \Big| \, dx.$$

Protože funkce $G(x) := \int_\pi^x |f|$ je primitivní funkcí funkce $|f|$ v $\mathbb{R}_+$, je existence integrálu (43) ekvivalentní s existencí konečné limity $I := G(+\infty-)$; pak je ovšem i $\lim_{n\to\infty} G(n\pi) = I$. Z toho plyne, že

$$(44) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \Big| \frac{\sin x}{x^\alpha} \Big| \, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (G((k+1)\pi) - G(k\pi))$$
$$= \lim_{n\to\infty} G(n\pi) = I \ (< +\infty).$$

Zároveň však je

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \Big| \frac{\sin x}{x^\alpha} \Big| \, dx \geq \frac{1}{\big((k+1)\pi\big)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže

$$(45) \qquad G(n\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \Big| \frac{\sin x}{x^\alpha} \Big| \, dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi} \to +\infty \ \text{ pro } \ n \to \infty,$$

což je ve sporu s (44). Tím je (42_2) dokázáno.

Zbývá ověřit, že

$$(42_3) \qquad \textit{pro žádné } \alpha \leq 0 \textit{ integrál } (40) \textit{ neexistuje.}$$

Označíme-li $F(x)$ nějakou primitivní funkci k funkci $\sin x / x^\alpha$ v $\mathbb{R}_+$, plynula by z existence integrálu $\int_\pi^{+\infty} f$ existence konečné limity $\lim_{n\to\infty} F(n\pi)$. Kdyby bylo $F(n\pi) \to A \in \mathbb{R}$, bylo by i $F((n+1)\pi) \to A$, a tedy $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f = F((n+1)\pi) - F(n\pi) \to 0$. To však není pravda, protože (pro každé $\alpha \leq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$) je

$$(46) \qquad \Big| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx \Big| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \, dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \, dx = 2.$$

Obsah tvrzení (42_1), (42_2), (42_3) je úplným řešením našeho problému. □

Symetrická verze Abelova kritéria se užívá ke zjednodušení integrandu; k důkazu existence integrálu náležitě zjednodušené integrované funkce lze pak užít např. Dirichletovo kritérium. Běžné problémy, s nimiž se při tom setkáváme, a jejich řešení ilustruje tento (poněkud náročnější) příklad:

Příklad 10.10. Vyšetřme existenci integrálu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sinh x}{\operatorname{arccotg} x \cdot x^\alpha \cdot \lg x \cdot e^x} \cdot \sin \pi x \cdot \cos \frac{\pi}{x}\, dx\,, \tag{47}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Integrand $f(x)$ je spojitý jak v intervalu $(0,1)$, tak i v intervalu $(1,+\infty)$; protože pro $x \to 1$ je $\sinh x \to \sinh 1$, $\operatorname{arccotg} x \to \frac{1}{4}\pi$, $x^\alpha \to 1$, $\sin \pi x / \lg x \to -\pi$, $e^x \to e$, $\cos(\pi/x) \to -1$, existuje konečná limita

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2(1 - e^{-2}) \doteq 1.72933$$

a stačí položit $f(1)$ rovno této limitě, aby se f stala spojitou v celém $\mathbb{R}_+$. Integrál $\int_{1/2}^2 f$ tedy jistě existuje a zbývá rozhodnout o existenci integrálů $\int_0^{1/2} f$, $\int_2^{+\infty} f$, což se redukuje na otázku, jak se $f(x)$ chová pro $x \to 0+$ a pro $x \to +\infty$.

Pro $x \to 0+$ platí tyto relace:

$$\sinh x \asymp x\,, \quad \frac{1}{\operatorname{arccotg} x} \asymp 1\,, \quad \frac{1}{e^x} \asymp 1\,, \quad \sin \pi x \asymp x\,. \tag{48}$$

Čtenář jistě sám dokáže, že každá z kladných funkcí

$$\frac{\sinh x}{x}\,, \quad \frac{1}{\operatorname{arccotg} x}\,, \quad \frac{1}{e^x}\,, \quad \frac{\sin \pi x}{x} \tag{49}$$

je monotónní v intervalu $(0,1)$. První dvě rostou, a totéž platí tedy o jejich součinu; poslední dvě klesají, a totéž platí opět o jejich součinu. Aplikujeme-li dvakrát symetrickou verzi Abelova kritéria [7]) vidíme, že existence integrálu $\int_0^{1/2} f$ je ekvivalentní s existencí integrálu

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^\alpha \cdot \lg x} \cdot x \cdot \cos \frac{\pi}{x}\, dx = \int_0^{1/2} \frac{x^{2-\alpha}}{\lg x} \cos \frac{\pi}{x}\, dx\,. \tag{50}$$

Tento integrál podle V. 10.8 existuje, právě když existuje integrál, který z něj vznikne substitucí $x = \omega(t) := 1/t$; protože $\omega'(t) = -1/t^2$, je to integrál

$$\int_2^{+\infty} g\,, \quad \text{kde} \quad g(t) := \frac{\cos \pi t}{t^{4-\alpha} \lg t}\,. \tag{51}$$

[7]) Rostoucí funkci $\sinh x/(x \operatorname{arccotg} x)$ nahradíme x, místo klesající funkce $\sin \pi x/(x e^x)$ napíšeme ve druhém kroku 1; bylo by sice možné dokázat, že i součin všech čtyř funkcí (49) je monotónní (klesající) např. v intervalu $(0,1)$, ale zdůrazněme, že by to byla *zcela zbytečná* práce.

Funkce $\cos \pi t$ má (v celém $\mathbb{R}$) omezenou primitivní funkci $\sin \pi t/\pi$, funkce $h(t) := t^{4-\alpha} \lg t$ je spojitá a kladná v $(1, +\infty)$; je-li $\alpha \le 4$, funkce h tam roste a její limita pro $t \to +\infty$ je rovna $+\infty$. Funkce $1/h(t)$ tam tedy klesá a má pro $t \to +\infty$ limitu 0, takže integrál (51) podle Dirichletova kritéria existuje; pro $\alpha \le 4$ tedy existuje i $\int_0^{1/2} f$.

Je-li $\alpha > 4$, má kladná spojitá funkce $k(t) := t^{\alpha-4}/\lg t$ limitu rovnou $+\infty$ jak pro $t \to 1+$, tak i pro $t \to +\infty$, a má proto v intervalu $(0, 1)$ kladné minimum; označíme-li je $K(\alpha)$ a uvážíme-li, že $\operatorname{sgn}(\cos \pi x)$ je v každém intervalu tvaru $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, kde $k \in \mathbb{N}$, konstantní, vidíme, že relace

$$\left| \int_{k-1/2}^{k+1/2} \frac{t^{\alpha-4}}{\lg t} \cos \pi t \, dt \right| \ge K(\alpha) \int_{k-1/2}^{k+1/2} |\cos \pi t| \, dt = \frac{2K(\alpha)}{\pi} > 0 \tag{52}$$

platí pro všechna celá čísla $k \ge 2$. Kdyby integrál (51) existoval, musel by mít první integrál v (52) pro $k \to \infty$ nulovou limitu [8]); integrál tedy neexistuje, a totéž platí i o $\int_0^{1/2} f$.

Zatím jsme dokázali, že

$$(53_1) \qquad \textit{integrál } \int_0^{1/2} f \textit{ existuje, právě když je } \alpha \le 4;$$

zbývá vyšetřit integrál $\int_2^{+\infty} f$.

Pro $x \to +\infty$ je

$$\frac{\sinh x}{e^x} = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2x}) \asymp 1, \quad \frac{1}{\operatorname{arccotg} x} \asymp x, \quad \cos \frac{\pi}{x} \asymp 1; \tag{54}$$

v intervalu $\langle 2, +\infty)$ funkce $\sinh x/e^x$ a $\cos(\pi/x)$ rostou, funkce $1/(x \operatorname{arccotg} x)$ tam klesá. Postupnou aplikací symetrického Abelova kritéria zjistíme, že $\int_2^{+\infty} f$ existuje, právě když existuje integrál

$$\int_2^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^\alpha \lg x} \, dx = \int_2^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x^{\alpha-1} \lg x} \, dx. \tag{55}$$

Je-li $\alpha \ge 1$, spojitá kladná funkce $x^{1-\alpha} \lg x$ roste a má pro $x \to +\infty$ limitu $+\infty$; její převrácená hodnota tedy klesá a má limitu 0. Protože funkce $\sin \pi x$ má v $\mathbb{R}$ omezenou primitivní funkci, integrál (55) podle Dirichletova kritéria existuje, a totéž platí o $\int_2^{+\infty} f$.

Je-li $\alpha < 1$, má (kladná spojitá) funkce $x^{1-\alpha}/\lg x$ pro $x \to 1+$ i pro $x \to +\infty$ limitu rovnou $+\infty$; má proto v $(1, +\infty)$ kladné minimum. Označíme-li je $L(\alpha)$, bude

[8]) Sr. s podobnou situací v Př. 10.9.

$$(56) \qquad \left|\int_k^{k+1} \frac{\sin \pi x}{x^{\alpha-1}\lg x}\,dx\right| \geq L(\alpha)\int_k^{k+1} |\sin \pi x|\,dx = \frac{2L(\alpha)}{\pi} > 0$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, z čehož (jak jsme již několikrát viděli) plyne, že integrál (55) neexistuje. Pro žádné $\alpha < 1$ neexistuje proto ani $\int_2^{+\infty} f$; tím je dokázáno, že

$$(53_2) \qquad \textit{integrál } \int_2^{+\infty} f \textit{ existuje, právě když je } \alpha \geq 1\,.$$

Shrneme-li dokázané výsledky, vidíme, že *integrál* (47) *existuje, právě když je* $1 \leq \alpha \leq 4$. Dodejme, že při důkazu, že *tento integrál konverguje absolutně, právě když je* $2 < \alpha < 3$, se postupuje jako v Př. 10.9. Pro $\alpha \in (2,3)$ se absolutní konvergence dokáže srovnávacím kritériem; důkaz, že integrál od 0 do $+\infty$ z $|f|$ pro $\alpha \in \langle 1,2\rangle \cup \langle 3,4\rangle$ neexistuje, je také podobný příslušné části Př. 10.9. V obou případech je však třeba vědět, že limita

$$(57) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\mu}\lg k} \quad \text{je konečná, právě když je} \quad \mu > 1\,;$$

bude to dokázáno v následující kapitole.

Cvičení

Ve cvičeních 10.01–10.100 je úkolem vypočítat příslušný integrál, pokud existuje. [9])

10.01. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$

10.02. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$

10.03. $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

10.04. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^3-1}\,dx$

10.05. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

10.06. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

10.07. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$

10.08. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-1}$

10.09. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

10.10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

10.11. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

10.12. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-x+1}\,dx$

[9]) Viz důležitou poznámku 10.5.

10.13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$

10.14. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

10.15. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^6+1}\,dx$

10.16. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

10.17. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)\,(x^4+1)}\,dx$

10.18. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^3-x}{x^{12}+x^6+1}\,dx$

10.19. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$

10.20. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2-x+2)^2}\,dx$

10.21. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$

10.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

10.23. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}$

10.24. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$

10.25. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,dx$

10.26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^{-2x}}\,dx$

10.27. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$

10.28. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$

10.29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+3}\,dx$

10.30. $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}$

10.31. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\lg^2 x+2\lg x+2)^2}$

10.32. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

10.33. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^3 x\,dx$

10.34. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\sin x\,dx$

10.35. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

10.36. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} e^{-x}\cos^2 x\,dx$

10.37. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} e^{-\sin x}\cos x\,dx$

10.38. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\lg^3 x+1)}$

10.39. $\displaystyle\int_{1/3\pi}^{1/\pi} \frac{1}{x^2}\sin^2\frac{1}{x}\,dx$

10.40. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}$

10.41. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \Big(3x\cos x^3-\frac{1}{x^2}\sin x^3\Big)\,dx$

10.42. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\,dx$

10.43. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

10.44. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$

10.45. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \lg(1+x^2)\,dx$

10.46. $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}\,dx$

10.47. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\lg x}{x^2}\,dx$

10.48. $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\,dx$

10.49. $\displaystyle\int_0^1 \arccos^2 x\,dx$

10.50. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\cos x\,dx$

10.51. $\displaystyle\int_{-16}^{15} \frac{dx}{\sqrt[5]{(16-x)^4}}$

10.52. $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\lg^2 x}}$

10.53. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sqrt{\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}}\,dx$

10.54. $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^2\arccos x\,dx$

10.55. $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx \quad (r\in\mathbb{R}_+)$

10.56. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10.57. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{(e^{2x}+1)^2}\,dx$

10.58. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

10.59. $\displaystyle\int_0^1 x^2\operatorname{arctg} x\,dx$

10.60. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

10.61. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \left(\frac{\lg x}{x}\right)^3 dx$

10.62. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

10.63. $\displaystyle\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$

10.64. $\displaystyle\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}\,dx$

10.65. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

10.66. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

10.67. $\displaystyle\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$

10.68. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

10.69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

10.70. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$

10.71. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$

10.72. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

10.73. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}\,dx$

10.74. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{3-x}}\,dx$

10.75. $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\,dx$

10.76. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{-x^2+4x-3}}$

10.77. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

10.78. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

10.79. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

10.80. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

10.81. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$

10.82. $\displaystyle\int_{-5}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$

10.83. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

10.84. $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{x}{\sqrt{6-x-x^2}}\,dx$

10.85. $\displaystyle\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+3}}$

10.86. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$

10.87. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

10.88. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$

10.89. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x+4}\,dx$

10.90. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin x+2}$

10.91. $\displaystyle\int_{0}^{5\pi} \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$

10.92. $\displaystyle\int_{0}^{4\pi} \frac{dx}{\cos x+3}$

10.93. $\displaystyle\int_{0}^{10\pi} \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$

10.94. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$

10.95. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$

10.96. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \frac{\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx$

10.97. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}\,dx$

10.98. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \frac{dx}{3\cos x+2\sin x+5}$

10.99. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$

10.100. $\displaystyle\int_{0}^{3\pi} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x+2}\,dx$

V příkladech 10.101 – 10.145 je $\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\mathbb{R}_+$; úkolem je najít všechny hodnoty těchto parametrů, pro něž příslušný integrál konverguje 1) absolutně, 2) neabsolutně.

10.101. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a x}{x^b}\,dx$

10.102. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^a}\,dx$

10.103. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^4-1)\operatorname{arccotg} x}}$

10.104. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^a}\,dx$

10.105. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin x^\alpha\,dx$

10.106. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin(\lg x)\,dx$

10.107. $\int_0^{+\infty} \cos x^\alpha \, dx$

10.108. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^x \, dx$

10.109. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}^\alpha x \, \sin \frac{1}{x^\beta} \, dx$

10.110. $\int_0^{+\infty} x^a \cos \frac{1}{x^\alpha} \, dx$

10.111. $\int_0^{+\infty} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^a \frac{\sin x}{\lg |\lg x|} \, dx$

10.112. $\int_0^{+\infty} x^a \sin \frac{1}{x^\alpha} \, dx$

10.113. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg}^\alpha x \, \cos x \, dx$

10.114. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{|\lg x|^\beta} \operatorname{arctg} x^\alpha \, dx$

10.115. $\int_0^{+\infty} \arcsin \frac{x}{x^2+1} \, \lg x \, \cos x \, dx$

10.116. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^a} \sin x \, dx$

10.117. $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+1} \, \lg^a x \, dx$

10.118. $\int_0^{+\infty} x^a e^{-(bx+cx^2)} \, dx$

10.119. $\int_0^{\pi/2} x^a \left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right)^b \operatorname{tg}^c x \, dx$

10.120. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \, \sin 2x}{x^\alpha} \, dx$

10.121. $\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arccotg} x \, \sin x \, dx$

10.122. $\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{e^{x^2}-1} \sin \frac{1}{x^2} \, dx$

10.123. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arccotg}^\alpha x^5 \, \sin^5 x^\beta \, dx$

10.124. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \pi x}{x \lg^2 x} \, dx$

10.125. $\int_0^1 \arcsin^a (x(1-x)) \sin \frac{1}{x^\alpha} \, dx$

10.126. $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right)}{x \lg x} \sin \frac{1}{x} \, dx$

10.127. $\int_0^1 x^a (1-x)^b \sin \frac{1}{x} \, \sin \frac{1}{1-x} \, dx$

10.128. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{cotg}^a x}{\cos^b x} \lg \frac{2x}{\pi} \, dx$

10.129. $\int_0^{+\infty} \frac{\lg (e^{2x} + e^x + 1)}{x^a} \sin x \, dx$

10.130. $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{\lg^\alpha 2x} \, dx$

10.131. $\int_0^{+\infty} x^a \arccos \frac{x}{x+1} \sin x \, dx$

10.132. $\int_0^{+\infty} \frac{\lg x \, \sin x}{x \operatorname{arctg}(1-x)} \, dx$

10.133. $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} \frac{\lg x}{\lg (x+1)} x^\alpha \, dx$

10.134. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin (x+x^2)}{x^a} \, dx$

10.135. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x}{\lg^\beta (1+x)} \sin x \, dx$

10.136. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^\alpha}{\operatorname{arctg}^\beta x} \sin \frac{1}{x} \, dx$

10.137. $\int_0^{+\infty} \frac{\exp (\sin x)}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$

10.138. $\int_0^1 \frac{\arccos^\alpha x \, \sin^\beta \pi x}{x^\gamma (1-x)^\gamma} \, dx$

10.139. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^\alpha x \ \operatorname{arccotg}^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$

10.140. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\operatorname{arccotg}^\alpha x^\beta\right) dx$

10.141. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arccos^a\left(\frac{2 \operatorname{arctg} x}{\pi}\right) \sin \frac{1}{x^3} \, dx$

10.142. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} \lg \frac{x^2-1}{x^2+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^3-1} \, dx$

10.143. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}\left(x + \frac{1}{x}\right) \sin\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$

10.144. $\displaystyle\int_0^{1} \arccos^a\left(\sqrt{1-x^4}\,\right) \cos \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx$

10.145. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}^a x^\alpha \ \operatorname{arccotg}^\beta x^\gamma \ \arcsin(\sin x) \, dx$

Řešení

10.01. $\frac{1}{20}\pi + \frac{1}{5}\lg 2 \doteq 0.2957$

10.02. $\frac{1}{2}\lg 2 \doteq 0.3466$

10.03. $2\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 3 \doteq 0.837$

10.04. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.05. $\frac{2}{3}(\pi - \operatorname{arctg} 3 - 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}) \doteq 0.478$

10.06. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.07. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.08. neexistuje

10.09. $\frac{1}{4}\lg 2 \doteq 0.1733$

10.10. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.11. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) - \frac{1}{12}\pi \doteq 0.4212$

10.12. $\frac{1}{6}\left(\pi\sqrt{3} - \lg 27\right) \doteq 0.3576$

10.13. $\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 3.6276$

10.14. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \doteq 1.1107$

10.15. $\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 0.6046$

10.16. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \doteq 1.1107$

10.17. $\frac{1}{16}(\pi + \lg 4) \doteq 0.283$

10.18. 0

10.19. $\frac{1}{32}\pi \doteq 0.098175$

10.20. $\frac{2}{49}\pi \doteq 0.3393$

10.21. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.22. $-\frac{1}{2}$

10.23. $\lg\frac{4}{3} \doteq 0.2877$

10.24. 1

10.25. $\frac{1}{2}\pi \doteq 1.5708$

10.26. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi \doteq 1.1107$

10.27. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.28. $\lg(1+\sqrt{2}\,) \doteq 0.8814$

10.29. $\frac{5}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 3.023$

10.30. $\frac{11}{3}$

10.31. $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} \doteq 0.1427$

10.32. $\frac{1}{2}\lg 2 \doteq 0.3466$

10.33. $\frac{4}{3}$

10.34. $\frac{3}{2}\pi^2 - 12 \doteq 2.8044$

10.35. $\frac{1}{8}\pi \doteq 0.3927$

10.36. $\frac{2}{5}\,e^{-\pi/2} \doteq 0.08315$

10.37. $1 - e^{-1} \doteq 0.6321$

10.38. $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 1.2092$

10.39. π

10.40. $\frac{1}{3}(2 - \sqrt[4]{2}) \doteq 0.2703$

10.41. 0

10.42. $e - 5e^{-1} \doteq 0.8789$

10.43. π

10.44. $\frac{9}{8}$

10.45. $\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\lg 2 - \frac{1}{6}\pi \doteq 0.1519$

10.46. $\frac{3}{2}$

10.47. 0

10.48. $\frac{1}{8}\pi \doteq 0.3927$

10.49. $\pi - 2$

10.50. 0

10.51. 5

10.52. π

10.53. $\lg(1 + \sqrt{2}) \doteq 0.8814$

10.54. $\frac{1}{3}\pi - \frac{2}{9} \doteq 0.825$

10.55. $\frac{1}{2}\pi r^2$

10.56. -2

10.57. $\frac{1}{2}(\lg 2 - 1) + \frac{1}{8}\pi \doteq 0.2393$

10.58. $\frac{1}{2}\pi^2 \doteq 4.935$

10.59. $\frac{1}{6}(\lg 2 - 1) + tf112 \doteq 0.2107$

10.60. $(\frac{1}{2}\pi)^2 \doteq 2.4674$

10.61. $\frac{19}{8}e^{-2} \doteq 0.3214$

10.62. $\frac{1}{16}\pi \doteq 0.19635$

10.63. $\frac{1}{32}\pi \doteq 0.09817$

10.64. $\frac{8}{105} \doteq 0.07619$

10.65. $10 - \frac{9}{2}\lg 3 \doteq 5.0562$

10.66. $\frac{1}{4}\pi \doteq 0.7854$

10.67. $3\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\pi + 4 \doteq 1.2181$

10.68. $\frac{2}{3}$

10.69. $\frac{1}{12}\sqrt{3} \doteq 0.1443$

10.70. neexistuje

10.71. $\sqrt{2} + \lg(1 + \sqrt{2}) \doteq 2.2956$

10.72. $\frac{1}{2}\pi \doteq 1.5708$

10.73. $3(\sqrt{2} - \lg(1 + \sqrt{2}) \doteq 1.5985$

10.74. $2\operatorname{arccotg}\frac{1}{2}\sqrt{2} \doteq 1.9106$

10.75. $\frac{1}{16}\big(4 + \sqrt{2}\lg(3 + 2\sqrt{2})\big) \doteq 0.4058$

10.76. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi \doteq 1.8138$

10.77. π

10.78. $\lg(1 + \frac{2}{7}\sqrt{7}) \doteq 0.563$

10.79. $\sqrt{2}\lg(\sqrt{2} + 1) \doteq 1.24645$

10.80. $\lg(2 + \sqrt{5}) \doteq 1.4436$

10.81. $\frac{1}{2}\lg(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) \doteq 0.3838$

10.82. $\frac{9}{2}\pi \doteq 14.1372$

10.83. $2(\sqrt{2} - \arccos\frac{1}{3}) \doteq 0.3665$

10.84. $-\frac{1}{2}\pi$

10.85. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\lg(10-5\sqrt{3}) \doteq 0.1689$

10.86. π

10.87. 2π

10.88. $\frac{8}{3}$

10.89. $\frac{2}{7}\sqrt{7}\operatorname{arctg}(\frac{1}{11}\sqrt{7}) \doteq 0.1784$

10.90. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi \doteq 3.6276$

10.91. $\frac{5}{2}\sqrt{2}\pi$

10.92. $\sqrt{2}\pi \doteq 4.4429$

10.93. $10\sqrt{2}\pi \doteq 44.4288$

10.94. 2

10.95. $\frac{1}{4}\pi$

10.96. $\frac{1}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 0.6046$

10.97. $\lg\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) \doteq 0.4812$

10.98. $\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi \doteq 2.4184$

10.99. $\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\lg(2\sqrt{3}-3)\right) \doteq 1.1405$

10.100. $\frac{1}{2}(3\pi+\lg 3)-\sqrt{2}(\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{2}) \doteq -0.5322$

V následujících výsledcích znamenají slova „ne“ (pro integrály bez parametru) a „nikdy“ (pro integrály s parametrem nebo s parametry), že není splněna podmínka uvedená v nadpisu sloupce; „ano“ znamená, že splněna je.

integrál	absolutní konvergence	neabsolutní konvergence
10.101.	$1-a<b<1$	nikdy
10.102.	$1<a<3$	nikdy
10.103.	ano	ne
10.104.	ne	ne
10.105.	nikdy	$\alpha>1$
10.106.	ne	ne
10.107.	nikdy	$\alpha>1$
10.108.	ne	ano
10.109.	$\beta>1$	nikdy
10.110.	nikdy	$-\alpha-1<a<-1$
10.111.	nikdy	$-1<a<2$
10.112.	$-1<a<\alpha-1$	$-\alpha-1<a\le-1$
10.113.	$\alpha>1$	$0<\alpha\le 1$
10.114.	nikdy	$0<\beta<2$
10.115.	ne	ano
10.116.	$1<\alpha<3$	$0<\alpha\le 1$
10.117.	nikdy	nikdy

10.118.	$a > 1 \wedge (c > 0 \vee (c = 0 \wedge b > 0))$	nikdy
10.119.	$-a - 1 < c < b + 1$	nikdy
10.120.	$1 < \alpha < 3$	$0 < \alpha \leq 1$
10.121.	ne	ano
10.122.	$a > 1$	$-1 < a \leq 1$
10.123.	$\alpha > \frac{1}{5}$	$\alpha \leq \frac{1}{5} \wedge 5\alpha + \beta > 1$
10.124.	ano	ne
10.125.	$a > -1$	nikdy
10.126.	nikdy	ano
10.127.	$a > -1 \wedge b > -1$	buď $-2 < a \leq -1 \wedge b > -1$, nebo $a > -1 \wedge -2 < b \leq -1$
10.128.	$b - 2 < a < 1$	nikdy
10.129.	nikdy	$1 < a < 2$
10.130.	nikdy	$0 < \alpha < 2$
10.131.	$-2 < a < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq a < \frac{1}{2}$
10.132.	ne	ano
10.133.	$\alpha > -\frac{1}{3}$	nikdy
10.134.	$1 < \alpha < 2$	$-1 < a \leq 1$
10.135.	nikdy	$0 < \beta < \alpha + 2$
10.136.	nikdy	$\alpha > \beta - 2$
10.137.	$1 < \alpha < 2$	$0 < \alpha \leq 1$
10.138.	$\gamma - \beta < 1$	nikdy
10.139.	$1 - \beta < \gamma < 1 + \alpha$	$0 < \beta + \gamma \leq 1 \wedge \gamma < 1 + \alpha$
10.140.	$\alpha\beta > 1$	nikdy
10.141.	$a > 2$	$-4 < a \leq 2$
10.142.	$a > -3$	nikdy
10.143.	ne	ano
10.144.	$a > -\frac{1}{2}$	nikdy
10.145.	$a\alpha + 2 > 0 \wedge \beta\gamma > 1$	$a\alpha + 2 > 0 \wedge 0 < \beta\gamma \leq 1$

11. Číselné řady

Písmenem $\mathbb{C}$ značíme *množinu všech* (*konečných*) *komplexních čísel*; pro každé $z \in \mathbb{C}$ znamená $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$ *reálnou* a *imaginární část* čísla z. Předpokládáme, že čtenář komplexní čísla zná a umí s nimi provádět běžné algebraické operace.

Připomeňme jen, že algebraická *pole* (neboli *tělesa*) $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ se podstatně liší tím, že na rozdíl od $\mathbb{R}$ není v $\mathbb{C}$ *uspořádání*; proto *nelze psát nerovnosti mezi nereálnými komplexními čísly a neplatí věty, které uspořádání předpokládají.*

Konvergence *komplexní posloupnosti*, tj. posloupnosti komplexních čísel, se definuje takto: Je-li $N \in \mathbb{Z}$, je-li

$$\{a_k\}_{k=N}^{\infty} \tag{1_N}$$

komplexní posloupnost a je-li $a \in \mathbb{C}$, píšeme

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \text{nebo} \quad a_k \to a \quad \text{pro} \quad k \to \infty \tag{2}$$

nebo ještě stručněji $a_k \to a$ a říkáme, že a je **limita** posloupnosti (1_N) nebo že čísla a_k **konvergují k** a, platí-li pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ nerovnost $|a_k - a| < \varepsilon$ pro s.v. $k \geq N$ [1]).

Z nerovností $\max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ platných pro každé $z \in \mathbb{C}$ snadno plyne, že

$$a_k \to a \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_k \to \operatorname{Re} a,\ \operatorname{Im} a_k \to \operatorname{Im} a\,. \tag{3}$$

Říkáme, že komplexní posloupnost (1_N) je **omezená**, existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|a_k| \leq K$ platí pro všechna $k \geq N$. Podobně jako v $\mathbb{R}$ platí:

Každá konvergentní (*komplexní*) *posloupnost je omezená.*

Protože jsme v $\mathbb{C}$ nezavedli pojem nekonečné limity, jsou „komplexní analogie" vět 3.1 – 3.3 o něco jednodušší:

1. $a_k \to a \Rightarrow |a_k| \to |a|$; $a_k \to 0 \Leftrightarrow |a_k| \to 0$.

2. $a_k \to a, b_k \to b \Rightarrow a_k \pm b_k \to a \pm b, a_k b_k \to ab$; *je-li navíc* $b \neq 0$, je i $a_k/b_k \to a/b$.

3. *Je-li posloupnost* (1_N) *omezená a je-li* $b_k \to 0$, *je i* $a_k b_k \to 0$. $\square$

Pro každou komplexní posloupnost (1_N) nazýváme číslo

$$s_n := \sum_{k=N}^{n} a_k\,, \tag{4_N}$$

[1]) Ekvivalentně řečeno: pro všechna k od určitého indexu počínaje.

kde $n \geq N-1$ je celé číslo, n-**tý částečný součet řady**

$$(5_N) \qquad \sum_{k=N}^{\infty} a_k\,;$$

podle běžných úmluv z algebry je samozřejmě $s_{N-1} = 0$.

Číslo $s \in \mathbb{C} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se nazývá **součet řady** (5_N), nastane-li jedna z těchto situací:

A. Posloupnost (1_N) je *komplexní*, $s \in \mathbb{C}$ a

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = s\,;$$

B. posloupnost (1_N) je *reálná*, $s \in \mathbb{R}^*$ a (6) platí podle definice z kapitoly 3.

Je-li $s \in \mathbb{C}$, říkáme, že řada (5_N) **konverguje** (nebo: **je konvergentní**); v ostatních případech se nazývá **divergentní** (a říkáme, že **diverguje**).

Má-li řada (5_N) (konečný nebo nekonečný) součet s, píšeme

$$(7_N) \qquad \sum_{k=N}^{\infty} a_k = s\,;$$

symbolu (5_N) *tedy přiřazujeme číslo* s. (Nemá-li řada (5_N) součet, zůstává (5_N) symbolem beze smyslu, i když mu – trochu paradoxně – stále říkáme řada.)

Členy posloupnosti (1_N) se zároveň nazývají i **členy řady** (5_N); konkrétněji je a_k její k-**tý člen**. Podle toho, zdali je posloupnost (1_N) reálná nebo komplexní, mluvíme o **reálné** nebo **komplexní řadě**.

Úmluva. Pokud nebude výslovně řečeno něco jiného, bude slovo „posloupnost“ resp. „řada“ znamenat „komplexní posloupnost“ resp. „komplexní řadu“.

Poznámka 11.1. Je zřejmé, že *konvergence posloupnosti* (*a tedy ani řady*) *se nezmění, jestliže změníme, přidáme nebo ubereme konečný počet členů*; při vyšetřování konvergence řad se proto můžeme omezit na řady tvaru

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,,$$

které souvisejí s posloupnostmi tvaru $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Každé tvrzení o speciálnějších řadách (5) má svou zřejmou analogii pro obecnější řady (5_N); v dalším se nejčastěji setkáme s řadami (5) a řadami (5_0), v nichž se sčítá od 0. $\square$

V mnohých situacích je patrné na první pohled, že daná řada *diverguje*, a to proto, že nesplňuje tuto *nutnou podmínku konvergence*:

Věta 11.1. *Konverguje-li řada* (5), *je* $a_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$.

Není-li tedy $a_k \to 0$, *řada diverguje.* Pozor však! Jde jen *o nutnou, ne však postačující* podmínku konvergence; *existují totiž i divergentní řady, které podmínku* $a_k \to 0$ *splňují* – viz Př. 11.2.

Věta 11.2. *Je-li $a_k \in \mathbb{C}$ a $b_k \in \mathbb{C}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a je-li $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A a_k + B b_k) = A \sum_{k=1}^{\infty} a_k + B \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,, \tag{8}$$

má-li pravá strana smysl.

Věta 11.3. *Označíme-li $\alpha_k := \operatorname{Re} a_k$, $\beta_k := \operatorname{Im} a_k$, platí tato tvrzení:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{konverguje, právě když konvergují řady} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \,, \; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \,; \tag{9}$$

je-li podmínka splněna, je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \,. \tag{10}$$

Dále:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,| \quad \textit{konverguje, právě když konvergují řady} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\, \alpha_k \,| , \; \sum_{k=1}^{\infty} |\, \beta_k \,| \,, \tag{11}$$

načež konverguje i řada (5). $\square$

Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,|$, říkáme, že řada (5) **konverguje absolutně**; je-li řada (5) konvergentní a řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, a_k \,|$ divergentní, říkáme, že řada (5) **konverguje neabsolutně**.

Příklad 11.1. Je-li $0 \neq c \in \mathbb{C}$ a $q \in \mathbb{C}$, pak **geometrická řada**

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k \quad \textit{konverguje, právě když je} \quad |\, q \,| < 1 \,, \tag{12}$$

přičemž její konvergence je pak absolutní a platí rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} c q^k = \frac{c}{1-q} \,. \tag{13}$$

Je-li totiž $|\, q \,| \neq 1$ a $n \in \mathbb{N}$, je

$$\sum_{k=0}^{n} |\, c q^k \,| = |\, c \,| \, \frac{1 - |\, q \,|^{n+1}}{1 - |\, q \,|} \,, \qquad \sum_{k=0}^{n} c q^k = c \, \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \,. \tag{13'}$$

Je-li $|\, q \,| < 1$, je $|\, q \,|^{n+1} \to 0$ a $q^{n+1} \to 0$ pro $n \to \infty$, takže obě posloupnosti (13′) mají konečné limity, platí rovnost (13) a řada vlevo konverguje absolutně. Je-li $|\, q \,| \geq 1$, *není* $c q^k \to 0$ (protože limita výrazu $|\, c q^k \,|$ je rovna buď $|\, c \,|$, nebo $+\infty$), takže řada z (12) podle V. 11.1 diverguje.

Příklad 11.2. Tak zvaná **harmonická řada**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{14}$$

diverguje do $+\infty$, tj. má součet rovný $+\infty$, *ačkoli její* k*-tý člen konverguje k* 0.

Abychom to dokázali, uvažme, že členy harmonické řady jsou kladná čísla, takže posloupnost $\{s(n)\}$ jejích částečných součtů je rostoucí; podle věty V.3.6 o limitě monotónní posloupnosti má tedy jistou (konečnou nebo nekonečnou) limitu s a stejnou limitu má i každá posloupnost z ní vybraná. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$s(2^n) - s(2^{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2},$$

takže

$$s(2^n) = \sum_{k=1}^{n} \big(s(2^k) - s(2^{k-1})\big) + s(1) \geq \tfrac{1}{2}n + 1. \tag{15}$$

Z toho ihned plyne, že $s = \lim s(2^n) = +\infty$.

Definice. Bolzano – Cauchyho podmínkou (krátce: **BC podmínkou**) konvergence řady (5) se rozumí výrok:

(16) *Pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $n > n_0,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon$.

Věta 11.4. (BC kritérium konvergence řady.) *Řada* (5) *konverguje, právě když splňuje BC podmínku* (16). □

Symboly velké O a $\asymp$ se pro posloupnosti definují podobně jako pro funkce; oboustranná resp. jednostranná okolí bodů $a \in \mathbb{R}^*$ nahradí v příslušných výrocích slova „skoro všechna“:

Existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že je $|a_k| \leq K|b_k|$ pro s. v. k, píšeme

$$a_k = O(b_k) \ \text{ pro } \ k \to \infty \ \ (\text{nebo krátce } \ a_k = O(b_k)) \tag{17}$$

a čteme „a_k je velké O b_k (pro $k \to \infty$)“. Je-li $a_k = O(b_k)$ a zároveň $b_k = O(a_k)$, píšeme

$$a_k \asymp b_k \ \text{ pro } \ k \to \infty \ \ (\text{nebo krátce } \ a_k \asymp b_k) \tag{18}$$

a říkáme, že (pro $k \to \infty$) jsou a_k, b_k **stejného řádu**.

Nejdůležitějšími kritérii platnosti vztahů (17) a (18) jsou implikace

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R} \Rightarrow a_k = O(b_k), \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a_k \asymp b_k. \tag{19}$$

Věta 11.5. (Srovnávací kritérium.) 1. *Je-li* $|a_k| \le |b_k|$ *pro s. v.* k*, platí implikace*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \ \text{ konverguje } \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ \text{ konverguje}. \tag{20}$$

2. *Implikace* (20) *platí obecněji i v případě, že* $a_k = O(b_k)$ *pro* $k \to \infty$.

3. *Z relace* $a_k \asymp b_k$ *pro* $k \to \infty$ *plyne, že*

$$\text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ \text{ konverguje, právě když konverguje řada } \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|. \quad \square \tag{21}$$

Část 3 právě uvedené věty je tzv. **symetrická verze srovnávacího kritéria** pro řady. *Symetrická verze srovnávacího kritéria se často užívá ke zjednodušení členů dané řady, vyšetřujeme-li její absolutní konvergenci.*

Věta 11.6. (Integrální kritérium.) *Nechť* $f : \langle 1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá nezáporná monotónní funkce. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \ \text{ konverguje, právě když Newtonův integrál } \int_1^{+\infty} f \ \text{ existuje}. \tag{22}$$

Věta 11.7. (d'Alembertovo kritérium.) 1. *Existuje-li číslo* $q \in \langle 0, 1)$ *tak, že je*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \le q \ \text{ pro s. v. } k, \tag{23}$$

řada (5) *konverguje absolutně; je-li*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \ge 1 \ \text{ pro s. v. } k, \tag{24}$$

řada (5) *diverguje.*

2. *Dále platí:*

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \ \Rightarrow \ \text{řada (5) konverguje absolutně;} \tag{25}$$

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \ \Rightarrow \ \text{řada (5) diverguje.} \tag{26}$$

Věta 11.8. (Cauchyho kritérium.) 1. *Existuje-li číslo* $q \in \langle 0, 1)$ *tak, že je*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le q \ \text{ pro s. v. } k, \tag{27}$$

řada (5) *konverguje absolutně; je-li*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1 \ \text{ pro s. v. } k, \tag{28}$$

řada (5) *diverguje.*

2. *Dále platí:*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,a_k\,|} < 1 \;\;\Rightarrow\;\; \text{řada (5) konverguje absolutně;} \tag{29}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,a_k\,|} > 1 \;\;\Rightarrow\;\; \text{řada (5) diverguje.} \quad \square \tag{30}$$

Kritéria uvedená ve větách V.11.5 – V.11.8 *jsou kritéria absolutní konvergence; neabsolutní konvergenci podle nich zjišťovat nelze.*

Neabsolutní konvergenci lze však v řadě případů zjistit pomocí V.11.9 – V.11.12, které následují. Poznamenejme, že Leibnizovo kritérium je sice speciálním případem Dirichletova kritéria, ale své zvláštní postavení i název si udrželo nejen proto, že je historicky starší, ale zejména pro jednoduché předpoklady, usnadňující jeho aplikaci. Abelovo kritérium, a to zejména jeho symetrická verze, slouží (podobně jako tomu bylo v případě integrálu) ke *zjednodušení členů* vyšetřované řady; Dirichletovo kritérium se zpravidla aplikuje až na řadu dostatečně zjednodušenou.

Definice. Říkáme, že

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \tag{31}$$

je **alternující řada**, je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *monotónní* posloupnost *nezáporných* (reálných) čísel.

Věta 11.9. (Leibnizovo kritérium.) *Alternující řada* (31) *konverguje, právě když je* $a_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$.

Věta 11.10. (Dirichletovo kritérium.) *Je-li posloupnost částečných součtů komplexní řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *omezená a má-li (reálná) monotónní posloupnost* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *limitu rovnou* 0, *řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{32}$$

konverguje.

Věta 11.11. (Abelovo kritérium.) *Konverguje-li komplexní řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a je-li* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *omezená (reálná) monotónní posloupnost, řada* (32) *konverguje.*

Věta 11.12. (Symetrické Abelovo kritérium.) *Nechť* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je komplexní posloupnost a nechť dvě posloupnosti kladných čísel* b_k, c_k *splňují tyto podmínky:*

$$b_k \asymp c_k \;\; \text{pro} \;\; k \to \infty, \quad \left\{\frac{b_k}{c_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \;\; \text{je monotónní posloupnost.} \tag{33}$$

Pak

$$\text{řada} \;\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \;\; \text{konverguje, právě když konverguje řada} \;\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k\,. \tag{34}$$

Příklad 11.3. Funkce $f(x) := 1/x^\alpha$ je pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ spojitá, monotónní a kladná v $\mathbb{R}_+$, přičemž integrál $\int_1^{+\infty} f$ existuje, právě když je $\alpha > 1$. Z toho podle integrálního kritéria plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \textit{konverguje, právě když je} \quad \alpha > 1\,. \tag{35}$$

Zároveň je tím dokázáno, že alternující řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \tag{36}$$

konverguje *absolutně*, právě když je $\alpha > 1$. Je-li $0 < \alpha \leq 1$, konverguje její k-tý člen k 0, takže řada podle Leibnizova kritéria konverguje – tentokrát jen *neabsolutně*. Je-li $\alpha \leq 0$, nemá její k-tý člen limitu 0 a řada (36) podle V.11.1 *diverguje*.

Poznamenejme, že *právě dokázaná tvrzení hrají při vyšetřování konvergence řad principiální úlohu.*

Příklad 11.4. Vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \quad \textit{kde} \;\; a_k := \frac{\operatorname{arctg} k \, \operatorname{arccotg} k \, \sinh k}{k \, \cosh k}\,; \tag{37}$$

protože je $a_k > 0$ pro všechna k, půjde o konvergenci *absolutní*.

Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$0 < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 < k \operatorname{arccotg} k < 1\,, \quad 0 < \frac{\sinh k}{\cosh k} < 1\,, \tag{38}$$

je (pro všechna k)

$$0 < a_k < b_k := \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{k^2}\,. \tag{39}$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ podle (35) konverguje, platí podle 1. části V.11.5 totéž o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Aplikujeme-li místo 1. části V.11.5 její 2. část, *vyhneme se zbytečným numerickým odhadům* (38), (39) a výsledek získáme o něco snadněji: Protože je

$$\operatorname{arctg} k \asymp 1\,, \quad \operatorname{arccotg} k \asymp \frac{1}{k}\,, \quad \frac{\sinh k}{\cosh k} \asymp 1 \quad \text{pro} \quad k \to \infty\,, \tag{40}$$

je $a_k \asymp 1/k^2$; podle (35) řada (37) tedy konverguje.

Příklad 11.5. Hodnoty exponenciály se v ryze imaginárních číslech, tedy v číslech tvaru it, kde i je *imaginární jednotka* a $t \in \mathbb{R}$, definují rovností

$$e^{it} := \cos t + i \sin t\,, \tag{41}$$

z níž snadno plyne, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ je

$$(42)\qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t\,, \quad e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}\,, \quad \left(e^{it}\right)^n = e^{int}\,,$$

$$(43)\qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\,;$$

kromě toho ještě platí tato ekvivalence:

$$(44)\qquad e^{it} = 1 \Leftrightarrow t \equiv 0 \mod 2\pi\,.$$

Pro každé $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je v důsledku toho

$$(45)\qquad \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{inx/2}\ \frac{e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

$$= (\cos \tfrac{1}{2}nx + i \sin \tfrac{1}{2}nx)\ \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$$

a přechodem k reálným a imaginárním částem dostaneme identity

$$(46)\qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos \frac{1}{2}nx\ \sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx\ \sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}\,.$$

Protože $\cos kx = 1$ a $\sin kx = 0$, je-li $x \equiv 0 \mod 2\pi$, je zřejmé, že

(47) *posloupnost* $\left\{\sum_{k=0}^{n} \cos kx\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená, právě když je* $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$,

zatímco

(48) *posloupnost* $\left\{\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená pro každé* $x \in \mathbb{R}$.

Z toho a z Dirichletova kritéria ihned plyne, že

(49) *řada* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$ *konverguje, je-li* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *a* $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$,

zatímco

(50) *řada* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ *konverguje, je-li* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *a* $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\alpha > 1$, *konvergují obě řady absolutně* podle srovnávacího kritéria. Je-li $0 < \alpha \le 1$, vyšetříme nejdříve některé speciální případy: Je-li $x \equiv 0 \mod 2\pi$ (resp. $x \equiv \pi \mod 2\pi$), je k-tý člen řady ze (49) roven $1/k^\alpha$ (resp. $(-1)^k/k^\alpha$), takže řada *diverguje* (resp. *konverguje neabsolutně*). Pro $x \equiv 0 \mod \pi$ je řada z (50) *nulová* [2]).

[2]) „Nulová řada“ není podle běžně užívané terminologie řada s nulovým součtem, ale řada, *jejíž všechny členy jsou nulové*; taková řada samozřejmě konverguje absolutně.

Dokažme konečně, že *pro každé* $\alpha \in (0,1\rangle$ *a*

(51) *pro každé* $x \not\equiv 0 \mod \pi$ *konvergují řady* (49) *a* (50) *neabsolutně.*

Protože u obou řad se postupuje podobně, provedeme důkaz jen pro řadu z (50). Protože již víme, že tato řada konverguje, zbývá dokázat, že příslušná řada absolutních hodnot diverguje; k tomu stačí ověřit, že *není* splněna příslušná BC podmínka, tj. že *existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \Big|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\Big| \ge \varepsilon .$$

Dokážeme dokonce více, a to že

(52) *existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n \ge 2$ *je* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|\sin kx|}{k^\alpha} \ge \varepsilon .$

Protože funkce $|\sin kx|$ má periodu π, stačí omezit se na čísla $x \in (0,\pi)$; protože však $x \in (\frac12\pi,\pi) \Rightarrow \pi - x \in (0,\frac12\pi)$ a $|\sin k(\pi-x)| = |\sin kx|$, stačí vyšetřovat dokonce jen čísla $x \in (0,\frac12\pi\rangle$. Pro každé takové x obsahuje interval $\langle (n+1)x, 2nx\rangle$ délky $(n-1)x$ nejvýše $(n-1)x/\pi + 1 \le \frac12(n+1)$ čísel tvaru $j\pi$, kde $j \in \mathbb{Z}$. Utvoříme-li pro každé $j \in \mathbb{Z}$ otevřený interval $I_j := (j\pi - \frac12 x, j\pi + \frac12 x)$ délky x a položíme-li $\delta := \sin\frac12 x$, je patrné, že každý interval I_j obsahuje nejvýše jeden celý násobek čísla x, že pro každé t ze sjednocení všech I_j je $|\sin t| < \delta$ a že všude v doplňku tohoto sjednocení platí obrácená nerovnost $|\sin t| \ge \delta$.

Protože množina $\{kx;\, n < k \le 2n\}$ obsahuje právě n čísel, existuje v ní aspoň $n - \frac12(n+1) = \frac12(n-1)$ čísel, z nichž žádné neleží v žádném intervalu I_j, takže absolutní hodnota příslušného sinu je aspoň rovna číslu δ. Z toho dále plyne, že

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|\sin kx|}{k^\alpha} \ge \frac{\frac12(n-1)\,\delta}{(2n)^\alpha} \ge \frac{\frac12(n-1)\,\delta}{2n} \ge \Big(\frac14 - \frac1{4n}\Big)\delta \ge \tfrac18\,\delta ,$$

protože $n \ge 2$. Nahoře jsme odůvodnili, proč se při důkazu tvrzení (52) můžeme omezit na čísla $x \in (0,\frac12\pi\rangle$; je zřejmé, že v tom případě stačí položit $\varepsilon = \frac18 \sin\frac12 x$.

Příklad 11.6. Označíme-li

(53) $\displaystyle a_k(z) := \frac{z^k}{k!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ pro každé celé číslo $k \ge 0$,

je $\sum_{k=0}^\infty a_k(0) = a_0(0) = 1$. Je-li $z \ne 0$, je

$$\Big|\frac{a_{k+1}(z)}{a_k(z)}\Big| = \Big|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{z^k}\Big| = \frac{|z|}{k+1} \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty ,$$

takže podle d'Alembertova kritéria řada $\sum_{k=0}^\infty a_k(z)$ konverguje absolutně.

Tím je dokázáno, že

$$\text{(54)} \qquad \text{řada } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ \textit{konverguje absolutně pro každé } z \in \mathbb{C}.$$

Příklad 11.7. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, plyne z Cauchyho kritéria, že

$$\text{(55)} \quad \textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} z^k \ \textit{konverguje absolutně pro každé } z \in \mathbb{C}, \textit{ pro něž je } |z| < 1,$$

protože

$$\sqrt[k]{k^{\alpha} |z^k|} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^{\alpha} |z| \to |z| \ \text{ pro } \ k \to \infty$$

(sr. s Př. 3.5). Podle téhož kritéria řada z (55) *diverguje*, *je-li* $|z| > 1$, a to opět pro každé α.

Zbývá vyšetřit čísla $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z| = 1$. Pak je $|k^{\alpha} z^k| = k^{\alpha}$ a podle srovnávacího kritéria řada z (55) *konverguje absolutně pro všechna* $\alpha < -1$. Je-li $z = 1$ a $\alpha \geq -1$, řada podle integrálního kritéria *diverguje* (do $+\infty$). Je-li $z \neq 1$ a $0 > \alpha \geq -1$, existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že $z = e^{it}$, přičemž $t \not\equiv 0 \bmod 2\pi$; podle Př. 11.5 řada z (55) *konverguje neabsolutně*. Je-li $\alpha \geq 0$, nekonverguje k-tý člen k nule, takže řada *diverguje* podle V. 11.1.

Příklad 11.8. Prvním krokem vyšetření konvergence řady

$$\text{(56)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh k \ \operatorname{arccotg}^{\alpha} k}{e^k \, k^{\beta}} \sin k$$

se dvěma parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ bude zjednodušení členů řady pomocí symetrické verze Abelova kritéria: Především uvážíme, že je

$$\text{(57)} \qquad \frac{\sinh k}{e^k} \asymp 1, \quad k \operatorname{arccotg} k \asymp 1 \ \text{ pro } \ k \to \infty.$$

Protože funkce $(\sinh x)/e^x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ v $\mathbb{R}_+$ roste, lze výraz $\sinh k/e^k$ podle V. 11.12 vynechat, aniž se na konvergenci řady (56) cokoli změní. Protože i funkce $x \operatorname{arccotg} x$ v $\mathbb{R}_+$ roste, je funkce $(x \operatorname{arccotg} x)^{\alpha}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ v $\mathbb{R}_+$ monotónní, takže výraz $\operatorname{arccotg}^{\alpha} k$ lze nahradit výrazem $k^{-\alpha}$, opět aniž se cokoli na konvergenci řady změní. Z toho je patrné, že *řada* (56) *konverguje, právě když konverguje řada*

$$\text{(58)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^{\alpha+\beta}}.$$

Symetrické Abelovo kritérium dává však ještě tuto další informaci: *Řada* (56) *konverguje absolutně, právě když konverguje absolutně řada* (58).

Absolutní konvergence řady (56) je totiž totéž co konvergence řady

$$(56') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh k \ \mathrm{arccotg}^{\alpha} k}{e^k \, k^{\beta}} \, |\sin k|$$

a ta je podle tohoto kritéria ekvivalentní s konvergencí řady

$$(58') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^{\alpha+\beta}} \,,$$

tj. s absolutní konvergencí řady (58).

Tím je náš problém převeden na problém, který jsme vyřešili v Př. 10.5 : *Řada* (58) *konverguje absolutně, je-li* $\alpha + \beta > 1$, *a neabsolutně, je-li* $0 < \alpha + \beta \le 1$*; je-li* $\alpha + \beta \le 0$*, řada* (58) *diverguje. Totéž platí o řadě* (56).

Poznámka 11.2. Rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ znamená, že posloupnost částečných součtů $s(n)$ řady vlevo má limitu s. Nechť $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ je nějaká rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel, přičemž $k_0 = 0$. Nechť σ_m znamená m-tý částečný součet řady

$$(a_{k_0+1} + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{m-1}+1} + \cdots + a_{k_m}) + \cdots$$

o členech uvedených v závorkách. Pak je $\sigma_m = s(k_m)$ pro všechna m a z toho (podle věty o limitě vybrané posloupnosti – sr. s (16) z kapitoly 3) plyne, že $\sigma_m \to s$.

Tím je (za shora uvedených předpokladů o posloupnosti $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$) dokázáno toto tvrzení:

$$(59) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{k_{j-1}+1} + \cdots + a_{k_j}), \ \textit{má-li levá strana rovnosti smysl.}$$

Toto tvrzení lze považovat za **asociativní zákon** pro nekonečné řady. Všimněme si však, že (na rozdíl od konečných součtů) *k tomu, aby platila rovnost v* (59)*, nestačí, aby řada vpravo měla součet*. Je-li totiž $a_k = (-1)^{k-1}$ a $k_j = 2j$, je řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ divergentní, zatímco $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$ je řada nulová. □

Zabývejme se otázkou, zdali pro nekonečné řady platí nějaký **komutativní zákon**, tedy otázkou, zdali se součet řady nezmění, jestliže řadu nějak přerovnáme, tj. jestliže její členy sečteme „v jiném pořadí“. Nejdříve je ovšem třeba řádně definovat, co „sčítáním členů řady v jiném pořadí“ neboli „přerovnáním řady“ rozumíme.

Definice. Je-li $\varphi : \mathbb{N} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{N}$ prosté zobrazení, říkáme, že **řada**

$$(60) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

vznikla z řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **přerovnáním** φ.

Říkáme, že **řada** $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **vznikla z řady** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **přerovnáním**, existuje-li prosté zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{N}$ tak, že rovnost $b_k = a_{\varphi(k)}$ platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Věta 11.13. 1. *Je-li* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolutně konvergentní řada, platí totéž o každé řadě* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, která z ní vznikla přerovnáním; kromě toho pak je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,. \tag{61}$$

2. *Rovnost* (61) *platí i za předpokladu, že je* $a_k \geq 0$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ (*a že řada* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *vznikla z řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *přerovnáním*).

3. *Je-li* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *reálná neabsolutně konvergentní řada a je-li* $s \in \mathbb{R}^*$ *jakékoli číslo, existuje přerovnání* φ *tak, že*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s\,. \quad \square \tag{62}$$

Součet řady se tedy při přerovnání nezmění, je-li řada buď absolutně konvergentní, nebo jsou-li všechny její členy nezáporné; naopak, vhodnou změnou pořadí členů neabsolutně konvergentní reálné řady lze získat jakýkoli předem určený součet ! [3])

Příklad 11.9. Lze dokázat, že součet s (alternující neabsolutně konvergentní) řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{63}$$

je roven lg 2, ale k tomu, abychom ilustrovali, že přerovnáním se součet neabsolutně konvergentní řady může změnit, stačí vzít v úvahu, že

$$s = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big) > 0\,. \tag{64}$$

Utvořme řadu

$$\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\Big) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2\,(2k-1)} - \frac{1}{4k}\Big); \tag{65}$$

porovnáme-li pravé strany identit

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}\,, \quad \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2\,(2k-1)} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{(2k-1)\cdot 4k}\,,$$

vidíme, že se součet řady (65) rovná $\frac{1}{2}s$.

Nechť σ_n resp. τ_n značí n-tý částečný součet řady (65) resp. řady

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2\,(2k-1)} - \frac{1}{4k} + \cdots\,, \tag{66}$$

---

[3]) I u neabsolutně konvergentních komplexních řad lze přerovnáním měnit součet; příslušná věta však nedává tak elegantní výsledek jako 3. část V. 11.13.

která vznikla přerovnáním řady (63). Protože je $\tau_{3n} = \sigma_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a protože $\tau_{3n-1} - \sigma_n = 1/4n \to 0$, $\tau_{3n-2} - \sigma_n = 1/4n + 1/(4n-2) \to 0$ pro $n \to \infty$, je $\lim \tau_{3n} = \lim \tau_{3n-1} = \lim \tau_{3n-2} = \lim \sigma_n = \frac{1}{2}s$. Z toho plyne, že existuje $\lim \tau_n$ a rovná se $\frac{1}{2}s$.

Řada (66) *vzniklá přerovnáním řady* (63) (*s kladným součtem*) *má tedy poloviční součet.* □

V souvislosti s tím, že součet absolutně konvergentní řady nezávisí (podle 1. části V.11.13) na pořadí, v němž členy řady sčítáme, se zavádí pro sčítání užitečný symbol, v němž pořadí sčítání není určeno. Tento symbol se nazývá *zobecněná řada* a zahrnuje jak nekonečné absolutně konvergentní řady, tak i řady konečné. K jeho definici budeme potřebovat tento velmi důležitý pojem:

Definice. Říkáme, že množina A je **spočetná**, existuje-li prosté zobrazení jedné z množin

$$\emptyset, \quad \{1, 2, \dots, N\}, \ \textit{kde } N \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \tag{67}$$

na množinu A. □

Množina A je tedy spočetná, právě když nastane jedna z těchto tří situací:

1) A je prázdná množina.

2) A je konečná neprázdná množina; pak lze její prvky při vhodném $N \in \mathbb{N}$ seřadit do prosté (konečné) posloupnosti $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$.

3) A je nekonečná množina, přičemž její prvky lze seřadit do prosté (nekonečné) posloupnosti $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$.

Rozumíme-li *prázdnou posloupností* zobrazení prázdné množiny [4]) a značíme-li ji $\{\alpha_k\}_{k=1}^0$, vidíme, že *množina A je spočetná, právě když lze její prvky seřadit do prosté posloupnosti tvaru $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, kde N je buď nějaké nezáporné celé číslo, nebo* ∞.

Uveďme některé vlastnosti spočetných množin:

(68) *Každá část spočetné množiny je spočetná.*

(69) *Sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina.*

(70) *Kartézský součin konečného počtu spočetných množin je spočetná množina.*

(71) *Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná; totéž platí o jejích podmnožinách $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.*

(72) *Množina $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel je nespočetná; totéž platí o jejích nadmnožinách $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ a o všech intervalech $I \subset \mathbb{R}$.* □

Předpokládejme, že A je spočetná množina a že každému prvku $\alpha \in A$ je přiřazeno nějaké komplexní číslo a_α. Seřadíme-li všechny prvky množiny A do prosté (prázdné, konečné nebo nekonečné) posloupnosti

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^N \tag{73}$$

[4]) Populárně řečeno: Jde o posloupnost, která nemá žádný člen – podobně jako $\emptyset$ je množina, která nemá žádný prvek.

(kde N je tedy buď celé nezáporné číslo, nebo ∞), lze vytvořit (konečnou nebo nekonečnou) řadu

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\alpha_k}\,; \tag{74}$$

je-li tato řada nekonečná, nechť je *absolutně konvergentní*.

Abychom zjednodušili vyjadřování, umluvme se, že *každou konečnou řadu budeme považovat za absolutně konvergentní*. Podstatné je, že *za vyslovených předpokladů nezávisí součet řady* (74) *na tom, jak byly prvky množiny A seřazeny do prosté posloupnosti* (73); pro konečné řady je to důsledek platnosti běžného komutativního zákona, pro nekonečné řady to plyne z 1. části věty 11.13, která kromě toho konstatuje, že ani absolutní konvergence řady (74) nezávisí na způsobu seřazení.

To vše nás vede k zavedení symbolu sčítání, který neobsahuje informaci o pořadí, v němž se prvky dané (spočetné) množiny $A \subset \mathbb{C}$ mají sečíst; bude to symbol

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha\,, \tag{75}$$

který se nazývá **zobecněná řada**.

Jestliže posloupnost (73) vznikla seřazením prvků množiny A do prosté posloupnosti a jestliže příslušná řada (74) konverguje absolutně, budeme říkat, že **zobecněná řada** (75) **konverguje**, nebo také, že **má smysl**; její **součet** pak definujeme jako součet řady (74). Je-li tento součet roven a, píšeme

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = a\,. \tag{76}$$

Jestliže naopak při nějakém seřazení prvků (nekonečné) množiny A do prosté posloupnosti (73) příslušná řada (74) nekonverguje absolutně, budeme říkat, že **zobecněná řada** (75) **nekonverguje** nebo že **nemá smysl**; *takové řadě není pak přiřazen žádný součet*.

Věta 11.14. (Zobecněný asociativní zákon.) *Předpokládejme, že B je spočetná množina a že A_β, $\beta \in B$, jsou disjunktní spočetné množiny. Označíme-li*

$$A := \bigcup_{\beta \in B} A_\beta \tag{77}$$

a je-li $a_\alpha \in \mathbb{C}$ pro každé $\alpha \in A$, je

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{\beta \in B} \sum_{\alpha \in A_\beta} a_\alpha\,, \text{ má-li levá strana této rovnosti smysl.} \tag{78}$$

Poznámka 11.3. Asociativní zákon souvisí s tzv. uzávorkováním – sr. s Po. 11.2; u zobecněných řad jej interpretujeme tak, že místo abychom sečetli zobecněnou řadu na levé straně (78) přímo, rozložíme množinu A indexů na spočetně mnoho disjunktních spočetných množin A_β, pro každé β sečteme všechna čísla a_α, $\alpha \in A_\beta$, a výsledky tohoto sčítání sečteme přes všechna β; výsledek bude roven součtu řady vlevo, má-li tato řada smysl.

K tomu, aby levá strana (78) *měla smysl, však nestačí, aby měla smysl pravá strana*; to je zcela analogické tomu, co jsme již (v Po. 11.2) viděli u „obyčejných" řad: Je-li $a_\alpha := (-1)^{\alpha-1}$ pro všechna $\alpha \in A := \mathbb{N}$, zobecněná řada $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha$ nemá smysl. Položíme-li však $B = \mathbb{N}$ a $A_n := \{2n-1, 2n\}$ pro každé $n \in B$, je $\sum_{\alpha\in A_n} a_\alpha = 0$ pro všechna $n \in B$, takže součet na pravé straně (78) má smysl a je roven nule.

Věta 11.15. (Součin zobecněných řad.) *Konvergují-li zobecněné řady* $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha$ *a* $\sum_{\beta\in B} b_\beta$, *konverguje i řada* $\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_\alpha b_\beta$ *a platí rovnost*

$$\Big(\sum_{\alpha\in A} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in B} b_\beta\Big) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_\alpha b_\beta\,. \tag{79}$$

Definice. Konvergují-li obě zobecněné řady vlevo, nazýváme zobecněnou řadu na pravé straně (79) jejich **součinem**. $\square$

V teorii řad hraje důležitou úlohu[5]) tento speciální součin („obyčejných" řad):

Definice. Jsou-li $\{a_j\}_{j=0}^\infty$, $\{b_k\}_{k=0}^\infty$ dvě komplexní posloupnosti, nazýváme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\Big) \tag{80}$$

Cauchyho součinem řad

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,,\quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,. \quad \square \tag{81}$$

Definice neobsahuje žádné předpoklady, které by zaručily konvergenci řady (80); zavádí se jen jistý název. *Konvergencí Cauchyho součinu* se však zabývá tato věta:

Věta 11.16. *Z absolutní konvergence jedné z řad* (81) *a z konvergence druhé z nich plyne konvergence jejich Cauchyho součinu a rovnost*

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\Big). \tag{82}$$

Konvergují-li obě řady absolutně, platí totéž o jejich Cauchyho součinu.

Příklad 11.10. Označme

$$E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}; \tag{83}$$

připomeňme, že podle Př. 11.6 řada vpravo konverguje v celém $\mathbb{C}$, a to absolutně.

---

[5]) Viz např. dodatek k této kapitole.

Podle V. 11.16 platí tedy pro každá dvě čísla $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$ rovnosti

$$E(z)\,E(w) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j\,!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k\,!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j w^{n-j}}{j\,!\,(n-j)\,!}\Big)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{n\,!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n\,!} = E(z+w)\,.$$

Poznamenejme, že funkce, kterou jsme zde označili $E(z)$, je ve skutečnosti *komplexní exponenciála*, pro niž se užívá (podobně jako pro reálnou exponenciální funkci, která je její restrikcí) většinou označení $\exp z$ nebo e^z. Identita

$$E(z+w) = E(z)\,E(w) \quad \textit{pro všechna} \quad z \in \mathbb{C}\,, w \in \mathbb{C}\,, \tag{84}$$

kterou jsme dokázali, je jednou z jejích nejdůležitějších vlastností; setkali jsme se s ní již u reálné exponenciály a u exponenciály s ryze imaginárním exponentem (viz Př. 11.5). Další informace o komplexní exponenciále najde čtenář v dodatku k této kapitole.

Cvičení

V příkladech 11.01–11.50 je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $A \in \langle 0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Úkolem je rozhodnout o absolutní konvergenci každé z následujících řad; v případě, že členy řady obsahují parametr nebo parametry, je třeba nalézt všechny jejich hodnoty, při nichž je konvergence absolutní.

11.01. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,!}{k^k}$

11.02. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\,!)^2}{k^k}$

11.03. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\,!)^2}{(2k)\,!}$

11.04. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k\,!}{k^k}$

11.05. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)\,!}$

11.06. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$

11.07. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)\,!}$

11.08. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$

11.09. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a \,\lg^b k}$

11.10. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^a \,\lg^b k \,\lg^c(\lg k)}$

11.11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^k}$

11.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k}$

11.13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\sqrt[k]{k}}$

11.14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$

11.15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k^2}$

11.16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\lg(k+1)}}$

11.17. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$

11.18. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}$

11.19. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^k \frac{2kx}{x^2+k^2}$

11.20. $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}$

11.21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k^2} x^k}{(k+1)^{k^2}}$

11.22. $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k\sin^{2k} x)$

11.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{\sqrt{(k^2-k+1)^{k+1}}}$

11.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lg(1+\alpha^k)}{\alpha^k}$

11.25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$

11.26. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1}$

11.27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{e^{2kx}+e^{kx}+1}}$

11.28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^a}{1+k^b}$

11.29. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}\right)$

11.30. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-1}\right)$

11.31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^3+1}-\sqrt{k^3-1}\right)$

11.32. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k-1}\right)$

11.33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k^2+1}-\sqrt[3]{k^2-1}\right)$

11.34. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lg^a k}{k^b} \operatorname{arcctg}^c k$

11.35. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{k^n+1}-\sqrt[n+1]{k^n-1}\right)$

11.36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{k!}} z^k$

11.37. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$

11.38. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$

11.39. $\sum_{k=2}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{k}\lg k}$

11.40. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{1/(k^2+1)}-1\right)$

11.41. $\sum_{k=2}^{\infty} \sin \frac{1}{k\lg^2 k}$

11.42. $\sum_{k=1}^{\infty} \lg(1+A^k)$

11.43. $\sum_{k=0}^{\infty} kx\,e^{-kx}\cos kx$

11.44. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin\frac{x}{k}\right)^k$

11.45. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos\frac{x}{k}\right)^k$

11.46. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^k x \operatorname{arcctg}^k x$

11.47. $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k x \arccos^k x$

11.48. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)^k$

11.49. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}(2-x^2)^k$

11.50. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin^3 x - \cos^3 x)^k}{k^2}$

Nechť je opět $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $A \in \langle 0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. U každé z následujících řad rozhodněte, pro které hodnoty parametrů řada konverguje, a pak zjistěte, kdy je konvergence absolutní a kdy neabsolutní. (Při aplikaci Abelova a Dirichletova kritéria nezapomeňte ověřit monotonii příslušné posloupnosti!)

11.51. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \sin \frac{1}{k}$

11.52. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \cos \frac{1}{k}$

11.53. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k}$

11.54. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\lg k}$

11.55. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k^9}}{\lg(\lg k)}$

11.56. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

11.57. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg} k \operatorname{arccotg} \sqrt{k}$

11.58. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(k+k^{-2})}{\lg(\lg k)}$

11.59. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin k}{k^2+1}$

11.60. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin^2 k}{k^2+1}$

11.61. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos^2 k}{\lg k}$

11.62. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$

11.63. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg}^a k \sin k$

11.64. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^a \frac{1}{k} \cos k$

11.65. $\sum_{k=1}^{\infty} \arccos^a \frac{k}{k+1} \sin k$

11.66. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{A^k+1} \sin k$

11.67. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{ak}}{e^{ak}+1} \operatorname{arccotg}^b k$

11.68. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{x^{2k}+1} \cos k$

11.69. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lg\left(1+\frac{1}{k}\right) \cos k$

11.70. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{1}{\sqrt{k^3}} \cos k$

11.71. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lg\left(1-\frac{(-1)^k}{k}\right) \sin k$

11.72. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg(1+k)}{\lg(1+k^3)}$

11.73. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-k}{k+1}\right)^{-k} \arccos \frac{k}{k^2+1}$

11.74. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg(1+e^{kx})}{\lg(1+e^{3kx})}$

11.75. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a k}{x^b} \sin kx$

11.76. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lg(1+k^a)\cos kx$

11.77. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sinh kx + \cosh kx}{e^{2kx}}$

11.78. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg k}{k^a} \cos k$

11.79. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1} \frac{\cosh k!}{\sinh k!}$

11.80. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^3 k}{k}$

11.81. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+\sqrt{k}}$

11.82. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\Big)\cos kx$

11.83. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^a \frac{1}{k} \sin kx \cos kx$

11.84. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{1+x^{2k}} \frac{\sin k}{k}$

11.85. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\big(\pi\sqrt{k^2+1}\big)$

11.86. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\big(\pi\sqrt{k^2+1}\big)$

11.87. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\big(\pi\sqrt{k^2+1}\big)\sqrt[k]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

11.88. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\operatorname{cotg}\frac{1}{k} - k\Big)\frac{\sin k}{k^a}$

11.89. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\,\Big(\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^k - e\Big)\cos kx$

11.90. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\Big)\frac{\cos k}{k^a}$

Řešení

cvičení	*konverguje absolutně*	*diverguje*
11.01.	ano	ne
11.02.	ne	ano
11.03.	ano	ne
11.04.	$A \in \langle 0, e)$	$A \geq e$
11.05.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.06.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.07.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.08.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.09.	$(a>1) \vee ((a=1) \wedge (b>1))$	jindy
11.10.	$(a>1) \vee ((a=1) \wedge (b>1))$ $\vee ((a=b=1) \wedge (c>1))$	jindy

11.11.	$\lvert z\rvert > 1$	$0 < \lvert z\rvert \le 1$
11.12.	$\lvert z\rvert \le 1$	jindy
11.13.	ne	ano
11.14.	$x < 0$	$x \ge 0$
11.15.	$x \le 0$	$x > 0$
11.16.	ne	ano
11.17.	$\lvert z\rvert < 1$	$\lvert z\rvert \ge 1$
11.18.	$x = 0$	$x \ne 0$
11.19.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy
11.20.	ano	ne
11.21.	$\lvert x\rvert < e$	$\lvert x\rvert \ge e$
11.22.	$x \not\equiv 0 \mod \pi$	$x \equiv 0 \mod \pi$
11.23.	ano	ne
11.24.	$\alpha > 1$	$0 < \alpha \le 1$
11.25.	$x \ne \pm 1$	$x = \pm 1$
11.26.	$x \ne 0$	$x = 0$
11.27.	nikdy	$x \in \mathbb{R}$
11.28.	$((a \le 0) \wedge (b > 1))$ $\vee ((a > 0) \wedge (b > 0) \wedge (b - a > 1))$	jindy
11.29.	ne	ano
11.30.	ne	ano
11.31.	ano	ne
11.32.	ne	ano
11.33.	ano	ne
11.34.	$(b + c > 1) \vee ((b + c = 1) \wedge (a < -1))$	jindy
11.35.	$n > 1$	$n = 1$
11.36.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.37.	ne	ano
11.38.	nikdy	$x \in \mathbb{R}$
11.39.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy

11.40.	ano	ne
11.41.	ano	ne
11.42.	$A \in \langle 0, 1)$	$A \geq 1$
11.43.	$x \geq 0$	$x < 0$
11.44.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy
11.45.	nikdy	$x \in \mathbb{R}$
11.46.	$x > \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\pi - \sqrt{\pi^2 + 16}\,) \doteq -0.528$	jindy
11.47.	$S < x \leq 1$, kde $S := \sin \frac{1}{4}(\pi - \sqrt{\pi^2 + 16}\,) \doteq -0.467$	$-1 \leq x \leq S$
11.48.	$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}\,) < x < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,)$	jindy
11.49.	$1 \neq \lvert x \rvert < \sqrt{\sqrt{2} + 1} \doteq 1.5538$	jindy
11.50.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy

* * *

cvičení	*konvergence*	*divergence*
11.51.	neabs.	ne
11.52.	ne	ano
11.53.	neabs.	ne
11.54.	neabs.	ne
11.55.	neabs.	ne
11.56.	abs.	ne
11.57.	neabs.	ne
11.58.	neabs.	ne
11.59.	neabs.	ne
11.60.	neabs.	ne
11.61.	neabs.	ne
11.62.	neabs.	ne
11.63.	abs., je-li $a > 1$, neabs., je-li $0 < a \leq 1$	je-li $a \leq 0$
11.64.	abs., je-li $a > 1$, neabs., je-li $0 < a \leq 1$	je-li $a \leq 0$
11.65.	abs., je-li $a > 2$, neabs., je-li $0 < a \leq 2$	je-li $a \leq 0$

11.66.	abs., je-li $0 \le A < 1$	je-li $A \ge 1$
11.67.	abs., je-li $(a < 0) \vee (b > 1)$	
	neabs., je-li $(a \ge 0) \wedge (0 < b \le 1)$	jindy
11.68.	abs., je-li $x \ne \pm 1$	je-li $x = \pm 1$
11.69.	neabs.	ne
11.70.	abs.	ne
11.71.	neabs.	ne
11.72.	ne	ano
11.73.	neabs.	ne
11.74.	nikdy	je-li $x \in \mathbb{R}$
11.75.	abs., je-li $(x \equiv 0 \bmod \pi) \vee (a + b > 1)$	
	neabs., je-li $(x \not\equiv 0 \bmod \pi) \wedge (0 < a + b \le 1)$	jindy
11.76.	abs., je-li $a < -1$	
	neabs., je-li $(x \not\equiv 0 \bmod 2\pi) \wedge (-1 \le a < 0)$	jindy
11.77.	abs., je-li $x > 0$	je-li $x \le 0$
11.78.	abs., je-li $a > 1$, neabs., je-li $0 < a \le 1$	je-li $a \le 0$
11.79.	neabs.	ne
11.80.	neabs.	ne
11.81.	abs., je-li $\lvert z \rvert < 1$, neabs., je-li $\lvert z \rvert = 1 \ne z$	jindy
11.82.	neabs., je-li $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$	jindy
11.83.	abs., je-li $(x \equiv 0 \bmod \frac{1}{2}\pi) \vee (a > 1)$	
	neabs., je-li $(x \not\equiv 0 \bmod \frac{1}{2}\pi) \wedge (0 < a \le 1)$	jindy
11.84.	abs., je-li $x \ne \pm 1$, neabs., je-li $x = \pm 1$	nikdy
11.85.	ne	ano
11.86.	neabs.	ne
11.87.	ne	ano
11.88.	abs., je-li $a > 0$, neabs., je-li $-1 < a \le 0$	je-li $a \le -1$
11.89.	neabs., je-li $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$	jindy
11.90.	abs., je-li $a > -2$, neabs., je-li $-3 < a \le -2$	je-li $a \le -3$

Dodatek ke kapitole 11

Říkáme, že komplexní funkce f komplexní proměnné [6]) je **spojitá v bodě** $a \in \mathbb{C}$, platí-li implikace $z_n \to a \Rightarrow f(z_n) \to f(a)$. Slovy **spojitá funkce** budeme v tomto dodatku rozumět funkci spojitou v každém bodě $a \in \mathbb{C}$.

Říkáme, že $A \in \mathbb{C}$ je **limita funkce** f **v bodě** $a \in \mathbb{C}$, jestliže $a \neq z_n \to a \Rightarrow f(z_n) \to A$; píšeme pak $\lim_{z\to a} f(z) = A$ nebo $f(z) \to A$ pro $z \to a$.

Existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{85}$$

nazýváme ji **derivace funkce** f **v bodě** a („podle komplexní proměnné“). V tomto dodatku ji budeme značit $f'(a)$; k záměně s analogickým symbolem pro „derivaci podle reálné proměnné“ nedojde, protože se zde tato derivace nikde neobjeví.

Podobně jako je tomu v reálném oboru, platí tato dvě tvrzení:

(86) $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$, *právě když je funkce f spojitá v bodě a.*

(87) *Z existence $f'(a)$ plyne spojitost funkce f v bodě a.*

Poznamenejme, že na rozdíl od $\mathbb{R}^*$ leží v množině $\mathbb{C}$ leží pouze „konečná čísla“, takže i *všechny limity v komplexním oboru jsou podle naší definice „konečné“, a totéž tedy platí i o derivacích „podle komplexní proměnné“.* $\square$

Zcela analogicky, jako jsme v Př. 11.6 dokázali, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$, se ověří, že totéž platí o řadách $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}/(2k)!$ a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!$. Proto lze v $\mathbb{C}$ definovat funkce E, C a S rovnostmi

$$E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad C(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \tag{88}$$

jsou to po řadě: **komplexní exponenciála**, **komplexní kosinus** a **komplexní sinus**. (Neužíváme zde pro ně běžné označení $\exp z$, $\cos z$ a $\sin z$, aby nemohlo dojít k záměně se stejnojmennými reálnými funkcemi reálné proměnné. [7]))

Připomeňme, že v Př. 11.10 jsme dokázali identitu

$$E(z)\,E(w) = E(z+w) \ \text{ pro všechna } \ z \in \mathbb{C},\ w \in \mathbb{C}. \quad \square \tag{84}$$

---

[6]) tj. zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$

[7]) Důkaz, že reálná exponenciála a reálný sinus a kosinus jsou restrikce funkcí (88) a že rovnost $e^{it} = E(it)$ platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$ (sr. se (41)), najde čtenář ve druhém dílu této knihy. Lze však postupovat i jinak: V Jarníkově Diferenciálním počtu I se na začátku kapitoly 6 zavádějí (reálné) funkce sinus a kosinus spolu s číslem π „axiomaticky“, na základě čtyř jednoduchých podmínek. Všechny tyto podmínky čtenář najde i v tomto dodatku – viz zejména cvičení 11.93, 11.91, 11.96 a 11.94.

Cvičení 11.91–11.100 mohou sloužit nejen k individuálnímu procvičení operací s řadami, ale např. i jako referáty, v nichž studenti po korektním zavedení exponenciály, kosinu a sinu sami postupně odvodí základní vlastnosti těchto funkcí. Kromě jiného se též dovědí, jak lze korektně definovat číslo π, a přesvědčí se, že všechny tyto informace lze snadno získat, přejdeme-li z reálného oboru do oboru komplexního.

Cvičení

11.91. Jistě je zřejmé, že *funkce C je sudá, funkce S lichá* a že

$$E(0) = 1\,, \quad C(0) = 1\,, \quad S(0) = 0\,. \tag{89}$$

Odvoďte z (84), že

$$z \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; E(z) \neq 0\,,\; E(-z) = \frac{1}{E(z)}\,. \tag{90}$$

11.92. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ dokažte tyto identity:

$$E(\pm iz) = C(z) \pm i\,S(z)\,, \tag{91}$$

$$C(z) = \frac{E(iz) + E(-iz)}{2}\,, \quad S(z) = \frac{E(iz) - E(-iz)}{2i}\,, \tag{92}$$

$$C^2(z) + S^2(z) = 1\,. \tag{93}$$

Označte $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$ a ukažte, že (pro všechna $z \in \mathbb{C}$) je

$$E(z) = E(x + iy) = E(x) \cdot (C(y) + i\,S(y))\,, \tag{94}$$

přičemž $E(x)$, $C(y)$ a $S(y)$ jsou *reálné funkce reálné proměnné*.

R a d a . (91) plyne přímo z definic funkcí E, C a S, (92) pak vznikne z rovnic (91) sečtením resp. odečtením. K důkazu (93) a (94) se užije (91), (92) a (84).

11.93. Pomocí (84), (92) a (93) dokažte, že *identity* (tzv. *součtové vzorce*)

$$C(z+w) = C(z)\,C(w) - S(z)\,S(w)\,, \quad S(z+w) = S(z)\,C(w) + C(z)\,S(w) \tag{95}$$

platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$.

11.94. Za předpokladu, že $0 < |h| < 1$, dokažte nerovnosti

$$\Big|\frac{C(h) - 1}{h}\Big| \leq A\,|h|\,, \quad \textit{kde} \;\; A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \in \mathbb{R}_+\,, \tag{96_1}$$

$$\Big|\frac{S(h)}{h} - 1\Big| \leq B\,|h|^2\,, \;\; \textit{kde} \;\; B := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \in \mathbb{R}_+\,. \tag{96_2}$$

Všimněte si, že z nich ihned plyne, že

$$C'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{C(h) - 1}{h} = 0\,, \quad S'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)}{h} = 1\,. \tag{97}$$

Užijte (95) a (97) k důkazu, že *pro každé $z \in \mathbb{C}$ existují derivace $C'(z)$, $S'(z)$, přičemž*

$$C'(z) = -S(z)\,, \quad S'(z) = C(z)\,. \tag{98}$$

Podle (87) z toho vyplývá, že *funkce C, S jsou spojité.*

R a d a . Vyjděte z definic čísel $C(h)$ a $S(h)$ a uvažte, že

$$\begin{aligned} C(z+h) - C(z) &= C(z)\,(C(h) - 1) - S(z)\,S(h)\,, \\ S(z+h) - S(z) &= S(z)\,(C(h) - 1) + C(z)\,S(h)\,. \end{aligned}$$

11.95. Dokažte, že $C(2) < 0$, a odvoďte z toho, že *funkce C má v intervalu $(0,2)$ (aspoň jeden) kořen*; pak dokažte, že *množina $K := C_{-1}(0) \cap \mathbb{R}_+$ všech kladných kořenů funkce C má minimum.*

R a d a . Ověřte především platnost relací

$$\begin{aligned} C(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \le -1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \\ &\le -1 + \frac{16}{24} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^k \le -1 + \frac{50}{63} < 0\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Pak uvažte, že reálná spojitá funkce $C\,|\,\langle 0,2\rangle$, splňující podmínky $C(0) = 1 > 0$, $C(2) < 0$, se někde v intervalu $(0,2)$ anuluje (protože má Darbouxovu vlastnost). Protože její *infimum* A je limitou jisté posloupnosti bodů $A_k \in K$, plyne ze spojitosti funkce C, že A je *minimem* množiny K; je přitom $A > 0$, protože $C(0) = 1$.

11.96. Definujte číslo π rovností

$$\pi := 2 \min\{x \in \mathbb{R}_+\,;\ C(x) = 0\}\,, \tag{100}$$

tedy jako *dvojnásobek nejmenšího kladného kořenu funkce C*, a dokažte tato tvrzení:

A. *Restrikce $S\,|\,\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ je funkce rostoucí, restrikce $C\,|\,\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ funkce klesající v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Kromě toho je*

$$S(\tfrac{1}{2}\pi) = 1\,,\ S(\pi) = 0\,,\ C(\pi) = -1\,,\ S(2\pi) = 0\,,\ C(2\pi) = 1\,. \tag{101}$$

B. *Komplexní funkce C a S jsou 2π-periodické, což znamená, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí identity*

$$C(z \pm 2\pi) = C(z)\,, \quad S(z \pm 2\pi) = S(z)\,. \tag{102}$$

C. *Komplexní funkce E má (ryze imaginární) periodu $2\pi i$,* což znamená, že *pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí identita*

$$E(z \pm 2\pi i) = E(z). \tag{103}$$

R a d y : Ad A. Podle definice čísla π je $S'(x) = C(x) > 0$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$, takže S roste v $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a $S(\frac{1}{2}\pi) > 0$. Podle (93) je $S^2(\frac{1}{2}\pi) = C^2(\frac{1}{2}\pi) + S^2(\frac{1}{2}\pi) = 1$ a vzhledem k rovnosti $C' = -S$ funkce C v $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ klesá. (101) se odvodí z (95).

Ad B. Užijte (95) a (101).

Ad C. Stačí vyjít z (94) a z 2π-periodicity funkcí C a S.

11.97. Pomocí Cauchyho součinu dokažte, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z| < 1$, platí rovnost

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j z^{j-1}. \tag{104}$$

11.98. Položte $a_{jk}(z) := j z^{jk}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z| < 1$, a dokažte, že *zobecněná řada*

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{jk}(z) \tag{105}$$

konverguje. Pak pomocí V. 11. 14 dokažte identity

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j z^j}{1 - z^j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(1-z^k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\, z^n, \tag{106}$$

kde $d(n)$ znamená *součet všech kladných dělitelů* čísla n. Ověřte, že patnáctý částečný součet poslední řady je roven

$$1 \cdot z^1 + 3 \cdot z^2 + 4 \cdot z^3 + 7 \cdot z^4 + 6 \cdot z^5 + 12 \cdot z^6 + 8 \cdot z^7 + 15 \cdot z^8 \\ + 13 \cdot z^9 + 18 \cdot z^{10} + 12 \cdot z^{11} + 28 \cdot z^{12} + 14 \cdot z^{13} + 24 \cdot z^{14} + 24 \cdot z^{15}.$$

R a d a . Seřaďte všechna čísla $a_{jk}(z)$ do prosté posloupnosti, utvořte příslušnou řadu a ukažte, že její částečné součty mají tvar $\sum_{(j,k) \in X} a_{jk}(z)$, kde $X \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je jistá konečná množina. Zvolte $n \in \mathbb{N}$ tak, že $(j,k) \in X \Rightarrow j \le n,\ k \le n$, a ověřte, že pak platí odhady

$$\sum_{(j,k) \in X} |a_{jk}(z)| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j|z|^{jk} \le \sum_{j=1}^{\infty}\Big(j \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{jk}\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j|z|^j}{1-|z|} < +\infty.$$

Z toho plyne konvergence řady (105).

První resp. druhý součet v (106) se dostane tím, že se místo $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{jk}(z)$ (v souladu s obecným asociativním zákonem) napíše

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(z)\Big) \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}(z)\Big);$$

u druhého součtu se potřebuje i (104). Třetí součet ve (106) se získá tím, že se sečtou všechna čísla $a_{jk}(z)$, pro něž je $j+k$ rovno danému číslu $n\in\mathbb{N}$.

11.99. Za předpokladu, že $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, dokažte nejdříve *konvergenci zobecněné řady*

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} z^{jk}; \tag{107}$$

pak ukažte, že *její součet lze napsat v těchto dvou tvarech*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} z^{jk}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k}, \tag{108}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\min(j,k)=n} z^{jk}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}\,\frac{1+z^n}{1-z^n}. \tag{109}$$

Všimněte si, že n-tý člen řady na pravé straně (109) resp. (108) je stejného řádu jako $|z|^{n^2}$ resp. jako $|z|^n$; *řada na pravé straně* (109) *tedy konverguje daleko rychleji než řada na pravé straně* (108). [8])

11.100. Pro všechna celá nezáporná čísla položte

$$a_j := \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \tag{110}$$

a ukažte, že *Cauchyho součin* (*neabsolutně*) *konvergentních řad* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (neboli „čtverec“ řady o členech a_j) *diverguje.*

Porovnáte-li tento výsledek s větou V.11.16, vidíte, že *absolutní konvergence* (*aspoň*) *jedné z řad, z nichž chceme utvořit Cauchyho součin, je podmínkou podstatnou.*

R a d a . Dokažte a pak užijte nerovnost

$$\sqrt{(j+1)(n-j+1)} \le \tfrac{1}{2}(n+2)$$

platnou pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a všechna $j=0,1,\ldots,n$.

---

[8]) Podobná zjištění mají značný význam např. v situacích, kdy potřebujeme znát přibližnou hodnoty součtu nějaké řady – v našem případě řady (107). Záleží na naší šikovnosti, zdali z dané řady dovedeme utvořit jinou řadu s týmž součtem, ale o členech „velmi rychle“ konvergujících k nule.

Literatura

[1] Agnew, R.P.: Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, New York – Toronto – London, 1960

[2] Apostol, T.M.: Calculus I, Xerox College Publishing Waltham, Massachussets – Toronto, 1967

[3] Bluman, G.W.: Problem Book for First Year Calculus, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo, 1984

[4] Černý, I.: Diferenciální a integrální počet 1, TUL, Liberec, 1997

[5] Černý, I.: Matematická analýza 2. část, skriptum, TUL, Liberec, 1997

[6] Černý, I. – Rokyta, M.: Differential and Integral Calculus of One Real Variable, Karolinum, Praha, 1998

[7] Čerych, J. – Aksamit, P. – John, O. – Stará, J.: Příklady z matematické analýzy V, skriptum, SPN, Praha, 1983

[8] Demidovič, B.P.: Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analizu, Gostechizdat, Moskva – Leningrad, 1952

[9] Jarník, V.: Diferenciální počet I, 7. vyd., Academia, Praha, 1984

[10] Jarník, V.: Integrální počet I, 5. vyd., Academia, Praha, 1974

[11] Jarník, V.: Diferenciální počet II, 3. vyd., Academia, Praha, 1976

[12] Netuka, I. – Veselý, J.: Příklady z matematické analýzy III, skriptum, Univerzita Karlova, Praha, 1980

[13] Rudin, W.: Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha, 1977

[14] Rudin, W.: Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1976

[15] Siewierski, L. – Maciulewicz, J. – Smialkówna, H. – Taladaj, H. – Waszkiewicz, J.: Ćwiczenia z analizy matematicznej z zastosowaniami, Tom I, PWN, Warszawa, 1982

[16] Veselý, J.: Matematická analýza pro učitele, 1. díl, 2. díl, Matfyzpress, Praha, 1997

Rejstřík