K o n t i n u a

Ilja Černý

Obsah

Sazba systémem $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX, obrázky Mathematica 5.2

Stran 93, obrázků 35

Univerzita Karlova

Matematicko-fyzikální fakulta

Praha 2012

O díle

„Kontinua“ vznikla koncem padesátých let jako učební pomůcka k topologickému semináři na MFF UK. Byl to interní text rozmnožený tzv. ormigem *) v několika desítkách exemplářů. Byl jsem a jsem dosud velmi vděčný profesoru Eduardu Čechovi, tehdejšímu řediteli Matematického ústavu MFF UK a jednomu z největších českých matematiků, že mi text „Kontinuí“ uvedeným způsobem umožnil nejen zveřejnit, ale dokonce mi za toto skriptum dal odměnu 1000 korun (což bylo tehdy např. měsíční stipendium vědeckých aspirantů).

Skriptum je věnováno (podle mého názoru velmi zajímavé) části obecné topologie, o jejíž vznik a rozvoj se zasloužili především polští matematici světového jména – S. Janiszewski, W. Sierpiński, K. Kuratowski, B. Knaster a další, ale také ruští matematici P. S. Uryson nebo P. S. Aleksandrov. Podstatnými výsledky však přispěli i matematici ze západních zemí, např. K. Menger nebo G. T. Whyburn a R. l. Moore. **) Skriptum obsahuje řadu závažných obecných tvrzení (např. různé charakteristiky oblouku) a značné množství příkladů kontinuí, resp. křivek s vlastnostmi na první slyšení neuvěřitelnými: Existují např. rovinná kontinua K (neprázdné kompaktní souvislé množiny), která nelze rozložit na dvě kontinua $K_1,\ K_2$ různá od K; začátkem dvacátých let sestrojil B. Knaster dokonce rovinnou křivku (kontinuum dimenze 1), jejíž každé subkontinuum má uvedenou vlastnost. Oblouk má dva krajní body; lze si bez obrovské dávky fantazie představit křivku, která má v jistém smyslu „skoro samé“ krajní body?

Vzhledem k tomu, že některé věty, resp. vlastnosti konkrétních (komplikovaných) množin vyžadují ke svému odůvodnění desítky stran textu, nebylo možné všechna tvrzení uvedená v tomto skriptu dokázat; čtenář je pak informován, kde může příslušný důkaz najít. Protože jsem se v tomto obnoveném vydání snažil zachovat obsah původního skripta, nepřidával jsem žádná tvrzení ani příklady publikované později. Text jsem však upravil, aby odpovídal nynějšímu pravopisu a aby nebyl tak stručný jako originál. Počítačové programy mi dovolily úhlednější sazbu a zejména ilustraci textu obrázky. Přidal jsem „Dodatky“, které obsahují některé další informace o křivkách a několik (jak se mi zdálo) zajímavých příkladů (např. konstrukci rovinného oblouku, který má předem danou dvojrozměrnou Lebesgueovu míru).

V Praze dne 1.7.2012. I. Černý

O autorovi

Autor absolvoval studium matematické analýzy na Přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze. Po ukončení studia v roce 1952 se stal vědeckým aspirantem na MFF UK, v roce 1957 získal titul CSc., do roku 1964 byl odborným asistentem, pak docentem. V roce 1966 získal titul RNDr., v roce 1988 titul DrSc. a v roce 1989 byl jmenován profesorem pro obor matematická analýza. Do roku 1995 pracoval na MFF UK, po odchodu do důchodu působil ještě pět let na Technické univerzitě v Liberci. Jeho oborem je matematická analýza v reálném i v komplexním oboru, obecná topologie patří k jeho nejoblíbenějším matematickým disciplínám.

Poděkování

Rád bych touto cestou srdečně poděkoval panu docentu RNDr. Pavlu Pyrihovi z katedry matematické analýzy na MFF UK, že se ujal publikace tohoto skripta na internetu.

V Praze dne 1.7.2012. I. Černý

*) Pro mladší čtenáře: Ormig byl název rozmnožovací techniky (z dnešního hlediska beznadějně primitivní), kdy se psacím strojem naklepal text na křídový papír podložený zvláštním druhem kopírovacího papíru, na němž vznikl zrcadlový obraz textu. Zrcadlově okopírovaný text se pak upevnil na otočný válec a kopíroval se (otáčením válce klikou) na obyčejný papír zvlhčený (denaturovaným) lihem. Pořídit se dalo kolem sta kopií textu; měly fialovou barvu (která se dala z rukou a z látek jen velmi obtížně smýt), nebyly příliš kvalitní, ale byly kupodivu značně trvanlivé. Ještě po více než padesáti letech jsou dva exempláře, které se mi podařilo uchovat, dobře čitelné.

**) Omlouvám se za neúplnost, ale tato část topologie byla zejména ve dvacátých letech minulého století tak atraktivní, že ji svými příspěvky obohacovaly desítky dalších matematiků.

Literatura

[1] Kuratowski, K.: Topologie I, Monografie matematyczne, Warszawa – Wrocław 1948
[2] Kuratowski, K.: Topologie II, Monografie matematyczne, PTM, Warszawa 1952
[3] Menger, K.: Kurventheorie, Teubner, Berlin – Leipzig 1932
[4] Uryson, P. S.: O Kantorovych mnogoobrazijach – Trudy po topologii i drugim oblastjam matematiki, tom I – II, Gostechizdat, Moskva – Leningrad, 1951
[5] Whyburn, G. T.: Analytic Topology, New York 1942
[6] Aleksandrov, P. S.: Úvod do obecné theorie množin a funkcí, NČSAV, Praha, 1954
[7] Jarník, V.: Diferenciální počet II, NČSAV, Praha, 1956
[8] Čech, E.: Bodové množiny, Academia, Praha, 1974
[9] Engelking, R.: Topologia ogólna, PWN, Warszawa, 1976

Poznámka. V době, kdy byla péčí Matematického ústavu MFF UK vydána původní „Kontinua“, nebyly k dispozici knihy uvedené sub [8] a [9], obsahující řadu partií užitečných v upraveném textu.

0. Úvodní poznámky

Předpokládám znalost běžných základních pojmů z teorie metrických prostorů, jako je pojem uzávěru, otevřené množiny, souvislého prostoru apod. Většinu z nich včetně jejich základních vlastností lze nalézt např. v VI. kapitole Jarníkova Diferenciálního počtu II, mnohem více je obsaženo v Aleksandrovově Úvodu do obecné theorie množin a funkcí ([6]). Zatímco na tyto definice a věty nebudu odkazovat, budou v textu obsaženy odkazy na některá tvrzení z teorie dimenze, potřebná v posledních kapitolách; lze je nalézt např. v Kuratowského monografiích Topologie I a II.

Jako „věty" jsou označena podstatnější tvrzení vč. tvrzení důležitých pro další text, „poznámky" obsahují zřejmá nebo snadno dokazatelná tvrzení, důsledky a ilustrující příklady.

Označení a terminologie. Užívám stejné základní termíny jako V. Jarník v [7], až na to, že spolu s krátkým názvem „separabilní prostor" často říkám „prostor se spočetnou bází", protože mnohdy se potřebuje báze, nikoli hustá část. [1]) **Spočetná množina** je přitom množina, kterou lze prostě zobrazit do množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel; mezi spočetné množiny patří tedy všechny konečné množiny. Je-li V výroková funkce definovaná na množině X, říkáme, že $V(x)$ platí **pro téměř všechna** $x \in X$, platí-li pro každé $x \in X - S$, kde S je nějaká spočetná množina; říkáme, že $V(x)$ platí **pro skoro všechna** (zkratka: pro s.v.) $x \in X$, platí-li pro všechna $x \in X - K$, kde K je nějaká konečná množina. Je-li např. ze souvislosti zřejmé, že $X = \mathbb{N}$, říkáme zpravidla jen „pro s.v. n". Množinu všech celých čísel, racionálních čísel a (konečných) reálných čísel značíme po řadě $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Symbol $:=$ znamená, že výraz před ním je výrazem za ním definován. V dekadických, triadických, dyadických (obecně v p-adických) zlomcích píši zásadně tečky, nikoli čárky. [2])

Písmeno P (bez dalšího určení) značí **neprázdný metrický prostor s metrikou** ρ (v němž právě pracujeme nebo hodláme pracovat). Je-li $p \in P$, $A \cup B \subset P$, znamená $\rho(p, A)$ (resp. $\rho(A, B)$) **vzdálenost bodu** p **od množiny** A (resp. **vzdálenost množin** A, B). Kromě běžných znaků pro množinové operace užívám znaky $\operatorname{Int} M$, $H(M)$ a $\operatorname{der} M$ pro **vnitřek**, **hranici** a **derivaci** množiny M. $U(x, \varepsilon) := \{x' \in P;\, \rho(x', x) < \varepsilon\}$ (kde $\varepsilon > 0$) je **kruhové** epsilonové okolí bodu $x \in P$ v P, $U(M, \varepsilon) := \bigcup_{x \in M} U(x, \varepsilon)$ je **kruhové** okolí o poloměru ε množiny $M \subset P$. $U(x)$ (resp. $U(M)$) znamená (obecné) **okolí bodu** x (resp. množiny M), tj. *jakoukoli otevřenou* množinu obsahující bod x (resp. množinu M). Je-li $Q \subset P$ podprostor prostoru P, odlišíme okolí v P od okolí v Q tím, že pro okolí v P zachováme symbol U, zatímco okolí v Q budeme značit U_Q. Je $U_Q(x, \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \cap Q$ pro každé $x \in Q$ a $U_Q(M, \varepsilon) = U(M, \varepsilon) \cap Q$ pro každou množinu $M \subset Q$. Je-li G množina otevřená v P, je $G \cap Q$ množina otevřená v Q; obráceně: pro každou množinu H otevřenou v Q existuje množina G otevřená v P tak, že $H = G \cap Q$. Je-li množina otevřená i uzavřená, říkáme, že je **obojetná**.

Množina $M \subset P$ je **hustá** (v P), je-li $M \cap G \neq \emptyset$ pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$. Množina $M \subset P$ je **řídká** (v P), je-li vnitřek jejího uzávěru prázdný. *Uzavřená množina je tedy řídká, právě když nemá žádné vnitřní body. Otevřená množina $N \subset P$ je hustá v P, právě když je její doplněk $P - N$ řídký v P.*

Řetězem množin budeme rozumět každou konečnou posloupnost $M_0, M_1, \ldots, M_s$, kde $M_{i-1} \cap M_i \neq \emptyset$ pro $i = 1, 2, \ldots, s$; říkáme, že tento **řetěz spojuje body** a, b (**v** P), je-li $a \in M_0$, $b \in M_s$ a $M_i \subset P$ pro $i = 0, 1, \ldots, s$.

Znak $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (kde $n \in \mathbb{N}$) znamená **konečnou množinu** složenou z bodů $a_1, \ldots, a_n$. Podobně jako Whyburn v knize [5], Kuratowski v monografiích [1], [2] a Uryson v [4] většinou *nerozlišuji* (pokud se týká označení) bod p od jednobodové množiny $\{p\}$ a v obou případech píši zpravidla jen p; k nedorozumění nemůže dojít, protože aktuální význam písmene je vždy patrný ze souvislosti.

Symbol $X_1 \times \ldots \times X_n$ (kde $n \in \mathbb{N}$) znamená kartézský součin množin $X_1, \ldots, X_n$; je-li $X_i = X$ pro $i = 1, \ldots, n$, značím tento kartézský součin X^n. Symbol $\mathbb{A}$ (podrobněji $\mathbb{A}^1$) bude značit množinu všech (konečných) reálných čísel s obvyklými aritmetickými operacemi a uspořádáním; $\mathbb{A}^n$ je **aritmetický**

---

[1]) Budeme pracovat jen v metrických prostorech, v nichž je existence husté spočetné části ekvivalentní s existencí spočetné báze.

[2]) Počítačové programy jako je Mathematica, Maple apod. k nám přicházejí ze Západu a dokud nebudeme tak silní, abychom na světovém fóru vytlačili jejich tečky a prosadili naše čárky, měli bychom se přizpůsobit a ušetřit si řadu potíží. V naší dávnější historii jsme ostatně tečky psali – do doby, kdy nám nějaká geniální normalizační komise naordinovala čárky.

n-**rozměrný prostor.** [3]) $\mathbb{R}^n$ je n-**rozměrný eukleidovský prostor**, tj. prostor $\mathbb{A}^n$ s **kartézskou normou** a **metrikou**: Je-li $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{A}^n$, je

$$(1) \qquad ||a|| := \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\,, \quad \rho(a,b) := ||a-b|| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + \ldots + (b_n-a_n)^2}\,;$$

místo $\mathbb{R}^1$ se zpravidla píše jen $\mathbb{R}$.

Slovo „**úsečka**" bude znamenat „uzavřenou úsečku", nebude-li výslovně řečeno něco jiného; jsou-li a, b její krajní body, budeme ji značit $\langle a; b\rangle$; $(a; b)$ je příslušná **otevřená úsečka**, $\langle a; b)$, $(a; b\rangle$ příslušné **úsečky polouzavřené**.

Lomenou čarou v $\mathbb{R}^n$ budeme rozumět každou množinu tvaru

$$(2) \qquad L := \langle a_0\,; a_1\,; \ldots\,; a_p\rangle := \bigcup_{k=1}^{p} \langle a_{k-1}\,; a_k\rangle,$$

kde $p \in \mathbb{N}$ a kde body $a = a_0, a_1, \ldots, a_p = b$ leží v $\mathbb{R}^n$ a splňují podmínku $a_{k-1} \neq a_k$ pro $k = 1, \ldots, p$; budeme říkat, že **lomená čára** (2) **spojuje body** a, b. Budeme říkat, že lomená čára (2) je **prostá**, platí-li implikace

$$(3) \qquad 0 < k < p \Rightarrow \langle a_{k-1}\,; a_k\rangle \cap \langle a_k\,; a_{k+1}\rangle = a_k \quad \text{a} \quad 0 < i < j < p \Rightarrow \langle a_{i-1}\,; a_i\rangle \cap \langle a_j\,; a_{j+1}\rangle = \emptyset.$$

Snadno nahlédneme, že *prostota lomené čáry* (2) *je ekvivalentní s existencí prosté po částech lineární funkce* $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to_{\text{na}} L$.

* * *

I když předpokládáme, že čtenář **Cantorovo diskontinuum** a jeho vlastnosti zná, zopakujeme příslušnou konstrukci, abychom v dalším mohli užívat označení, která při této příležitosti zavedeme.

„Aritmetická" definice Cantorova diskontinua je velmi jednoduchá: Je to množina všech čísel

$$(4) \qquad x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}\,, \ \text{ kde } \ i_n \in \{0,1\} \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}.$$

Jinými slovy: Cantorovo diskontinuum se skládá právě ze všech čísel z intervalu $\langle 0,1\rangle$, která mají triadický rozvoj $0\,.\,i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$, kde $i_n \neq 1$ pro každé n. Ještě jinak: Cantorovo diskontinuum je rovno $\langle 0,1\rangle - M$, kde M je množina všech čísel, v jejichž triadickém zlomku *musí být* aspoň na jednom místě cifra 1. Připomeňme, že triadicky racionální čísla z intervalu $(0,1)$ lze napsat dvojím způsobem, protože

$$(5_1) \qquad 0\,.\,i_1 i_2 \ldots i_n = 0\,.\,i_1 i_2 \ldots (i_n - 1)222\ldots\,, \ \text{ je-li } \ i_n \in \{1,2\}.$$

Čísla

$$(5_2) \qquad 0 = 0\,.\,000\ldots\,, \ \tfrac{1}{3} = 0\,.\,1000\ldots = 0\,.\,0222\ldots\,, \ \tfrac{2}{3} = 0\,.\,1222\ldots = 0\,.\,2000\ldots\,, \ 1 = 0\,.\,222\ldots$$

tedy patří do Cantorova diskontinua stejně jako čísla

$$(5_3) \qquad 0\,.\,020202\ldots = \tfrac{1}{4} \ \text{ a } \ 0\,.\,202020\ldots = \tfrac{3}{4}\,.$$

Popišme nyní Cantorovo diskontinuum „geometricky": Interval $\Delta := \langle 0,1\rangle$ rozdělme na tři stejně dlouhé intervaly a označme

$$(6) \qquad \Delta(0) := \langle 0, \tfrac{1}{3}\rangle\,, \ J := (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})\,, \ \Delta(1) := \langle \tfrac{2}{3}, 1\rangle\,.$$

Z nerovností

$$(7) \qquad 0\,.\,0 i_2 \ldots i_k \ldots \le 0\,.\,0222\ldots = \tfrac{1}{3}\,, \quad 0\,.\,2 i_2 \ldots i_k \ldots \ge 0\,.\,2000\ldots = \tfrac{2}{3}$$

ihned plyne, že první cifra (za triadickou tečkou) čísel z intervalu J *musí být* 1, takže Cantorovo diskontinuum neobsahuje žádný bod z tohoto intervalu. Je tedy obsaženo v množině $\Delta(0) \cup \Delta(1)$.

---

[3]) Aritmetický prostor považujeme mlčky za prostor lineární s obvyklou definicí součtu dvou bodů (vektorů) a součinu bodu (vektoru) a čísla.

Každý z intervalů $\Delta(i_1)$ rozdělme opět na tři stejně dlouhé intervaly, první resp. třetí uzavřený interval označme $\Delta(i_1,0)$ resp. $\Delta(i_1,1)$, zatímco $J(i_1)$ je prostřední otevřený interval. Je tedy

$$\begin{aligned} &\Delta(0,0) := \langle 0, \tfrac{1}{9}\rangle\,,\ J(0) := (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9})\,,\ \Delta(0,1) := \langle \tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\rangle\,,\\ &\Delta(1,0) := \langle \tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\rangle\,,\ J(1) := (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})\,,\ \Delta(1,1) := \langle \tfrac{8}{9}, 1\rangle\,; \end{aligned} \tag{8}$$

snadno zjistíme, že zatímco při triadickém zápisu čísel z intervalů $\Delta(i_1,i_2)$ nepotřebujeme cifru 1 na prvních dvou místech, cifra 1 *musí být* na druhém triadickém místě čísel z intervalů $J(0), J(1)$.

V n-tém kroku budeme mít uzavřené intervaly

$$\Delta(i_1,i_2,\dots,i_n) = \langle 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n), 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n) + 3^{-n}\rangle\,, \tag{9}$$

kde $(i_1,i_2,\dots,i_n) \in \{0,1\}^n$, a otevřené intervaly

$$J\,,\ J(i_1)\,,\ J(i_1,i_2)\,,\ \dots\,,\ J(i_1,i_2,\dots,i_{n-1})\,; \tag{10}$$

intervaly uvedené v řádcích (9) a (10) jsou disjunktní a jejich sjednocením je $\langle 0,1\rangle$. V dalším kroku rozdělíme každý z intervalů (9) na tři stejně dlouhé intervaly; první a třetí jsou

$$\begin{aligned} &\Delta(i_1,i_2,\dots,i_n,0) = \langle 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n), 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n) + 3^{-n-1}\rangle\,,\\ &\Delta(i_1,i_2,\dots,i_n,1) = \langle 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n) + 2\cdot 3^{-n-1}, 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n) + 3^{-n}\rangle\,, \end{aligned} \tag{11}$$

druhý je roven

$$J(i_1,i_1,\dots,i_n) = (0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n) + 3^{-n-1}, 0.(2i_1)(2i_2)\dots(2i_n) + 2\cdot 3^{-n-1})\,. \tag{12}$$

Zatímco každý bod z prvního (resp. z druhého) intervalu v (11) lze napsat jako triadický zlomek, jehož $(n+1)$-ní cifra je 0 (resp. 2), body z intervalu (12) musí mít $(n+1)$-ní cifru rovnou 1.

Je zřejmé, že pro každou posloupnost $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $i_n \in \{0,1\}$ pro každé n, je bod (4) jediným bodem průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(i_1,\dots,i_n)\,, \tag{13}$$

takže Cantorovo diskontinuum Δ lze napsat ve tvaru

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n\,, \quad \text{kde} \quad \Delta_n := \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} \Delta(i_1,\dots,i_n)\,. \tag{14}$$

Čtenář, který zná definici a základní vlastnosti (jednorozměrné) Lebesgueovy míry μ, ihned vidí, že pro $\mu(\Delta_n)$, tj. pro součet délek všech intervalů, jejichž sjednocením je Δ_n, platí relace

$$\mu(\Delta_n) = (\tfrac{2}{3})^n \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty\,, \tag{15}$$

z níž plyne, že

$$\mu(\Delta) = 0\,. \tag{16}$$

Cantorovo diskontinuum je přitom nespočetná množina, protože oborem hodnot funkce f, jejíž hodnotou v bodě (4) je číslo

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}\,, \tag{17}$$

je zřejmě celý interval $\langle 0,1\rangle$. Ukažme, že funkce f je (v Δ) neklesající, tj. že (pro každou dvojici bodů x', x'' z Δ) platí implikace

$$f(x') > f(x'') \Rightarrow x' > x''. \tag{18}$$

Nechť

$$x' = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i'_n}{3^n}, \quad x'' = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i''_n}{3^n}, \tag{19}$$

kde každé z čísel i'_n, i''_n je rovno buď 0 nebo 1. Z předpokladu, že

$$f(x') - f(x'') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i'_n - i''_n}{3^n} > 0, \tag{20}$$

zřejmě plyne, že pro vhodné $N \in \mathbb{N}$ je $i'_n = i''_n$ pro $n = 1, \dots, N-1$ a $i'_N - i''_N = 1$. Podle (20) pak je

$$x' - x'' = \frac{1}{3^N}\Big(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i'_m - i''_m}{3^m}\Big) \geq \frac{1}{3^N}\Big(1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m}\Big) = \frac{1}{3^N} \cdot \frac{1}{2} > 0, \tag{21}$$

což jsme měli dokázat.

Intervaly

$$(-\infty, 0),\ J,\ J(i_1),\ \dots,\ J(i_1, \dots, i_n),\ \dots,\ (1, +\infty) \tag{22}$$

se nazývají **styčné** k Δ. Krajní body všech omezených styčných intervalů patří do Cantorova diskontinua a nazývají se **body 1. druhu**. Protože jich je jen spočetně mnoho a protože Δ je nespočetná množina, obsahuje Δ nespočetně mnoho bodů, které krajními body žádného omezeného styčného intervalu nejsou; to jsou tzv. **body 2. druhu** Cantorova diskontinua. [4])

Styčné intervaly jsou nejen disjunktní, ale žádné dva (různé) z nich nemají ani krajní bod společný; z toho snadno plyne, že Cantorovo diskontinuum nemá žádné izolované body. Protože sjednocení všech intervalů (18) je (otevřená) množina hustá v $\mathbb{R}$, je Cantorovo diskontinuum množina řídká (a uzavřená).

Poznamenejme ještě, že rovnost $\mu(\Delta) = 0$ lze dokázat i takto: Protože $\mu(J) = \frac{1}{3}$, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ má každý interval $J(i_1, \dots, i_n)$ délku 3^{-n-1} a protože těchto intervalů je 2^n, je jejich celková délka rovna

$$\tfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^n = 1; \tag{23}$$

míra Cantorova diskontinua je rovna rozdílu míry (délky) intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a součtu (23) měr všech intervalů J, tedy rovna 0.

Ještě několik slov k funkci f: Protože krajní body intervalu J lze napsat bez užití cifry 1 ve tvaru

$$\tfrac{1}{3} = 0.0222\ldots \quad \text{a} \quad \tfrac{2}{3} = 0.2000\ldots, \tag{24}$$

je

$$f(\tfrac{1}{3}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2} = f(\tfrac{2}{3}). \tag{25}$$

Obecně: Krajními body styčného intervalu $J(i_1, \dots, i_{n-1})$ jsou body tvaru

$$a := 0.(2i_1)\ldots(2i_{n-1})0222\ldots \quad \text{a} \quad b := 0.(2i_1)\ldots(2i_{n-1})2000\ldots; \tag{26}$$

protože

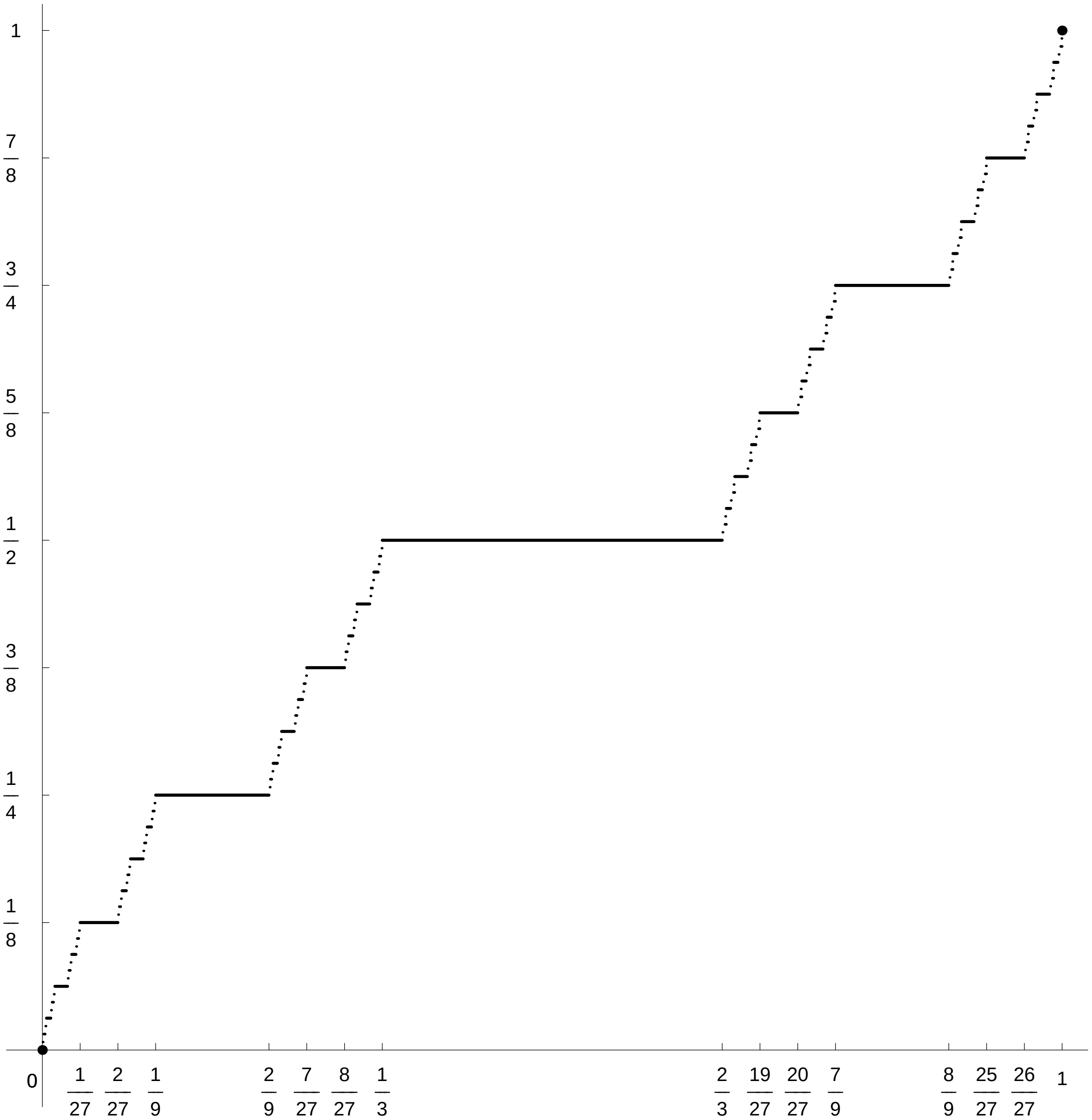
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

je zřejmě $f(a) = f(b)$. V krajních bodech každého omezeného styčného intervalu nabývá tedy funkce f stejné hodnoty; rozšíříme-li její definiční obor na celý interval $\langle 0, 1 \rangle$ tím, že ji v každém omezeném styčném

[4]) Pro nás bude (zatím) výhodnější počítat body 0 a 1 mezi body 2. druhu; literatura není v tomto ohledu jednotná. Čtenář snadno dokáže, že mezi body 2. druhu patří např. $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$.

intervalu položíme rovnu hodnotě v krajních bodech tohoto intervalu, bude f neklesající v $\langle 0,1\rangle$. Protože oborem hodnot (původní i rozšířené) funkce f je interval $\langle 0,1\rangle$, je tato funkce spojitá v $\langle 0,1\rangle$.[5])

Rozšířená funkce $f : \langle 0,1\rangle \to_{\mathrm{na}} \langle 0,1\rangle$ se nazývá **Cantorova stupňovitá funkce**; schéma jejího grafu je vyobrazeno na obr. 1.[6]) Funkce f v $\langle 0,1\rangle$ neklesá; je pozoruhodná tím, že roste jen v bodech Cantorova diskontinua: V levých (resp. pravých) krajních bodech omezených styčných intervalů zleva (resp. zprava), v bodě 0 zprava, v bodě 1 zleva a v ostatních bodech 2. druhu zleva i zprava. I když je $\mu(\Delta) = 0$, funkce f celého svého přírůstku $f(1) - f(0) = 1$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ nabývá právě jen na Cantorově diskontinuu.



Obr. 1. Schéma Cantorovy stupňovité funkce

Délka grafu funkce $F : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ se definuje jako supremum délek aproximujících lomených čar: Každému dělení $D : a = x_0 < x_1 < \ldots, x_n = b$ odpovídá lomená čára, která je sjednocením úseček

[5]) Kdyby nebyla spojitá v bodě x, bylo by buď $f(x) - f(x-) > 0$, nebo $f(x+) - f(x) > 0$; funkce f by v prvním případě nenabývala žádné hodnoty z intervalu $(f(x-), f(x))$, ve druhém případě žádné hodnoty z intervalu $(f(x), f(x+))$.

[6]) Celý graf nelze z pochopitelných důvodů nakreslit; „střídají“ se v něm (podobně jako se v $\mathbb{R}$ „střídají“ racionální a iracionální čísla) stále kratší vodorovné úsečky s místy, kde f velmi rychle roste.

s krajními body $(x_{k-1}, F(x_{k-1})$ a $(x_k, F(x_k))$, $k = 1, \dots, n$. Číslo

$$L(D) := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (F(x_k) - F(x_{k-1}))^2} \tag{27}$$

je součtem délek všech těchto úseček a **délka** L_F **grafu funkce** F je definována jako supremum čísel (27), kde D probíhá množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li F neklesající funkce, jsou její přírůstky nezáporná čísla a v důsledku toho je

$$L(D) \le \sum_{k=1}^{n}((x_k - x_{k-1}) + (F(x_k) - F(x_{k-1}))) = (b - a) + (F(b) - F(a)) \tag{28}$$

pro každé D, takže i $L_F \le (b-a)+(F(b)-F(a))$. Pro Cantorovu funkci f dostáváme tedy odhad $L_f \le 2$.

Dělení

$$D_n : 0 = x_{n,0} < x_{n,1} < \dots < x_{n,2^{n+2}} = 1 \tag{29}$$

nechť se skládá z bodů 0 a 1 a krajních bodů styčných intervalů $J, J(i_1), \dots, J(i_1, \dots, i_n)$,

$$I_{n,k} := \langle x_{k-1}, x_k\rangle,\ k = 1, \dots, 2^{n+2}, \tag{30}$$

nechť jsou intervaly dělení D_n. Lomená čára příslušná k dělení D_n je složena z 2^{n+1} šikmých úseček (odpovídajících intervalům $I_{n,k}$ s lichým k) a z $2^{n+1} - 1$ vodorovných úseček (odpovídajících intervalům $I_{n,k}$ se sudým k). Délka šikmé úsečky je

$$\sqrt{(x_{n,2k+1} - x_{n,2k})^2 + (F(x_{n,2k+1}) - F(x_{n,2k}))^2} \ge F(x_{n,2k+1}) - F(x_{n,2k}) = 2^{-n-1}, \tag{31}$$

a protože těchto úseček je 2^{n+1}, je součet délek všech šikmých úseček ≥ 1. Protože součet délek všech vodorovných úseček je roven

$$\tfrac{1}{3}(1 + (\tfrac{2}{3})^1 + (\tfrac{2}{3})^2 + \dots (\tfrac{2}{3})^{n+1} = 1 - (\tfrac{2}{3})^{n+1}, \tag{32}$$

je délka lomené čáry větší nebo rovna $1 + (1 - (2/3)^{n+1})$, což je výraz, který má pro $n \to \infty$ limitu 2.

Graf funkce f má tedy maximální možnou délku (rovnou 2).

1. Topologické limity

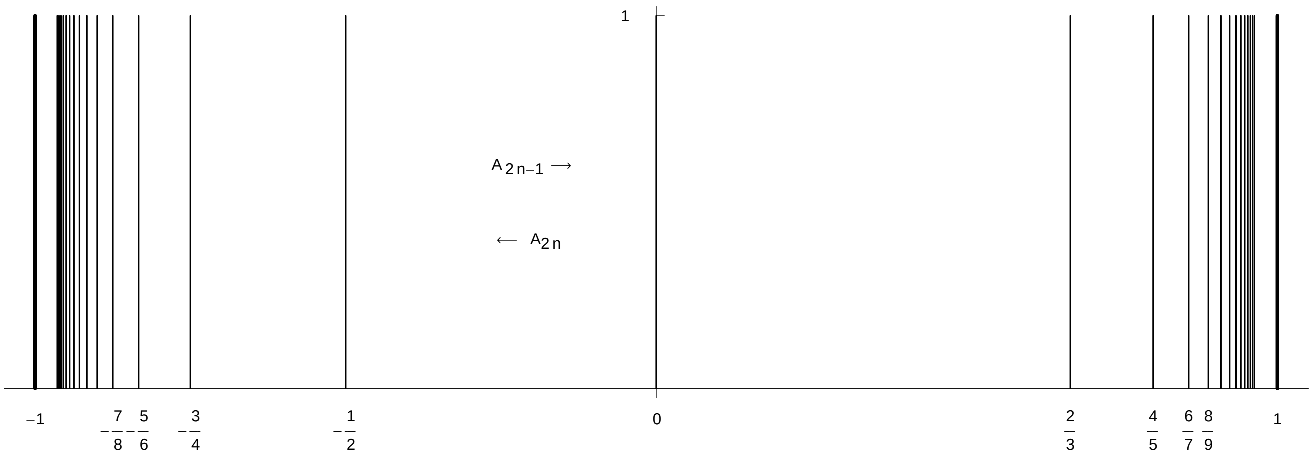
Definice 1.1. Je-li $A_n \subset P$ pro s.v. n, definujeme $\mathrm{Li}\, A_n$ jako množinu všech bodů $x \in P$, jejichž každé okolí $U(x)$ má neprázdný průnik se *skoro všemi* A_n, a $\mathrm{Ls}\, A_n$ jako množinu všech bodů $x \in P$, jejichž každé okolí $U(x)$ má neprázdný průnik s *nekonečně mnoha* A_n; první z těchto množin se nazývá **topologický limes inferior**, druhá je **topologický limes superior** posloupnosti $\{A_n\}$. Je-li $\mathrm{Li}\, A_n = \mathrm{Ls}\, A_n$, značíme tuto množinu $\mathrm{Lim}\, A_n$, nazýváme ji **topologická limita** posloupnosti $\{A_n\}$ a říkáme, že posloupnost $\{A_n\}$ k ní (**topologicky**) **konverguje**. (Říkáme, že posloupnost množin $A_n \subset P$ (**topologicky**) **konverguje** nebo **je** (**topologicky**) **konvergentní** (v prostoru P), existuje-li její topologická limita.)

Příklad 1.1. Je-li

$$A_{2n-1} := \langle(1 - \tfrac{1}{2n-1}, 0); (1 - \tfrac{1}{2n-1}, 1)\rangle, \quad A_{2n} := \langle(-1 + \tfrac{1}{2n}, 0); (-1 + \tfrac{1}{2n}, 1)\rangle \tag{1}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, je

$$\begin{gathered} \mathrm{Ls}\, A_n = \langle(1,0);(1,1)\rangle \cup \langle(-1,0);(-1,1)\rangle,\ \mathrm{Li}\, A_n = \emptyset, \\ \mathrm{Lim}\, A_{2n-1} = \langle(1,0);(1,1)\rangle,\ \mathrm{Lim}\, A_{2n} = \langle(-1,0);(-1,1)\rangle. \end{gathered} \tag{2}$$



Obr. 2. K příkladu 1.1

Poznámka 1.1. $\mathrm{Li}\, A_n$, $\mathrm{Ls}\, A_n$, $\mathrm{Lim}\, A_n$ jsou topologické pojmy [1]).

Poznámka 1.2. Vždy je $\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Ls}\, A_n$. Je-li $\{A_{n_k}\}$ posloupnost vybraná z $\{A_n\}$, je $\mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, A_{n_k} \subset \mathrm{Ls}\, A_{n_k} \subset \mathrm{Ls}\, A_n$. Konverguje-li tedy $\{A_n\}$ k A, konverguje k A každá její vybraná posloupnost $\{A_{n_k}\}$.

Poznámka 1.3. Je-li $x_n \in P$ (pro s.v. n), je $\mathrm{Ls}\, x_n$ množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{x_n\}$. Posloupnost $\{x_n\}$ má topologickou limitu právě tehdy, je-li buď konvergentní v obvyklém smyslu (načež $\mathrm{Lim}\, x_n = \lim x_n$), nebo nemá-li žádný hromadný bod (načež $\mathrm{Lim}\, x_n = \emptyset$).

Rovnost $\mathrm{Li}\, x_n = \emptyset$ platí právě v těchto dvou situacích: 1) posloupnost $\{x_n\}$ nemá žádný hromadný bod (tj. $\mathrm{Ls}\, x_n = \emptyset$), 2) posloupnost $\{x_n\}$ má aspoň dva různé hromadné body.

Poznámka 1.4. Nechť $A_n \neq \emptyset$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. K tomu, aby bylo $x \in \mathrm{Ls}\, A_n$, je nutné a stačí, aby existovaly body $x_n \in A_n$ tak, že x je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ (tj. aby existovaly body $x_{n_k} \in A_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < \dots)$ tak, že $x_{n_k} \to x$); k tomu, aby $x \in \mathrm{Li}\, A_n$, je nutné a stačí, aby existovaly body $x_n \in A_n$ tak, že $x_n \to x$.

Věta 1.1. $\mathrm{Li}\, A_n$ *a* $\mathrm{Ls}\, A_n$ *jsou uzavřené množiny.*

D ů k a z . Je-li $A := \mathrm{Li}\, A_n$, $x \in \overline{A}$, existuje ke každému okolí $U(x)$ bod $y \in A \cap U(x)$. Množina $U(x)$ je pak i okolím bodu $y \in A = \mathrm{Li}\, A_n$, takže $A_n \cap U(x) \neq \emptyset$ pro skoro všechna n, tj. $x \in A$.

[1]) tj. invarianty homeomorfních zobrazení

Podobně pro Ls A_n.

Poznámka 1.5. Je-li $A_n \subset B_n$, je Li $A_n \subset$ Li B_n, Ls $A_n \subset$ Ls B_n.

Poznámka 1.6. Li $\overline{A_n} =$ Li A_n, Ls $\overline{A_n} =$ Ls A_n.

Poznámka 1.7. Li $A_n \cup$ Li $B_n \subset$ Li$(A_n \cup B_n) \subset$ Ls$(A_n \cup B_n) =$ Ls $A_n \cup$ Ls B_n. Důsledek: Existují-li Lim A_n a Lim B_n, existuje i Lim$(A_n \cup B_n) =$ Lim $A_n \cup$ Lim B_n.

Příklad 1.2. Jsou-li $a \neq b$ dva body z P a položíme-li $A_{2n} = B_{2n-1} = \{a\}$, $A_{2n-1} = B_{2n} = \{b\}$, je Li $A_n \cup$ Li $B_n = \emptyset$, kdežto Li$(A_n \cup B_n) = \{a, b\}$; *rovnost* Li $A_n \cup$ Li $B_n =$ Li$(A_n \cup B_n)$ tedy *obecně neplatí.*

Poznámka 1.8. Je-li $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, je Lim $A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Je-li $A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, je Lim $A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Poznámka 1.9. Je-li $A_n \subset M$, kde $M \subset P$ je uzavřená množina, je též Ls $A_n \subset M$ (a v důsledku toho i Li $A_n \subset M$).

Věta 1.2. *Nechť P je kompaktní, nechť $A_n \subset P$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a nechť $U(A)$ je libovolné okolí množiny $A :=$ Lim A_n; pak je $A_n \subset U(A)$ pro s.v. n.*

D ů k a z . Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by body $x_{n_k} \in A_{n_k} - U(A)$. Kdybychom vybrali konvergentní posloupnost $x_{n_{k_j}}$ s limitou x, bylo by $x \in P - U(A)$ a zároveň $x \in$ Ls $A_n = A$, což je (podle poznámky 1.4) nemožné.

Poznámka 1.10. Je-li P kompaktní prostor a je-li $A_n \subset P$, diam $A_n \geq r > 0$ pro všechna n, je diam Ls $A_n \geq r$. [2])

D ů k a z . V každém A_n existují dva body x'_n a x''_n tak, že $\rho(x'_n, x''_n) \geq r - 1/n$. Vybereme-li posloupnosti $\{x'_{n_k}\}$ a $\{x''_{n_k}\}$ konvergující k x' resp. k x'', je $x' \cup x'' \subset$ Ls A_n a $\rho(x', x'') \geq r$.

Věta 1.3. *Je-li P prostor se spočetnou bází, lze z každé posloupnosti množin $A_n \subset P$ vybrat posloupnost (topologicky) konvergentní.* [3])

D ů k a z . Buď $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ báze P. Položme $A_n^1 := A_n$ a předpokládejme, že pro jisté $k \geq 1$ jsou sestrojeny množiny A_n^k, $n \in \mathbb{N}$. Jsou dvě možnosti:

1) Existuje-li posloupnost $\{A_{n_i}^k\}_{i=1}^{\infty}$ vybraná z $\{A_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, pro niž je $U_k \cap$ Ls $A_{n_i}^k = \emptyset$ pro každé i, položíme $A_i^{k+1} := A_{n_i}^k$;

2) jestliže taková posloupnost neexistuje, položíme $A_i^{k+1} := A_i^k$ pro každé i.

Posloupnost $\{A_i^{k+1}\}_{i=1}^{\infty}$ je v obou případech vybrána z posloupnosti $\{A_i^k\}_{i=1}^{\infty}$.

Dokažme, že „diagonální“ posloupnost $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje: Jestliže $x \notin$ Li A_n^n, existuje U_k tak, že $x \in U_k$ a pro vhodnou vybranou posloupnost $\{A_{n_i}^{n_i}\}$ je $U_k \cap A_{n_i}^{n_i} = \emptyset$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Protože $\{A_{n_i}^{n_i}\}$ je (až snad na konečně mnoho prvních členů) vybrána z $\{A_n^k\}_{n=1}^{\infty}$, nastal při k-tém kroku případ 1), takže $U_k \cap$ Ls $A_n^{k+1} = \emptyset$ pro všechna n. Protože však $\{A_n^n\}$ je vybrána (až snad na konečně mnoho prvních členů) z $\{A_n^{k+1}\}$, je též $U_k \cap$ Ls $A_n^n = \emptyset$, takže $x \notin$ Ls A_n^n.

Dokázali jsme implikaci $x \notin$ Li $A_n^n \Rightarrow x \notin$ Ls A_n^n, tj. inkluzi Ls $A_n^n \subset$ Li A_n^n; Lim A_n^n tedy skutečně existuje.

Příklad 1.3. Snadno se může stát, že z dané posloupnosti $\{A_n\}$ nelze vybrat žádnou topologicky konvergentní posloupnost s neprázdnou limitou; stačí, aby Lim $A_n = \emptyset$. Dva jednoduché příklady: $P = \mathbb{R}$ (takže P je úplný, ale neomezený prostor) a $A_n := \{n\}$, nebo $P = (0, 1)$ (takže P je neúplný, ale omezený prostor) a $A_n := (1 - \frac{1}{n}, 1,)$.

Ani dodatečný předpoklad, že P je úplný prostor a že množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je omezená, však nestačí [4]) k tomu, aby z posloupnosti množin $A_n \subset P$ bylo možné vybrat posloupnost s neprázdnou limitou: Je-li P např. Hilbertův prostor všech nekonečných posloupností $\{a_n\}$ reálných čísel, pro něž je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergentní řada, v němž je norma definována rovností

$$||\{a_n\}|| := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2}, \qquad (3)$$

---

[2]) diam(M) je *průměr* množiny M. diam$(\emptyset) := 0$, pro neprázdnou M je diam$(M) := \sup\{\rho(x, y);\, x, y \in M\}$.

[3]) Limita této vybrané posloupnosti může ovšem být prázdná.

[4]) na rozdíl od kompaktnosti prostoru P – viz poznámku 1.12

a je-li e_n posloupnost, jejíž n-tý člen je 1, zatímco ostatní členy jsou nulové, je $||e_m - e_n|| = \sqrt{2}$ pro každé dva indexy $m \neq n$, takže posloupnost $\{e_n\}$ nemá žádný hromadný bod. Z posloupnosti jednobodových množin $A_n := \{e_n\}$ nelze vybrat žádnou (topologicky) konvergentní posloupnost s neprázdnou limitou, protože $\mathrm{Lim}\, A_n = \emptyset$.

Poznámka 1.11. V prostoru se spočetnou bází je $\mathrm{Ls}\, A_n = \bigcup \mathrm{Lim}\, A_{n_k}$, kde vpravo se sjednocuje přes všechny (topologicky) konvergentní posloupnosti $\{A_{n_k}\}$ vybrané z $\{A_n\}$.

D ů k a z . Pravá strana je podle poznámky 1.2 obsažena v levé. Je-li $x \in \mathrm{Ls}\, A_n$, existují podle poznámky 1.4 body $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tak, že $x_{n_k} \to x$. Z posloupnosti $\{A_{n_k}\}$ lze (podle věty 1.3) vybrat konvergentní posloupnost $\{A_{n_{k_j}}\}$; znamená-li A její limitu, je $x \in A$.

Poznámka 1.12. *Je-li P kompaktní prostor a jsou-li $A_n \subset P$ neprázdné množiny, je $\mathrm{Lim}\, A_n \neq \emptyset$, pokud limita vlevo existuje.*

D ů k a z . Je-li $A := \mathrm{Lim}\, A_n$, $x_n \in A_n$, je každý hromadný bod x posloupnosti $\{x_n\}$ obsažen v A, a vzhledem ke kompaktnosti prostoru alespoň jeden hromadný bod existuje.

2. Souvislé prostory

Definice 2.1. Říkáme, že množiny $A \subset P$, $B \subset P$ jsou **oddělené**, je-li $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

Poznámka 2.1. Je-li jedna z množin A, B prázdná, jsou množiny A, B oddělené. *Každý* prostor má proto rozklad na dvě oddělené množiny; rozklady tvaru $P = P \cup \emptyset$ a $P = \emptyset \cup P$ se nazývají **triviální**.

Definice 2.2. Říkáme, že prostor P je **souvislý**, má-li *jen* triviální rozklad na dvě oddělené množiny. Říkáme, že prostor P je **nesouvislý**, není-li souvislý.

Nesouvislý je tedy takový prostor, který má aspoň jeden *netriviální* rozklad na dvě oddělené části.

Poznámka 2.2. *Je-li $P = A \cup B$, jsou množiny A, B oddělené, právě když jsou disjunktní a buď obě otevřené, nebo obě uzavřené.* [1])

Věta 2.1. *Jsou-li množiny $M \subset P$, $N \subset P$ buď obě uzavřené, nebo obě otevřené, jsou množiny $A := M - N$, $B := N - M$ oddělené.*

D ů k a z . Abychom ukázali, že $\overline{A} \cap B = \emptyset$, pišme

$$\overline{A} \cap B = \overline{M \cap (P - N)} \cap N \cap (P - M) \subset \overline{M} \cap \overline{P - N} \cap N \cap (P - M)\,.$$

Je-li množiny M, N uzavřené, je $\overline{M} = M$ a výraz za $\subset$ je roven $M \cap \overline{P - N} \cap N \cap (P - M) = \emptyset$. Jsou-li množiny M, N otevřené, je množina $P - N$ uzavřená a výraz za $\subset$ je roven $\overline{M} \cap (P - N) \cap N \cap (P - M) = \emptyset$.

Podobně se dokáže rovnost $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

* * *

Předpokládám, že čtenář zná základní věty o souvislých prostorech (viz např. [6] nebo [7]) a uvedu proto jen některá tvrzení, která se v běžných učebnicích obvykle nevyskytují.

Věta 2.2. *Nechť C je souvislá podmnožina souvislého prostoru P. Je-li $P - C = A \cup B$, kde A, B jsou oddělené množiny, jsou množiny $A \cup C$, $B \cup C$ souvislé. Je-li C navíc uzavřená, jsou i množiny $A \cup C$, $B \cup C$ uzavřené.*

D ů k a z . Protože případ $C = \emptyset$ je triviální, předpokládejme, že $C \neq \emptyset$, a dokažme tvrzení věty např. pro množinu $A \cup C$; pro množinu $B \cup C$ je důkaz zcela analogický. Nejdříve souvislost: Nechť

$$A \cup C = D \cup E\,,$$

kde D, E jsou oddělené množiny. Protože C je souvislá, je obsažena buď v D, nebo v E; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $C \subset D$. Pak je $D \neq \emptyset$ a $E \subset A$, a protože množiny A, B jsou oddělené, platí totéž o množinách E, B, a tedy i o množinách E, $B \cup D$. Protože $P = A \cup B \cup C = B \cup D \cup E$, protože prostor P je souvislý a protože $B \cup D \neq \emptyset$, je $E = \emptyset$. $A \cup C$ je tedy souvislá množina.

Předpokládejme nyní navíc, že množina C je uzavřená. Potom je

$$\overline{C \cup A} = \overline{C} \cup \overline{A} = C \cup \overline{A} = (C \cup \overline{A}) \cap (A \cup B \cup C) = [(C \cup \overline{A}) \cap (C \cup A)] \cup [(C \cup \overline{A}) \cap B] = C \cup A\,,$$

což ukazuje, že $C \cup A$ je uzavřená množina.

Věta 2.3. *Nechť $P = M \cup N$ a nechť množiny M, N jsou buď obě uzavřené, nebo obě otevřené. Jsou-li obě množiny $M \cap N$ a $M \cup N$ souvislé, jsou souvislé i množiny M a N.*

D ů k a z . Ve větě 2.2 položme $A = M - N$, $B = N - M$ a $C = M \cap N$. Množiny A, B jsou pak podle věty 2.1 oddělené, takže množiny $A \cup C = M$, $B \cup C = N$ jsou podle věty 2.2 souvislé.

* * *

Definice 2.3. Oblastí prostoru P se nazývá každá jeho souvislá otevřená podmnožina.

Příklady. V $\mathbb{R}$ jsou oblastmi jen otevřené intervaly a prázdná množina. Oblastmi v $\mathbb{R}^2$ jsou např. otevřený kruh a otevřený (dvojrozměrný) interval, (otevřená) polorovina, (otevřený) pás (mezi dvěma rovnoběžkami), (otevřený) úhel, (otevřené) mezikruží, množina $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}$, atd. V $\mathbb{R}^3$ jsou oblastmi např.

[1]) Je-li $P = A \cup B$ a množiny vpravo jsou disjunktní, jsou obě otevřené (uzavřené), právě když jsou obě uzavřené (otevřené). *Prostor P je tedy nesouvislý, právě když má netriviální rozklad na dvě obojetné množiny.*

(otevřená) koule, krychle, poloprostor nebo anuloid (torus), ale např. i množina $\mathbb{R}^3 - A$, kde A je sjednocení všech přímek rovnoběžných s osou z a protínajících rovinu xy v bodech s celočíselnými souřadnicemi.

Definice 2.4. Komponentou prostoru P nazýváme každou maximální souvislou podmnožinu prostoru P (tj. souvislou množinu $M \subset P$, pro niž platí: Je-li $M \subset N \subset P$ a je-li N souvislá, je $N = M$).

Poznámka 2.3. Snadno nahlédneme, že platí tato tvrzení:

1. Pojem komponenty je (stejně jako pojem oblasti) topologický.

2. Dvě různé komponenty prostoru P jsou disjunktní a prostor P je sjednocením všech svých komponent.

3. Každá souvislá množina $A \subset P$ je částí některé komponenty prostoru P.

4. Komponenty prostoru P jsou vždy *uzavřené* množiny (neboť je-li M souvislá, je i $\overline{M}$ souvislá).

5. Komponenty obecně *nejsou* otevřené. (Příklad. Komponentami prostoru $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel jsou právě všechny jeho jednobodové části; žádná z nich však v něm není otevřená.)

6. Je-li G např. otevřená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^n$, jsou všechny její komponenty také otevřené – v G, tedy i v $\mathbb{R}^n$. (Důkaz. Je-li H komponentou otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^n$ a je-li $x \in H$, existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U(x, \varepsilon) \subset G$. Protože toto okolí je souvislé, je souvislá i množina $H \cup U(x, \varepsilon) \subset G$; protože H je maximální souvislá část množiny G, je $U(x, \varepsilon) \subset H$.)

Označení. Pro každé $x \in P$ označíme $\operatorname{komp}_x P$ komponentu prostoru P obsahující bod x.

* * *

Definice 2.5. Je-li $\varepsilon > 0$, nazýváme ε-**řetězem** v P každou konečnou posloupnost bodů $a_i \in P$, $0 \le i \le n$, $n \in \mathbb{N}$, pro niž je $\rho(a_{i-1}, a_i) < \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, n$; je-li $p = a_0$, $a_n = q$, říkáme, že tento řetěz body p, q (v P) **spojuje**. Říkáme, že prostor P je ε-**sřetězený**, jestliže pro každé dva body $p \in P$, $q \in P$ existuje ε-**řetěz** spojující p, q v P. Prostor se nazývá **sřetězený**, je-li ε-sřetězený pro každé $\varepsilon > 0$.

Příklad 2.1. Množina všech celých čísel je ε-sřetězená pro každé $\varepsilon > 1$. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je sřetězená. Množina $\{n^2;\, n \in \mathbb{N}\}$ není ε-sřetězená pro žádné $\varepsilon > 0$.

Věta 2.4. *Souvislý prostor je sřetězený. Kompaktní sřetězený prostor je souvislý.*

D ů k a z . 1. Snadno nahlédneme, že je-li $p \in P$, $\varepsilon > 0$, je množina všech bodů $x \in P$, které lze spojit s bodem $p \in P$ nějakým ε-řetězem bodů z P, obojetná; je-li prostor P souvislý, je tedy rovna P.
2. Je-li P kompaktní a nesouvislý, je $P = A \cup B$, kde A, B jsou kompaktní neprázdné množiny. Potom však je $\varepsilon := \rho(A, B) > 0$ a prostor P zřejmě není ε-sřetězený.

Věta 2.5. *Nechť P je kompaktní prostor, nechť $A_n \subset P$ jsou ε_n-sřetězené množiny a nechť $\varepsilon_n \to 0$. Existuje-li $\operatorname{Lim} A_n$, je to souvislá množina. Obecněji: Je-li $\operatorname{Li} A_n \ne \emptyset$, je $\operatorname{Ls} A_n$ souvislá množina.*

D ů k a z . 1. Předpokládejme, že množina $A := \operatorname{Lim} A_n$ není souvislá; protože je (podle věty 1.1) kompaktní, existují neprázdné, disjunktní a kompaktní množiny M, N tak, že $A = M \cup N$. Pak je $r := \rho(M, N) > 0$ a množina $U := U(M, \frac{1}{3}r) \cup U(N, \frac{1}{3}r)$ je okolím množiny A; z věty 1.2 vyplývá, že pro skoro všechna n je $A_n \subset U$. Z podmínky $A = \operatorname{Lim} A_n$ dále plyne, že pro skoro všechna n je

$$A_n \cap U(M, \tfrac{1}{3}r) \ne \emptyset \ne A_n \cap U(N, \tfrac{1}{3}r).$$

V opačném případě by totiž existovala vybraná posloupnost $\{A_{n_k}\}$, jejíž všechny členy by byly disjunktní např. s $U(M, \frac{1}{3}r)$, a totéž by pak platilo i pro množinu $A = \operatorname{Lim} A_{n_k}$. Z toho by však plynulo, že $M = \emptyset$ – spor. Protože vzdálenost množin $U(M, \frac{1}{3}r)$, $U(N, \frac{1}{3}r)$ je $\ge \frac{1}{3}r$, musí pro skoro všechna n být i $\varepsilon_n \ge \frac{1}{3}r$, takže není splněn jeden z předpokladů věty.
2. Podle poznámky 1.11 je

$$\operatorname{Ls} A_n = \bigcup \operatorname{Lim} A_{n_k},$$

kde vpravo se sjednocuje přes všechny konvergentní posloupnosti vybrané z $\{A_n\}$. Každý sčítanec je podle toho, co jsme již dokázali, souvislý, a protože každý obsahuje neprázdnou množinu $\operatorname{Li} A_n$ (viz poznámku 1.2), je i celé sjednocení vpravo souvislé.

* * *

Definice 2.6. Říkáme, že **prostor P je nesouvislý mezi množinami** $A \subset P$, $B \subset P$, je-li $P = M \cup N$, kde M, N jsou oddělené množiny, přičemž $A \subset M$, $B \subset N$. V opačném případě říkáme, že

prostor P **je souvislý mezi** A, B. Říkáme, že množina $D \subset P$ **roztíná** P **mezi množinami** A, B, je-li podprostor $P - D$ nesouvislý mezi A, B. Říkáme, že $D \subset P$ **roztíná** P, existují-li neprázdné množiny $A \subset P$, $B \subset P$ tak, že prostor P je mezi množinami A, B souvislý a jeho podprostor $P - D$ nesouvislý.

Příklad 2.2. Souvislý prostor P je souvislý mezi kterýmikoli svými body p, q. Jednotková kružnice D roztíná rovinu $\mathbb{R}^2$, protože ji roztíná např. mezi počátkem p a kterýmkoli bodem q, pro nějž je $\rho(p,q) > 1$. Podprostor $\mathbb{R}^2 - D$ je mezi takovými dvěma body nesouvislý.

Věta 2.6. *Roztíná-li $D \subset P$ prostor P mezi množinami A, B, existuje uzavřená množina $D^* \subset D$, která též roztíná P mezi A, B.*

D ů k a z . Je

$$P - D = M \cup N\,, \ \text{kde} \ \overline{M} \cap N = \emptyset = M \cap \overline{N}\,, \ A \subset M\,, \ B \subset N\,.$$

Položíme-li

$$M^* = \{x \in P;\, \rho(x,M) < \rho(x,N)\}\,, \quad N^* = \{x \in P;\, \rho(x,M) > \rho(x,N)\}\,, \quad D^* = P - (M^* \cup N^*)\,,$$

je $M^* \supset M$, $N^* \supset N$ a množiny M^*, N^* jsou disjunktní a otevřené [2]), takže množina $D^* \subset D$ je uzavřená.

Poznámka 2.4. *Roztíná-li uzavřená množina D prostor P a je-li množina Q hustá v P, existují body $p \in Q$, $q \in Q$ tak, že D roztíná P mezi p a q.*

D ů k a z . Podle předpokladu existují neprázdné množiny A, B, mezi nimiž je podprostor $P - D$ nesouvislý, takže $P - D = M \cup N$, kde $\overline{M} \cap N = M \cap \overline{N} = \emptyset$, $A \subset M$, $B \subset N$. Množiny M, N jsou neprázdné a otevřené; protože množina Q je hustá v P, existují body $p \in Q \cap M$, $q \in Q \cap N$, a D zřejmě roztíná P mezi p, q.

* * *

Věta 2.7. *Nechť P je souvislý prostor se spočetnou bází a nechť $a \in P$, $b \in P$. Nechť $\mathfrak{S}$ je disjunktní systém souvislých uzavřených podmnožin prostoru P, z nichž každá roztíná P mezi body a, b. Je-li $C \in \mathfrak{S}$, buď*

$$P - C = M(C) \cup N(C)\,, \tag{1}$$

kde množiny $M(C)$ a $N(C)$ jsou oddělené, $a \in M(C)$, $b \in N(C)$. [3]) *Položíme-li pak $A(C) := C \cup M(C)$, platí tato tvrzení:*

I. *Je-li $C \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{S}$, $C \neq D$, je $M(C) \neq M(D)$ a buď $A(C) \subset M(D) \subset \operatorname{Int} A(D)$, nebo $A(D) \subset M(C) \subset \operatorname{Int} A(C)$.*

II. *Množinám $C \in \mathfrak{S}$ lze přiřadit indexy ležícími v intervalu $(0,1)$ tak, aby pro každou dvojici x, y užitých indexů platila implikace*

$$x < y \ \Rightarrow\ A(C_x) \subset M(C_y) \subset \operatorname{Int} A(C_y) \subset A(C_y)\,. \tag{2}$$

Píšeme-li pak krátce $A_x = A(C_x)$, $M_x = M(C_x)$, $N_x = N(C_x)$, platí pro téměř všechny indexy y tyto identity:

$$\operatorname{Int} A_y = \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x = \bigcup_{x<y} A_x = M_y\,, \tag{3}$$

$$A_y = \overline{\bigcup_{x<y} A_x} = \overline{M_y} = \overline{\operatorname{Int} A_y}\,, \tag{4}$$

$$A_y = \bigcap_{z>y} \operatorname{Int} A_z = \bigcap_{z>y} A_z\,. \tag{5}$$

III. *Pro téměř všechna $C \in \mathfrak{S}$ platí:*

---

[2]) Otevřenost plyne ze spojitosti funkcí $\rho(x,M)$ a $\rho(x,N)$.

[3]) Takových rozkladů množiny $P - C$ na dvě oddělené množiny může být více; vybereme libovolně, ale pevně jednu dvojici. Vzhledem k tomu, že množina C je uzavřená, jsou množiny $M(C), N(C)$ otevřené (v otevřené množině $P - C$, tedy i v P).

a) $\operatorname{Int} A(C) = M(C)$, $H(A(C)) = C$;
b) $C = H(M(C)) = H(N(C))$;
c) *existuje rostoucí posloupnost množin* $D_n \in \mathfrak{S}$ *a klesající posloupnost množin* $E_n \in \mathfrak{S}$ *tak, že*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} M(D_n) \cap N(E_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(D_n) \cap \overline{P - A(E_n)}; \tag{6}$$

d) *množiny* $M(C)$ *a* $N(C)$ *jsou souvislé.*

D ů k a z . I. Je-li $C \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{S}$, $C \neq D$, je buď $D \subset M(C)$, nebo $D \subset N(C)$, neboť D je souvislá podmnožina sjednocení $M(C) \cup N(C)$ oddělených množin $M(C)$, $N(C)$. Ukažme nejdříve, že

$$D \subset M(C) \;\Rightarrow\; A(D) \subset M(C). \tag{7}$$

Z inkluze $D \subset M(C)$ a z rovností

$$P = C \cup M(C) \cup N(C) = D \cup M(D) \cup N(D) \tag{8}$$

plyne, že

$$P = (C \cup M(C) \cup M(D)) \cup (N(C) \cap N(D)). \tag{9}$$

Protože $C \subset P - D = M(D) \cup N(D)$, je buď $C \subset M(D)$, nebo $C \subset N(D)$; kdyby však bylo $C \subset M(D)$, bylo by $P = (M(C) \cup M(D)) \cup (N(C) \cap N(D))$, což není možné, protože prostor P je souvislý a množiny $M(C) \cup M(D)$, $N(C) \cap N(D)$ jsou neprázdné a oddělené.

Je tedy $C \subset N(D)$; z této inkluze, z premisy implikace (7) a z identit (8) plyne, že

$$P = C \cup D \cup M(C) \cup N(D) \cup (M(D) \cap N(C)) = (M(C) \cup N(D)) \cup (M(D) \cap N(C)), \tag{10}$$

kde množiny $M(C) \cup N(D)$, $M(D) \cap N(C)$ jsou oddělené, přičemž $a \in M(C) \cup N(D)$, takže tato množina není prázdná. Ze souvislosti prostoru P plyne, že $M(D) \cap N(C) = \emptyset$, tedy $M(D) \subset P - N(C) = M(C) \cup C$; protože $C \subset N(D) \Rightarrow C \cap M(D) = \emptyset$, je dokonce $M(D) \subset M(C)$. Protože $D \subset M(C)$, je $A(D) = D \cup M(D) \subset M(C)$, což je závěr implikace (7).

Protože množina $M(C) \subset A(C)$ je otevřená, je částí $\operatorname{Int} A(C)$; dokázali jsme tedy implikaci

$$D \subset M(C) \;\Rightarrow\; A(D) \subset M(C) \subset \operatorname{Int} A(C). \tag{11$'$}$$

Podobně se dokáže implikace

$$C \subset M(D) \;\Rightarrow\; A(C) \subset M(D) \subset \operatorname{Int} A(D). \tag{11$''$}$$

Protože premisa jedné z těchto implikací platí, platí i příslušný závěr. Rovnost $M(C) = M(D)$ by spolu s (11′) vedla k inkluzi $A(D) \subset M(D)$, spolu s (11″) k inkluzi $A(C) \subset M(C)$, tedy v obou případech ke sporu. Tím je část I věty 2.7 dokázána.

II. Zvolme pevně nějakou spočetnou bázi $\mathfrak{B}$ prostoru P a sestavme její prvky do posloupnosti $\{U_n\}$ tak, aby pro každé $U \in \mathfrak{B}$ bylo $U = U_n$ pro nekonečně mnoho indexů n. Pro každou množinu $C \in \mathfrak{S}$ tvoří pak indexy n, pro něž je $U_n \subset M(C)$, jistou rostoucí posloupnost $\{n_k\}$; číslo

$$x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k}} \tag{12}$$

lze napsat i jako dyadický zlomek tvaru $0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, kde α_n je rovno 1, nebo 0 podle toho, zdali je $U_n \subset M(C)$, nebo ne. Protože pro žádné $C \in \mathfrak{S}$ není ani $M(C) = \emptyset$, ani $M(C) = P$, existuje $U' \in \mathfrak{B}$ tak, že $U' \subset M(C)$, a $U'' \in \mathfrak{B}$ tak, že $U'' \not\subset M(C)$; z toho plyne, že v dyadickém zlomku je nekonečně mnoho cifer rovných 1 a nekonečně mnoho cifer rovných 0. Je tedy $x \in (0,1)$ a cifry zlomku $0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ jsou jeho hodnotou x určeny jednoznačně. Dále je patrné, že posloupnosti $\{n_k\}$, $\{n'_k\}$ odpovídající dvěma různým množinám $C \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{S}$ jsou různé, protože $C \neq D \Rightarrow M(C) \neq M(D)$ a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n_k} = M(C) \neq M(D) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n'_k};$$

v důsledku toho je číslo (12) různé od čísla

$$x' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n'_k}} . \tag{12'}$$

Je-li $C \in \mathfrak{S}$, je-li $M(C) = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n_k}$ a platí-li (12), budeme množinu C značit C_x; označení je korektní, protože podle toho, co jsme řekli, index x za uvedených podmínek množinu C jednoznačně identifikuje. Položme ještě $M_x = M(C_x)$, $A_x = A(C_x)$ a $N_x = N(C_x)$.

Jsou-li x, y dva různé indexy, je podle části I buď $A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y$, nebo $A_y \subset M_x \subset \operatorname{Int} A_x$. Z inkluze $A_x \subset M_y$ plyne, že $M_x \subset M_y \neq M_x$. Každé U_n obsažené v M_x je obsaženo i v M_y, posloupnost $\{n_k\}$ příslušná k C_x je vybrána z posloupnosti $\{n'_k\}$ příslušné k C_y; protože M_x je pravou částí množiny M_y, existuje $U_n \subset M_y$ tak, že $U_n \not\subset M_x$, a takový index n je roven nekonečně mnoha indexům n'_k, ale není roven žádnému z indexů n_k. Z toho zřejmě plyne, že $x < y$. Z inkluzí $A_y \subset M_x \subset \operatorname{Int} A_x$ by se obdobně odvodila nerovnost $y < x$.

Je-li tedy $x < y$, je $A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y$; protože inkluze $\operatorname{Int} A_y \subset A_y$ je zřejmá, je tím implikace (2) dokázána.

Užívejme zavedená označení a mějme na paměti, že množiny M_x, N_x jsou disjunktní a otevřené, zatímco množiny A_x jsou uzavřené. Protože

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow \operatorname{Int} A_x \subset A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y \subset A_y , \\ y < z &\Rightarrow \operatorname{Int} A_y \subset A_y \subset M_z \subset \operatorname{Int} A_z \subset A_z , \end{aligned} \tag{13}$$

je též

$$\bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x \subset \bigcup_{x<y} A_x \subset M_y \subset \operatorname{Int} A_y \subset A_y , \tag{14}$$

$$\operatorname{Int} A_y \subset A_y \subset \bigcap_{z>y} M_z \subset \bigcap_{z>y} \operatorname{Int} A_z \subset \bigcap_{z>y} A_z . \tag{15}$$

Je-li $\operatorname{Int} A_y - \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x \neq \emptyset$, zvolme v této množině bod w a pak najděme číslo $n(y) \in \mathbb{N}$ tak, že $w \in U_{n(y)} \subset \operatorname{Int} A_y$; protože $x < y \Rightarrow w \notin \operatorname{Int} A_x$, platí implikace $x < y \Rightarrow U_{n(y)} \not\subset \operatorname{Int} A_x$.

Ukažme, že přiřazení čísla $n(y)$ indexu y je prosté. Je-li $n(y')$ číslo přiřazené popsaným způsobem indexu $y' \neq y$, pro který je $\operatorname{Int} A_{y'} - \bigcup_{x<y'} \operatorname{Int} A_x \neq \emptyset$, je buď $y' > y$, nebo $y' < y$. V prvním případě je $U_{n(y)} \subset \operatorname{Int} A_y$, zatímco $U_{n(y')} \not\subset \operatorname{Int} A_y$, ve druhém případě je $U_{n(y')} \subset \operatorname{Int} A_{y'}$, zatímco $U_{n(y)} \not\subset \operatorname{Int} A_{y'}$; v obou případech je proto $U_{n(y)} \neq U_{n(y')}$, tedy i $n(y) \neq n(y')$.

Získali jsme tedy prosté zobrazení indexů y, pro něž *neplatí* rovnost

$$\operatorname{Int} A_y = \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x , \tag{16}$$

do množiny $\mathbb{N}$; takových indexů je tedy jen spočetně mnoho. Jinými slovy: Rovnost (16) platí pro téměř každý index y. Vzhledem k inkluzím (14) je zřejmé, že z ní plynou rovnosti

$$\operatorname{Int} A_y = M_y = \bigcup_{x<y} A_x ; \tag{16'}$$

tím je dokázáno (3).

Podle (14) je $\bigcup_{x<y} A_x \subset A_y$; protože A_y je uzavřená množina, je dokonce $\overline{\bigcup_{x<y} A_x} \subset A_y$. Neplatí-li tedy (pro některé y) rovnost

$$\overline{\bigcup_{x<y} A_x} = A_y , \tag{17}$$

existuje $n(y) \in \mathbb{N}$ tak, že

$$U_{n(y)} \cap A_y \neq \emptyset = U_{n(y)} \cap \overline{\bigcup_{x<y} A_x} ;$$

tím spíše pak je $U_{n(y)} \cap A_x = \emptyset$ pro všechna $x < y$.

Podobně jako nahoře dokážeme, že přiřazení čísel $n(y)$ indexům y, pro něž neplatí (17), je prosté: Je-li $y' \neq y$ index, pro který neplatí rovnost analogická (17), je buď $y' > y$, načež $U_{n(y')} \cap A_y = \emptyset \neq U_{n(y)} \cap A_y$, nebo je $y' < y$, načež $U_{n(y)} \cap A_{y'} = \emptyset \neq U_{n(y')} \cap A_{y'}$. Ze stejných důvodů jako nahoře z toho plyne, že rovnost (17) platí pro téměř všechny indexy y.

Protože podle (14) a (17) je

$$\overline{\bigcup_{x<y} A_x} \subset \overline{M_y} \subset \overline{\operatorname{Int} A_y} = A_y = \overline{\bigcup_{x<y} A_x},$$

platí (4) také pro téměř každý index y.

Předpokládejme nyní, že pro některý index y *neplatí* rovnost

$$A_y = \bigcap_{z>y} A_z; \tag{18}$$

protože výraz vlevo je podle (15) obsažen v průniku vpravo, znamená to, že existuje bod w tohoto průniku, který neleží v A_y. Protože A_y je uzavřená množina, existuje $n(y) \in \mathbb{N}$ tak, že $U_{n(y)}$ je disjunktní s A_y; toto $U_{n(y)}$ však protíná každou z množin A_z, kde $z > y$.

Přiřazení čísel $n(y)$ indexům y, pro něž neplatí (18), je opět prosté: Je-li $y' \neq y$ index, pro nějž neplatí rovnost analogická (18), je buď $y' > y$, načež $U_{n(y)} \cap A_{y'} \neq \emptyset = U_{n(y')} \cap A_{y'}$, nebo je $y' < y$, načež $U_{n(y)} \cap A_y = \emptyset \neq U_{n(y')} \cap A_y$.

Podobně jako nahoře z toho plyne, že rovnost (18) platí pro téměř všechny indexy y. Z (15) a (18) je ihned patrné, že i (5) platí pro téměř každý index y. Tím je dokončen důkaz části II věty 2.7.

III a). Podle (3) je $\operatorname{Int} A(C) = M(C)$ pro téměř všechna $C \in \mathfrak{S}$; v důsledku toho platí totéž o rovnostech $H(A(C)) = A(C) - \operatorname{Int} A(C) = (C \cup M(C)) - M(C) = C$.

III b). Podle (4) je $\overline{M(C)} = A(C)$ pro téměř každé $C \in \mathfrak{S}$; z toho plyne, že $H(M(C)) = \overline{M(C)} - M(C) = A(C) - M(C) = C$. Protože každá množina má touž hranici jako její doplněk a protože $N(C) = P - A(C)$, je i $H(N(C)) = C$ pro téměř každé C.

III c). Podle (3) – (5) je nejen

$$C_y = H(A_y) = A_y - \operatorname{Int} A_y = \bigcap_{z>y} M_z - \bigcup_{x<y} A_x = \bigcap_{z>y} M_z - \bigcup_{x<y} (P - N_x) = \bigcap_{z>y} M_z \cap \bigcap_{x<y} N_x \tag{19}$$

pro téměř každý index y, ale také

$$C_y = \bigcap_{z>y} A_z - \bigcup_{x<y} \operatorname{Int} A_x = \bigcap_{z>y} A_z - \bigcup_{x<y} (P - \overline{P - A_x}\,) = \bigcap_{z>y} A_z \cap \bigcap_{x<y} \overline{P - A_x}\,. \tag{20}$$

V množině Y všech indexů tvoří indexy y, k nimž neexistuje rostoucí posloupnost indexů x_n tak, že $x_n \to y$, spočetnou množinu, protože 1) ke každému takovému y existuje interval (a, y) disjunktní s Y, 2) intervaly přiřazené různým indexům jsou disjunktní a 3) každý systém disjunktních jednorozměrných intervalů je spočetný. Zcela analogicky se zjistí, že indexy y, k nimž neexistuje klesající posloupnost indexů z_n tak, že $z_n \to y$, tvoří jen spočetnou množinu.

Pro téměř každý index y existuje tedy rostoucí posloupnost indexů x_n tak, že $x_n \to y$, a klesající posloupnost indexů z_n tak, že $z_n \to y$. Vzhledem k (13) jsou pak obě posloupnosti $\{M_{z_n}\}$, $\{N_{x_n}\}$ klesající, takže

$$\bigcap_{z>y} M_z = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{z_n}\,, \quad \bigcap_{x<y} N_x = \bigcap_{k=1}^{\infty} N_{x_n}\,; \tag{21}$$

z toho a ze (17) a (18) plyne, že

$$C_y = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_{z_n} \cap N_{x_n} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{z_n} \cap \overline{P - A_{x_n}}\,. \tag{22}$$

Položíme-li tedy

$$D_n := C_{z_n}\,,\; E_n := C_{x_n}\,, \tag{23}$$

dostaneme tvrzení III c).

Abychom dokázali tvrzení III d), zvolme index y tak, aby platila tvrzení III a) – c), a dokažme např. souvislost množiny M_y; souvislost množiny N_y se dokáže zcela analogicky. [4])

Předpokládejme, že $M_y = M' \cup M''$, kde M', M'' jsou oddělené množiny, a nechť např. $a \in M'$. Pak jsou oddělené i množiny $M' \cup N_y, M''$, takže sjednocení $M' \cup N_y \cup C_y$ je podle věty 2.2 souvislé; podobně je i $M'' \cup N_y \cup C_y$ souvislá množina. Protože $a \cup b \subset M' \cup N_y \cup C_y$ a protože každá z množin E_n roztíná P mezi a a b, je $E_n \cap (M' \cup N_y \cup C_y) \neq \emptyset$. Protože $E_n = C_{x_n}$, kde $x_n < y$, je $E_n \subset M_y$, takže $E_n \cap (C_y \cup N_y) = \emptyset$; v důsledku toho je $E_n \cap M' \neq \emptyset$. Protože množina $E_n \subset M_y = M' \cup M''$ je souvislá, protože množiny M', M'' jsou oddělené a protože $E_n \cap M' \neq \emptyset$, je $E_n \subset M'$, tedy $E_n \cap M'' = \emptyset$. Protože $P - C_y = M'' \cup (M' \cup N_y)$, kde množiny vpravo jsou oddělené, je množina $M'' \cup C_y$ souvislá; protože je disjunktní s E_n (a tedy obsažená ve sjednocení oddělených množin $M(E_n), N(E_n)$) a protože podle (22) je $C_y \subset N(E_n)$, je $M'' \cup C_y \subset N(E_n)$, a tím spíše je $M'' \subset N(E_n)$. Protože $z_n > y$, je $M'' \subset M_y \subset A_y \subset M(D_n)$ (pro každé n), takže $M'' \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M(D_n) \cap N(E_n) = C_y$ (podle (6)). Protože $C_y \cap M'' = \emptyset$, je $M'' = \emptyset$; tím je souvislost množiny M_y dokázána.

Spolu s tím je dokázána i celá věta 2.7.

Věta 2.8. *Nechť $\mathfrak{S}$ je disjunktní systém souvislých uzavřených podmnožin souvislého separabilního prostoru P. Pak pro téměř každou z množin $C \in \mathfrak{S}$ je množina $P - C$ sjednocením dvou disjunktních oblastí M, N, jejichž společnou hranicí je C.*

D ů k a z . Nechť množina všech členů posloupnosti $\{p_n\}$ je hustá v P. Pro každé $C \in \mathfrak{S}$ je $P - C = M \cup N$, kde M, N jsou neprázdné otevřené disjunktní množiny; existují tedy indexy i, j tak, že $p_i \in M$, $p_j \in N$; C pak roztíná P mezi body p_i, p_j. Pro každou dvojici indexů i, j nechť $\mathfrak{S}_{i,j}$ znamená systém všech množin $C \in \mathfrak{S}$, které roztínají P mezi body p_i, p_j; systém $\mathfrak{S}$ je pak zřejmě sjednocení všech systémů $\mathfrak{S}_{i,j}$.

Podle částí III d) a III b) věty 2.7 má téměř každá z množin $C \in \mathfrak{S}_{i,j}$ obě vlastnosti uvedené v tvrzení věty; protože podsystémů $\mathfrak{S}_{i,j}$ je jen spočetně mnoho, mají uvedené dvě vlastnosti téměř všechny množiny $C \in \mathfrak{S}$.

Označení. Je-li P separabilní souvislý prostor a je-li $a \in P$, $b \in P$, označíme $S(a, b)$ **množinu všech bodů $x \in P$, které roztínají P mezi a, b.** [5]) $\square$

Zřejmým důsledkem vět 2.7 a 2.8 je toto tvrzení:

Věta 2.9. *Nechť a, b jsou dva různé body separabilního souvislého prostoru P; pak platí tato dvě tvrzení:*

1. *Bodům $p \in S(a, b)$ lze přiřadit indexy z $(0, 1)$ tak, že pro každé tři indexy $x < y < z$ roztíná bod p_y prostor P mezi body p_x a p_z.*

2. *Definujeme-li S_1 jako množinu všech bodů $p \in P$, které neroztínají P, a S_2 jako množinu všech bodů $p \in P$, pro něž je $P - p$ sjednocením dvou disjunktních oblastí $M(p), N(p)$, jejichž společnou hranicí je p, je $P - (S_1 \cup S_2)$ spočetná množina.*

Věta 2.10. (Lennes.) *Je-li P souvislý separabilní prostor a platí-li pro dva body $a \neq b$ z P rovnost*

$$P = S(a, b) \cup a \cup b\,, \tag{24}$$

existuje prosté spojité zobrazení f prostoru P na interval $\langle 0, 1\rangle$.

D ů k a z . Přiřaďme každému bodu $p \in S(a, b)$ index podle části II věty 2.7, označme α, β infimum a supremum množiny všech těchto indexů a užívejme tamější označení.

Dokažme (sporem), že žádný index x není roven ani α, ani β: Předpokládejme, že $x = \alpha$; pak je

$$M(p_\alpha) \cup p_\alpha = A(p_\alpha) \subset M(p_y) \text{ pro všechna } y \neq \alpha,$$

[4]) V původním rozkladu $P - C = M \cup N$ není žádný podstatný rozdíl mezi množinami vpravo.

[5]) Množiny $S(a, b)$, $S(a, b) \cup a \cup b$ jsou zřejmě invariantní vůči homeomorfním zobrazením.

tj. pro všechna $p_y \in S(a,b) - p_\alpha$. Protože pro žádný index y není $p_y \notin M(p_y)$, plyne z toho, že pro žádný index y není $p_y \in M(p_\alpha)$, tj. že $M(p_\alpha) \cap S(a,b) = \emptyset$. Podle (24) je tedy množina $M(p_\alpha)$ částí dvoubodové množiny $\{a,b\}$, což není možné, protože je neprázdná a otevřená (a prostor P je souvislý).

Podobně se dokáže, že žádný index x není roven β.

Definujeme-li funkci $g : P \to \langle \alpha, \beta \rangle$ podmínkami

$$g(a) := \alpha\,,\ g(p_x) := x \ \text{ pro každý index } \ x\,,\ g(b) := \beta\,,$$

je zřejmé, že funkce g je prostá. K tomu, abychom dokázali, že je spojitá, stačí ukázat, že vzory intervalů $\langle \alpha, \gamma)$ a $(\gamma, \beta\rangle$ jsou pro každé $\gamma \in (\alpha, \beta)$ množiny otevřené v P. To však plyne z identit

$$g_{-1}(\langle \alpha, \gamma)) = M(p_\gamma)\,,\ g_{-1}((\gamma, \beta\rangle) = P - A(p_\gamma) = N(p_\gamma)\,.$$

Protože zobrazení g je spojité a protože prostor P je souvislý, je $g(P)$ souvislá část intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ obsahující body α, β, takže $g(P) = \langle \alpha, \beta \rangle$. Složíme-li zobrazení g s funkcí $h(x) := (x-\alpha)/(\beta-\alpha)$, získáme prosté spojité zobrazení $f := h \circ g$ prostoru P na interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Definice 2.7. Obloukem nazveme každou množinu homeomorfní s intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.

Poznámka 2.5. Jsou-li f, g dvě homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na týž oblouk L, je $g_{-1} \circ f$ homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na sebe, tedy spojitá ryze monotónní funkce. Z toho je patrné, že $\{f(0), f(1)\} = \{g(0), g(1)\}$; obraz množiny $\{0, 1\}$ krajních bodů intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ nezávisí tedy na volbě homeomorfního zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na L. Je proto korektní tato definice:

Definice 2.8 a označení. Krajními body oblouku L nazveme body $f(0), f(1)$, kde f je (jakékoli) homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ na L. Oblouk s krajními body a, b budeme značit ab.[6])

Věta 2.11. *K tomu, aby kompaktní a souvislý prostor P byl obloukem ab, je nutné a stačí, aby platila rovnost*

$$P = S(a,b) \cup a \cup b\,.^{7)} \tag{25}$$

D ů k a z . Je-li $P = \langle a, b \rangle$, rovnost (25) zřejmě platí; protože množina vpravo je invariantem homeomorfních zobrazení, platí rovnost i pro každý oblouk ab. Obrácené tvrzení plyne ihned z věty 2.10 a z toho, že spojité prosté zobrazení kompaktního prostoru je homeomorfní. □

Následující příklad ukazuje, že *ve větě* 2.11 *nelze vynechat předpoklad kompaktnosti.*

Příklad 2.3. Nechť P je graf funkce $\sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$, k němuž je přidán bod $a = (0,0)$. Množina P je pak souvislá, ale není obloukem, a klademe-li $b = (1, \sin 1)$, je $P = S(a,b) \cup a \cup b$.

Tento příklad zároveň ukazuje, že zobrazení f ve větě 2.10 *nemusí* být homeomorfní.

[6]) Toto označení oblouk samozřejmě neidentifikuje; je jen zkratkou slovního spojení „oblouk s krajními body a, b". Jistě je patrné, že oblouky i jeho krajní body jsou invarianty homeomorfních zobrazení. V literatuře se „krajní body" nazývají spíše „koncovými body" (end-points); tato terminologie se nám nehodí, protože u intervalu a tzv. orientovaného oblouku potřebujeme mluvit o jeho *počátečním* a *koncovém* bodě (což ovšem nejsou topologické pojmy).

[7]) Oblouky jsou tedy mezi souvislými kompaktními prostory P charakterizovány tím, že v nich existují takové dva body a, b, že každý jiný bod z P roztíná P mezi nimi.

3. Lokálně souvislé prostory

Definice 3.1. Říkáme, že prostor P je **lokálně souvislý v bodě** $p \in P$, je-li $p \in \operatorname{Int}(\operatorname{komp}_p U(p))$ pro každé okolí $U(p)$ bodu p. Prostor P se nazývá **lokálně souvislý**, je-li lokálně souvislý v každém bodě $p \in P$.

Poznámka 3.1. Pojem lokální souvislosti v bodě a lokální souvislosti je zřejmě topologický. $\square$

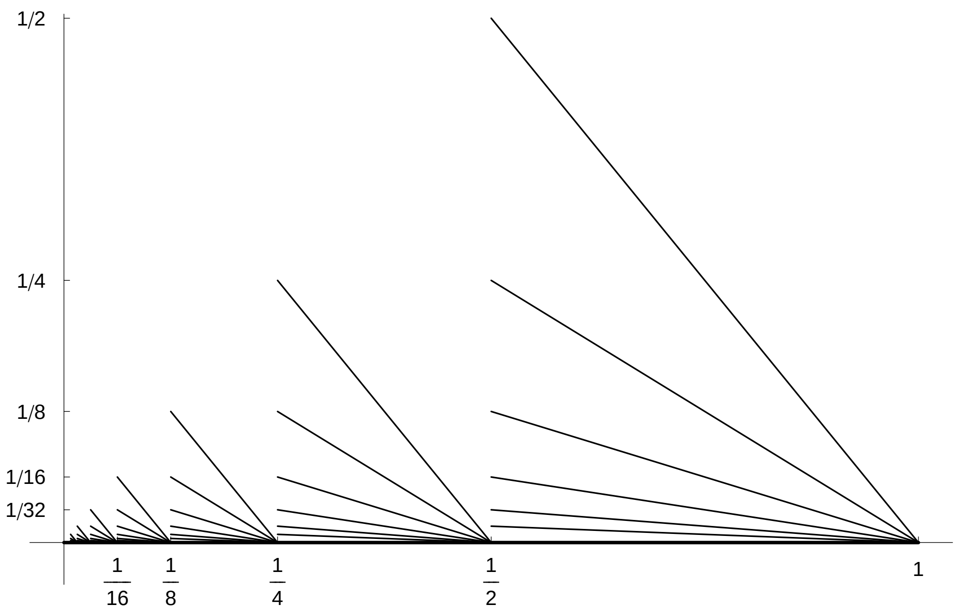
Ekvivalentní formulace definice 3.1: Prostor P je lokálně souvislý v bodě $p \in P$, právě když platí některá z těchto podmínek:

1. Pro každé okolí $U(p)$ existuje okolí $U_1(p) \subset \operatorname{komp}_p U(p)$.
2. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ a souvislá množina $M \subset U(p, \varepsilon)$ tak, že $U(p, \delta) \subset M$.
3. Existují libovolně malé [1]) souvislé podmnožiny prostoru P, které obsahují bod p uvnitř.
4. Existují libovolně malé souvislé uzavřené podmnožiny prostoru P, které obsahují p uvnitř. [2])

Poznámka 3.2. Jak ukazuje následující příklad, *neplatí toto tvrzení*: Je-li prostor P lokálně souvislý v bodě $p \in P$, existují libovolně malá souvislá okolí bodu p.

Příklad 3.1. Nechť $P \subset \mathbb{R}^2$ se skládá z úsečky spojující body $(0,0)$ a $(1,0)$ a z úseček spojujících bod $(2^{-n}, 0)$ s body $(2^{-(n+1)}, 2^{-(n+k)})$, kde $k = 1, 2, 3, \dots,\ n = 0, 1, 2, \dots$.

Prostor P je pak lokálně souvislý v bodě $(0,0)$, ale každé souvislé okolí tohoto bodu obsahuje celou úsečku $\langle 0, 1\rangle$ osy x.



Obr. 3. K příkladu 3.1

Poznámka 3.3. Lokální souvislost prostoru P v bodě p je *lokální vlastnost*, tj. závisí jen na libovolně malých okolích bodu p. Odtud ihned plyne, že *otevřená podmnožina lokálně souvislého prostoru je lokálně souvislá.*

Věta 3.1. *Komponenty lokálně souvislého prostoru P jsou otevřené* [3]) *množiny; jsou to tedy oblasti prostoru P.*

D ů k a z . Je-li $p \in K$, kde K je komponenta prostoru P, je P okolím bodu p, a existuje tedy okolí $V(p) \subset \operatorname{komp}_p P = K$.

---

[1]) tj. s libovolně malým průměrem

[2]) Jsou to např. množiny tvaru $\operatorname{komp}_p \overline{U(p)}$.

[3]) tedy obojetné, sr. s pozn. 2.3, část 4

Poznámka 3.4. Platí toto tvrzení: *Je-li P lokálně souvislý prostor, existují ke každému bodu $p \in P$ libovolně malá souvislá okolí $U(p)$.* [4])

Jsou to např. množiny

$$\operatorname{komp}_p U(p, 1/n), \ n = 1, 2, \dots ,$$

otevřené podle věty 3.1.

Věta 3.2. 1. *Je-li $P = A \cup B$ a jsou-li množiny A, B lokálně souvislé v bodě $p \in A \cap B$, je i prostor P lokálně souvislý v bodě p.*

2. *Je-li $P = A \cup B$, kde množiny A, B jsou uzavřené a lokálně souvislé, je i prostor P lokálně souvislý.*

Důkaz. 1. Je-li U okolí bodu $p \in P$, jsou množiny $U_1 = U \cap A$, $U_2 = U \cap B$ okolími bodu p v množinách A, B. Protože množiny A, B jsou lokálně souvislé v bodě p, existují okolí V_1 a V_2 bodu p v A a B tak, že $V_i \subset \operatorname{komp}_p U_i$ pro $i = 1, 2$. K okolím V_i existují množiny W_i otevřené v P tak, že $V_1 = W_1 \cap A$, $V_2 = W_2 \cap B$. Množina $W := W_1 \cap W_2$ je pak okolím bodu p v P, přičemž

$$W = W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_2 \cap (A \cup B) \subset V_1 \cup V_2 \subset \operatorname{komp}_p U_1 \cup \operatorname{komp}_p U_2 \subset \operatorname{komp}_p U .$$

2. Je-li $p \in P$, je buď $p \in A \cap B$ a prostor P je lokálně souvislý v bodě p podle části 1 této věty, nebo má p kladnou vzdálenost od jedné z množin A, B. Je-li např. $\rho(p, B) > 0$, je prostor P lokálně souvislý v bodě p proto, že v bodě p je lokálně souvislá množina A; množina B nemá na tuto okolnost žádný vliv.

Poznámka 3.5. Následující příklad ukazuje, že ve druhé části věty 13 *nelze* vynechat předpoklad, že množiny A, B jsou uzavřené.

Příklad 3.2. A nechť je úsečka spojující (v $\mathbb{R}^2$) body $(0, -1)$, $(0, 1)$ a B nechť je graf funkce $\sin(1/x)$, $0 < x \le 1$; prostor $P = A \cup B$ není lokálně souvislý v žádném bodě z A, ačkoli A i B jsou lokálně souvislé podmnožiny prostoru P. (Viz obr. 3.2.)

Věta 3.3. (Whyburn.) *Je-li P souvislý lokálně souvislý prostor, je množina $S(a, b) \cup a \cup b$ pro každé dva body $a \in P$, $b \in P$ kompaktní.*

Důkaz. 1. Ukažme, že množina $S = S(a, b) \cup a \cup b$ je uzavřená: Zvolme libovolný bod $p \in P - S$ a nechť $K := \operatorname{komp}_a(P - p)$. Protože $P - p$ je lokálně souvislý prostor, je K obojetná v $P - p$, tedy také lokálně souvislá. Kdyby bylo $b \notin K$, bylo by $P - p = K \cup (P - p - K)$, kde obě množiny vpravo jsou obojetné a disjunktní, tedy oddělené; z podmínek $a \in K$, $b \in P - p - K$ by plynulo, že bod p roztíná P mezi body a, b, což je spor. Je tedy $b \in K$.

Protože množina K je lokálně souvislá a protože $p \notin K$, existuje ke každému $x \in K$ souvislé okolí $U(x) \subset K$ [5]) tak, že uzávěr v P tohoto okolí splňuje podmínku $\overline{U(x)} \subset P - p$. Snadno nahlédneme, že množina všech $x \in K$, pro něž existuje řetěz $U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_s)$ takovýchto okolí spojující body a, x, je obojetná v K, tedy (vzhledem k souvislosti množiny K) rovná K.

Protože $b \in K$, existuje takový řetěz $U(a) = U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_s) = U(b)$ speciálně i pro bod b.

$$A := \bigcup_{i=0}^{s} \overline{U(x_i)} \tag{1}$$

je pak souvislá uzavřená množina obsažená v $P - p$ a obsahující oba body a, b. Protože $\rho(p, A) > 0$, existuje okolí $U(p)$ disjunktní s A. Žádný bod $x \in U(p)$ neroztíná P mezi body a, b, takže neleží v S. Okolí $U(p)$ je disjunktní s S, tedy obsažené v $P - S$. Protože bod $p \in P - S$ byl libovolný, je množina $P - S$ otevřená, množina S uzavřená.

2. Kompaktnost množiny S bude dokázána, dokážeme-li implikaci

$$N \subset S, \ S \cap \operatorname{der} N = \emptyset \ \Rightarrow \ N \text{ je konečná.} \tag{2}$$

Nemá-li však množina $N \subset S$ v S (tedy ani v P, neboť S je uzavřená množina) žádný hromadný bod, existuje ke každému $x \in P$ souvislé okolí $U(x)$ tak, že množina $U(x) \cap N$ je konečná. Podobně jako v 1. části důkazu existuje řetěz $U(x_0), \dots, U(x_s)$ takovýchto okolí, který spojuje body a, b. Protože množina

$$B := \bigcup_{i=0}^{s} U(x_i) \tag{3}$$

[4]) Srov. s poznámkou 3.2!

[5]) Protože množina K je otevřená v $P - p$, tedy i v P, jsou okolí v K zároveň okolími v P.

obsahuje body a, b a je souvislá, obsahuje množinu $S(a, b)$, tedy i S, a tím spíše tedy je $N \subset B$. Protože každá z množin $U(x_i) \cap N$ je konečná, platí totéž o množině $B \cap N = N$. Tím je implikace (2), a tedy kompaktnost množiny S dokázána.

Věta 3.4. *Je-li P souvislý a lokálně souvislý prostor a je-li*

$$P = S(a, b) \cup a \cup b, \tag{4}$$

je P oblouk ab.

D ů k a z . Platí-li (4), je prostor P podle věty 3.3 kompaktní (tedy separabilní); protože je podle předpokladu i souvislý, je to podle věty 2.11 oblouk.

4. Kontinua

Definice 4.1. Kompaktní souvislá množina (prostor) se nazývá **kontinuum**; **vlastní kontinuum** obsahuje aspoň dva různé body, prázdná množina a jednobodové množiny jsou tzv. **nevlastní kontinuua**. **Semikontinuum** je množina M, v níž pro každé dva body existuje kontinuum $M_1 \subset M$, které je obsahuje.

Definice 4.2. Pro každý bod $x \in P$ (kde P je libovolný metrický prostor) se sjednocení všech kontinuí $K \subset P$ obsahujících bod x nazývá **konstituanta** bodu x v P a značí se $\operatorname{konst}_x P$.

Poznámka 4.1. Pojem kontinua je nejen invariantem homeomorfních, ale dokonce spojitých zobrazení. Vlastní kontinuum K má vždy mohutnost kontinua, protože pro každé dva různé body a, b z K a pro každé $\delta \in (0, \rho(a,b))$ je $H(U(a,\delta) \cap K \neq \emptyset$ – jinak by totiž kontinuum K mělo rozklad $K = (U(a,\delta) \cap K) \cup (K - U(a,\delta))$ na dvě neprázdné oddělené množiny.

I pojem konstituanty je topologický; konstituanty jsou typickým příkladem semikontinuí.

Poznámka 4.2. Nechť prostor P je kompaktní a nechť $A_n \subset P$ jsou ε_n-sřetězené množiny (speciálně: kontinua), přičemž $\varepsilon_n \to 0$. Existuje-li pak $\operatorname{Lim} A_n$, je to kontinuum. Podobně: Je-li $\operatorname{Li} A_n \neq \emptyset$, je $\operatorname{Ls} A_n$ kontinuum. Má-li nekonečně mnoho množin A_n průměr $\geq r > 0$, je $\operatorname{diam} \operatorname{Ls} A_n \geq r$, takže $\operatorname{Ls} A_n$ je vlastní kontinuum. (Srov. s větou 2.5 a s poznámkou 1.10.)

Speciálně tedy platí tvrzení: *Průnik nerostoucí posloupnosti kontinuí je kontinuum.*

Věta 4.1. (Janiszewski.) *Je-li P vlastní kontinuum a je-li $a \in G \subset P$, kde $G \neq P$ je otevřená množina, existuje kontinuum K s těmito vlastnostmi:*

1. $a \in K \subset \overline{G}$;
2. $K \cap H(G) \neq \emptyset$.

Uvedené vlastnosti má přitom kterákoli z množin

$$\overline{\operatorname{konst}_a G}, \quad \overline{\operatorname{komp}_a G}, \quad \operatorname{komp}_a \overline{G}, \quad \operatorname{konst}_a \overline{G}. \tag{1}$$

Důsledek 1. *Každý bod p vlastního kontinua P je obsažen v libovolně malých vlastních kontinuích $K \subset P$.*

Důsledek 2. *Jsou-li K a P kontinua, $K \subsetneq P$, existuje kontinuum K_1 tak, že $K \subsetneq K_1 \subsetneq P$.*

D ů k a z . 1. Dokážeme nejdříve toto tvrzení: *Je-li M otevřená množina a je-li $a \in M \subset \overline{M} \subset G$, existuje kontinuum K tak, že $a \in K \subset \overline{M}$ a $K \cap H(M) \neq \emptyset$.*

Zvolme k tomu účelu bod $b \in P - \overline{M}$. Z věty 2.4 plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $(1/n)$-řetěz

$$a = a_0^n,\ a_1^n,\ \ldots,\ a_{s_n}^n = b \tag{2}$$

spojující body a, b v P; pro každé n existuje pak (právě jeden) index i_n tak, že $0 \leq i \leq i_n \Rightarrow a_i^n \in M$ a že $a_{i_n+1}^n \in P - M$. Množina

$$K_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots, a_{i_n}^n\} \subset M \tag{3}$$

obsahuje bod a a splňuje podmínku $\rho(K_n, P - M) < 1/n$; protože $a \in \operatorname{Li} K_n \neq \emptyset$, je $K := \operatorname{Ls} K_n$ (podle věty 2.5) kontinuum, které má zřejmě všechny žádané vlastnosti.

2. Označíme-li $M_n = P - \overline{U(P - G, 1/n)}$, je $a \in M_n \subset \overline{M_n} \subset G$ pro skoro všechna n, a podle toho, co jsme již dokázali, existují kontinua $K_n \subset \overline{M_n}$ tak, že $a \in K_n \cap H(M_n) \neq \emptyset$. Protože $K_n \subset \operatorname{konst}_a G$, je

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n} \subset \overline{\operatorname{konst}_a G}; \tag{4}$$

protože je $\rho(K_n, P - G) \leq 1/n$ pro každé n, protíná množina vlevo množinu $H(G)$; tím spíše to platí pro množinu vpravo.

3. První z množin (1) má tedy žádané vlastnosti; ze zřejmých inkluzí

$$\operatorname{konst}_a G \subset \operatorname{komp}_a G \subset \overline{\operatorname{komp}_a G} \subset \operatorname{komp}_a \overline{G}, \quad \overline{\operatorname{konst}_a G} \subset \operatorname{konst}_a \overline{G} \tag{5}$$

plyne, že žádané podmínky splňují i ostatní množiny z (1).

Důsledek 1 platí, protože pro každé $\varepsilon > 0$ je např. $\overline{\mathrm{konst}_p\, U(p, \frac{1}{2}\varepsilon)}$ kontinuum o průměru $\leq \varepsilon$.

Důsledek 2 je zřejmý, je-li $K = \emptyset$. Je-li $K \neq \emptyset$, zvolme pevně body $p \in K$, $q \in P - K$. Z normality prostoru P plyne existence otevřené množiny $G \supset K$ tak, že $q \notin \overline{G}$. Množina

$$K_1 := \mathrm{komp}_p\, \overline{G} \tag{6}$$

je kontinuum obsahující K, které podle hlavní části věty 4.1 protíná $H(G)$, což je množina disjunktní s K. Je tedy $K_1 \neq K$. Protože $q \notin \overline{G}$, je $K_1 \neq P$.

Věta 4.2. (Sierpiński.) *Žádné kontinuum nelze rozložit na spočetně mnoho disjunktních uzavřených množin, z nichž aspoň dvě jsou neprázdné.*

Důsledek. *Je-li kompaktní prostor P disjunktním sjednocením spočetně mnoha neprázdných kontinuí P_n, je každé P_n komponentou prostoru P.*

D ů k a z . 1. Kdyby pro nějaké přirozené číslo $q > 1$ byla souvislá množina P sjednocením disjunktních uzavřených množin $A_1, \ldots, A_q$, kde např. $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$, byl by $P = A_1 \cup (A_2 \cup \ldots A_q)$ rozklad množiny P na neprázdné oddělené množiny – spor. Zbývá proto ukázat, že rozklad uvedený v hlavní části věty neexistuje ani v případě, že množin A_n je nekonečně mnoho.

2. Předpokládejme naopak, že pro nějaké kontinuum P existují disjunktní uzavřené množiny $A_n \subset P$, z nichž aspoň dvě jsou neprázdné, tak, že

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,; \tag{7}$$

bez újmy na obecnosti lze opět předpokládat, že $A_1 \neq \emptyset \neq A_2$.

Z normality metrického prostoru P plyne existence otevřené množiny G, pro niž je $A_1 \cap \overline{G} = \emptyset$, $A_2 \subset G$. Zvolme pevně nějaký bod $x \in A_2$ a označme $K_1 := \mathrm{komp}_x\, \overline{G}$. Podle Janiszewského věty 4.1 je pak $K_1 \cap H(G) \neq \emptyset$, a protože $A_2 \subset G$, je $K_1 - A_2 \neq \emptyset$. Protože $A_1 \cap K_1 \subset A_1 \cap \overline{G} = \emptyset$, je

$$K_1 - A_2 \subset \bigcup_{n=3}^{\infty} K_1 \cap A_n\,, \tag{8}$$

a existuje proto index $n > 2$ tak, že $K_1 \cap A_n \neq \emptyset$. Z (8) dále plyne, že

$$K_1 = \bigcup_{n=2}^{\infty} K_1 \cap A_n\,, \tag{9}$$

přičemž vlevo je kontinuum disjunktní s A_1, vpravo sjednocení disjunktních uzavřených množin, z nichž (aspoň) dvě jsou neprázdné; jednou z nich je množina $K_1 \cap A_2$, a lze předpokládat, že druhou z nich je $K_1 \cap A_3$.

Protože tento rozklad má zcela analogické vlastnosti jako rozklad kontinua P, lze analogickým postupem najít kontinuum $K_2 \subset K_1$ disjunktní s $K_1 \cap A_2$, tedy i s A_2 (protože $K_2 \subset K_1$), tak, že

$$K_2 = \bigcup_{n=3}^{\infty} K_2 \cap A_n\,, \tag{10}$$

přičemž $K_2 \cap A_3 \neq \emptyset$ a existuje index $n > 3$ tak, že $K_2 \cap A_n \neq \emptyset$; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že je to index $n = 4$.

V těchto konstrukcích lze pokračovat neomezeně; tím získáme (nekonečnou) nerostoucí posloupnost neprázdných kontinuí K_n tak, že $K_n \cap A_n = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je ovšem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (P - A_n) = P - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

a dostáváme se do sporu s Cantorovou větou, podle níž je průnik vlevo neprázdný.

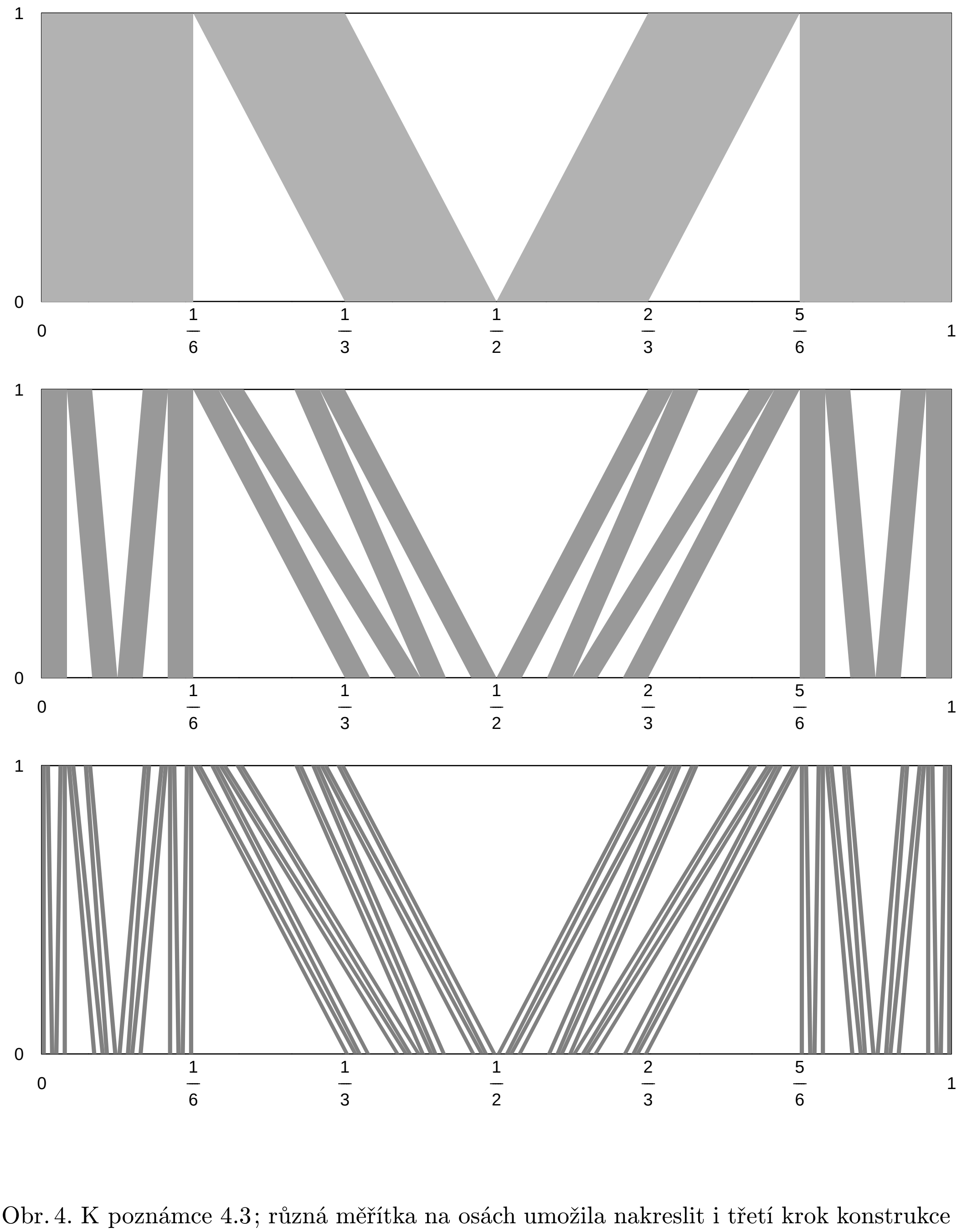
Tím je platnost Sierpińského věty dokázána a zbývá dokázat důsledek.

3. Každé kontinuum P_n je částí jisté komponenty K_n prostoru P; kdyby některé P_n nebylo komponentou prostoru P, bylo by $P_n \subsetneq K_n$, tedy

$$K_n = K_n \cap P = (K_n \cap P_1) \cup (K_n \cap P_2) \cup \ldots\,,$$

kde (aspoň) dvě množiny vpravo jsou neprázdné – spor.

Poznámka 4.3. Každé vlastní kontinuum se dá rozložit na jednotlivé body, tj. na nespočetně mnoho disjunktních *nevlastních* kontinuí. Triviálním příkladem kontinua, které lze rozložit na nespočetně mnoho disjunktních vlastních kontinuí, je čtverec (který lze rozložit např. na rovnoběžné úsečky). Existují však též kontinua *řídká v rovině* [6]), která se dají rozložit na nespočetně mnoho disjunktních vlastních kontinuí; příklad takového kontinua uvádí Uryson ve [4], část II, kap. V, §7–§8 (viz obr. 4).



Obr. 4. K poznámce 4.3; různá měřítka na osách umožila nakreslit i třetí krok konstrukce

Je-li dán rovnoběžník $abcd$, jehož strany $\langle a; b\rangle$, $\langle c; d\rangle$ jsou rovnoběžné s osou x, buď a vždy jeho levý dolní vrchol, b pravý dolní vrchol, c pravý horní vrchol, d levý horní vrchol. Operací $\mathfrak{M}$ nazveme pak přechod od rovnoběžníku $abcd$ ke čtyřem rovnoběžníkům, které jsou v něm obsaženy a definovány takto:

[6]) tj. křivky podle Cantorovy definice, kterou uvedeme v dalším textu

Stranu ab rozdělíme na šest stejně dlouhých úseček

$$(11') \qquad \langle a; a_1\rangle, \langle a_1; a_2\rangle, \langle a_2; a_3\rangle, \langle a_3; a_4\rangle, \langle a_4; a_5\rangle, \langle a_5; b\rangle,$$

stranu dc na šest stejně dlouhých úseček

$$(11'') \qquad \langle d; d_1\rangle, \langle d_1; d_2\rangle, \langle d_2; d_3\rangle, \langle d_3; d_4\rangle, \langle d_4; d_5\rangle, \langle d_5; c\rangle$$

a utvoříme rovnoběžníky

$$(12) \qquad aa_1d_1d,\ a_2a_3d_2d_1,\ a_3a_4d_5d_4,\ a_5bcd_5.$$

Jednotkový čtverec v rovině xy označíme P_0. Operací $\mathfrak{M}$ získáme z P_0 čtyři rovnoběžníky P_{i_1}, kde $1 \le i_1 \le 4$, jejichž sjednocení označíme P^1. Operací $\mathfrak{M}$ provedenou na každém P_{i_1} dostaneme 16 rovnoběžníků $P_{i_1 i_2}$, kde $1 \le i_2 \le 4$, jejichž sjednocení označíme P^2, atd. Průnik

$$(13) \qquad P^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$$

je kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha lomených čar složených ze dvou úseček majících jeden krajní bod společný (podobně jako písmeno **V**) a nespočetně mnoha „samostatných" úseček (podobných různě nakloněnému písmenu **I**).

Věta 4.3. (Moore.) *V každém vlastním kontinuu P existují aspoň dva body, z nichž žádný P neroztíná.*

D ů k a z . Stačí dokázat, že pro každý bod $p \in P$ existuje bod $q \in P$ neroztínající P a různý od p. Nechť množina všech členů prosté posloupnosti $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$ je hustá v P, přičemž $p(0) = p$. Pokud některý z bodů $p(n)$, kde $n > 0$, neroztíná P, stačí zvolit jej za q; zbývá proto vyšetřit případ, kdy každý bod $p(n)$, $n > 0$, kontinuum P roztíná.

Položme $n_0 = 0$, $A_0 = P$, $n_1 = 1$. Protože bod $p(n_1)$ roztíná P, je $P - p(n_1) = A_1 \cup B_1$, kde vpravo jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny; jejich označení zvolme tak, že $p \in B_1$. Podle věty 2.2 je pak uzavřená množina $A_1 \cup p(n_1)$ kontinuum a $H(A_1) = p(n_1)$ (protože hranice otevřené množiny A_1 vznikne z jejího uzávěru $A_1 \cup p(n_1)$ odečtením množiny A_1).

Je-li pro některé $i > 1$ sestrojeno číslo $n_{i-1} \in \mathbb{N}$ a množina A_{i-1}, označme n_i nejmenší číslo, pro nějž je $p(n_i) \in A_{i-1}$; pišme pak $P - p(n_i) = A_i \cup B_i$, kde vpravo jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny, a označení zvolme tak, že $p(n_{i-1}) \in B_i$. Podle věty 2.2 je množina $\overline{A_i} = A_i \cup p(n_i)$ kontinuum a $H(A_i) = \overline{A_i} - A_i = p(n_i)$.

Tím je indukcí sestrojena posloupnost $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ přirozených čísel a posloupnost $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ otevřených podmnožin kontinua P tak, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí:

1. n_i je nejmenší přirozené číslo, pro nějž je $p(n_i) \in A_{i-1}$;
2. $p(n_{i-1}) \notin A_i$;
3. $\overline{A_i} = A_i \cup p(n_i)$ je kontinuum, $H(A_i) = p(n_i)$.

Protože $p(n_{i+1}) \in A_i$, $p(n_i) \in H(A_i)$, je $n_i \ne n_{i+1}$ (pro každé $i \in \mathbb{N}$). Protože $p(n_i) \notin A_{i+1} \cup p(n_{i+1}) = \overline{A_{i+1}}$, je $\overline{A_{i+1}} \subset P - p(n_i) = A_i \cup B_i$. Protože kontinuum $\overline{A_{i+1}}$ má s A_i společný bod $p(n_{i+1})$, je částí A_i. Z inkluze $\overline{A_{i+1}} \subset A_i$ a z definice čísel n_i plyne, že $n_{i+1} \ge n_i$; protože *neprázdná kompaktní* podmnožina $\overline{A_{i+1}} \ne P$ souvislého prostoru P nemůže být identická s *otevřenou* množinou A_i, je $n_{i+1} > n_i$. Posloupnost $\{n_i\}$ je tedy rostoucí.

Z inkluzí $\overline{A_{i+1}} \subset A_i$ a z Cantorovy věty dále plyne, že

$$A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \ne \emptyset;$$

tato množina neobsahuje žádný bod $p(n_i)$, $i \ge 0$, protože $p(n_i) \notin A_{i+1}$. Pro každé $n \ge 0$ existuje $i > 1$ tak, že $n_i > n$; protože n_i je nejmenší číslo, pro něž je $p(n_i) \in A_{i-1}$, je $p(n) \notin A_{i-1}$, a tím spíše je $p(n) \notin A$. Množina A tedy neobsahuje žádný z bodů $p(n)$, $n \ge 0$.

Věta bude dokázána, ukážeme-li, že žádný bod $q \in A$ neroztíná P, tj. že pro každý rozklad $P - q = M \cup N$, kde M, N jsou disjunktní otevřené množiny, je jedna z množin M, N prázdná:

Protože není $q = p(n_i)$ pro žádné $i \in \mathbb{N}$, leží všechny body $p(n_i)$ ve sjednocení $M \cup N$; pro jednu z množin M, N – např. pro N – existuje proto vybraná posloupnost $\{n_{i_j}\}$ tak, že $p(n_{i_j}) \in N$ pro každé j. Množina $M \cup q$ je kontinuum disjunktní s $H(A_{i_j}) = p(n_{i_j})$, tedy obsažené v $A_{i_j} \cup B_{i_j}$; protože má společný bod q s A_{i_j}, je $M \cup q \subset A_{i_j}$. Protože tato inkluze platí pro každé j, je $M \subset A$. Protože A (a tím spíše M) neobsahuje žádný z bodů $p(n)$ a protože množina $\{p(n); n \geq 0\}$ je hustá v P, je otevřená množina M prázdná.

Tím je věta 4.3 dokázána.

* * *

Definice 4.3. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a je-li f spojité zobrazení nějaké množiny $X \subset \mathbb{R}^n$ na (metrický) prostor P, říkáme, že f je **parametrizací** neboli **parametrickým popisem** prostoru P.

Příklad 4.1. 1. Každé homeomorfní zobrazení h každého jednorozměrného kompaktního intervalu J je parametrizací oblouku $h(J)$. Je-li I další jednorozměrný kompaktní interval a je-li $\omega : I \to_{\text{na}} J$ prostá spojitá funkce, je $h \circ \omega$ další (homeomorfní) parametrizace oblouku $h(J)$.

2. Je-li $\rho \in \mathbb{R}_+$, je vektorová funkce

$$v(\varphi) := (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \tag{14}$$

parametrizací kružnice K o středu $(0,0)$ a poloměru ρ. Její restrikce $v|\langle 0, \pi \rangle$, $v|\langle \pi, 2\pi \rangle$ jsou parametrizacemi příslušné „horní" půlkružnice $K_1 := v(\langle 0, \pi \rangle)$ a „dolní" půlkružnice $K_2 := v(\langle \pi, 2\pi \rangle)$. Tyto půlkružnice jsou oblouky s krajními body $a := -\rho$ a $b := \rho$, přičemž

$$K_1 \cup K_2 = K, \ K_1 \cap K_2 = \{a, b\}. \tag{15}$$

3. Je-li $\rho \in \mathbb{R}_+$, je vektorová funkce

$$w(\varphi, \vartheta) := (\rho \cos \varphi \sin \vartheta, \rho \sin \varphi \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta), \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq \vartheta \leq \pi, \tag{16}$$

parametrizací sféry o středu v počátku prostoru $\mathbb{R}^3$ a poloměru ρ. Restringujeme-li úhel ϑ na interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ resp. $\langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle$, dostaneme „horní" resp. „dolní" polosféru.

4. Pišme body Cantorova diskontinua Δ ve tvaru

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}, \tag{17}$$

kde $a_k \in \{0, 1\}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, a definujme vektorovou funkci $f = (f_1, f_2) : \Delta \to \mathbb{R}^2$ takto: Je-li x dáno rovností (17), je

$$f_1(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^k}, \quad f_2(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^k}. \tag{18}$$

Je zřejmé, že funkce f zobrazuje Δ do čtverce $Q := \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Je-li dán libovolný bod $(b, c) \in Q$, kde $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k / 2^k$, $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k / 2^k$, přičemž každé b_k a každé c_k je buď 0, nebo 1, a položíme-li $a_{2k-1} = b_k$, $a_{2k} = c_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je obrazem bodu (17) bod (b, c). Je tedy $f(\Delta) = Q$.

Dokažme, že f je spojité zobrazení: Je-li

$$x' = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{3^k}, \tag{17'}$$

kde $a'_k \in \{0, 1\}$ pro každé k, další bod z Δ a je-li n nejmenší index, pro nějž je $a_n \neq a'_n$, je

$$|x - x'| = \left| 2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k - a'_k}{3^k} \right| \geq 2 \Big(\frac{1}{3^n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \Big) = \frac{1}{3^n}. \tag{19}$$

Je-li tedy $|x - x'| < 3^{-2n}$, je $a_k = a'_k$ pro $k = 1, \ldots, 2n$, z čehož snadno plyne, že $|f_i(x) - f_i(x')| \leq 2^{-n}$ pro $i = 1, 2$, takže (kartézská) vzdálenost bodů $f(x)$, $f(x')$ je nejvýše rovna 2^{-n+1}. Z toho je patrná (stejnoměrná) spojitost funkce f v Δ.

Funkce f je tedy parametrizací čtverce Q; definičním oborem není interval, ale řídká nespočetná kompaktní množina $\Delta \subset \mathbb{R}$, která má jen jednobodové komponenty. Funkci f lze snadno rozšířit spojitě na celý interval $\langle 0,1\rangle$ – stačí v každém omezeném styčném intervalu (a,b) Cantorova diskontinua položit

$$f(x) := f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \text{pro každé} \quad x \in (a,b).$$

Takto rozšířená funkce f zobrazuje jednorozměrný interval $\langle 0,1\rangle$ spojitě na dvojrozměrný interval Q.

Jak původní funkce $f : D \to_{\text{na}} Q$, tak i rozšířená funkce $f : \langle 0,1\rangle \to_{\text{na}} Q$ je parametrizací čtverce Q. Spojité funkce zobrazující část $\mathbb{R}$ na „vícerozměrnou“ množinu se často nazývají **Peanovy funkce** nebo **Peanovy křivky**. [7])

Poznamenejme ještě, že kdybychom bodu (17) přiřadili vektor

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k-2}}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k-1}}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{3k}}{2^k} \Big),$$

zřejmě bychom získali spojité zobrazení množiny Δ na krychli $\langle 0,1\rangle^3$, tedy další Peanovu funkci. Jistě je též patrné, že podobně lze parametrizovat i krychli $\langle 0,1\rangle^n \subset \mathbb{R}^n$ libovolné (konečné) dimenze n.

Definice 4.4. Homeomorfní obrazy kružnic se nazývají **topologické kružnice**.

Poznámka 4.4. Pojem „topologická kružnice“ je zřejmě topologický. „Vnitřní“ vlastnosti topologických kružnic odpovídají analogickým vlastnostem kružnic:

Zvolíme-li např. na jednotkové kružnici C s parametrickým popisem $f(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, dva různé body $a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$, lze předpokládat, že $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$. Množiny $C_1 := f(\langle \alpha, \beta\rangle)$ a $C_2 := f(\langle \beta, \alpha + 2\pi\rangle)$ jsou pak (komplementární) oblouky kružnice C; mají krajní body a, b a jejich průnikem je množina $\{a, b\}$. (Dodejme ještě, že neexistuje oblouk $C_3 \subset C$ s krajními body a, b a různý od C_1 i od C_2.) Z toho ihned plyne toto tvrzení pro topologické kružnice:

Je-li K topologická kružnice a jsou-li $A \neq B$ dva její body, existují právě dva oblouky K_1, K_2 s krajními body A, B tak, že $K_1 \cup K_2 = K$, $K_1 \cap K_2 = \{A, B\}$.

Obráceně: *Jsou-li K_1, K_2 dva oblouky AB* [8]) *a je-li $K_1 \cap K_2 = \{A, B\}$, je $K_1 \cup K_2$ topologická kružnice.*

Existuje totiž homeomorfní zobrazení $h_1 : \langle 0, \pi\rangle \to_{\text{na}} K_1$ tak, že $h_1(0) = A, h_1(\pi) = B$, a homeomorfní zobrazení $h_2 : \langle \pi, 2\pi\rangle \to_{\text{na}} K_2$ tak, že $h_2(\pi) = B, h_2(2\pi) = A$; je-li f jako nahoře a označíme-li $B_1 := f(\langle 0, \pi\rangle), B_2 := f(\langle \pi, 2\pi\rangle)$ horní a dolní půlkružnici, je

$$h := \begin{cases} h_1 \circ (f|\langle 0, \pi\rangle)_{-1} & \text{v } B_1 \\ h_2 \circ (f|\langle \pi, 2\pi\rangle_{-1} & \text{v } B_2 \end{cases} \tag{20}$$

zřejmě homeomorfní zobrazení kružnice C na $K_1 \cup K_2$; toto sjednocení je tedy topologická kružnice. $\square$

Následující tři věty obsahují důležité charakteristiky oblouků a topologických kružnic.

Věta 4.4. *Existují-li v kontinuu P dva různé body a, b tak, že každý bod $x \in P - \{a, b\}$ roztíná P, je P oblouk ab.*

D ů k a z . Pro každé $x \in P - \{a, b\}$ je podle předpokladu $P - x = M \cup N$, kde M, N jsou otevřené disjunktní neprázdné množiny; množiny $M \cup x$, $N \cup x$ jsou podle věty 2.2 kontinua. Předpokládejme, že $a \in M$ a dokažme sporem, že $b \in N$. Předpokládejme, že $b \in M$ a podle věty 4.3 zvolme bod $y \in N$, který neroztíná kontinuum $N \cup x$. Množina $P - y = ((N \cup x) - y) \cup (M \cup x)$ je pak (jakožto sjednocení dvou souvislých množin, které mají společný bod x) souvislá, takže bod y neroztíná P, ačkoli není roven ani a, ani b – spor.

Dokázali jsme, že pro každé $x \in P - \{a, b\}$ je $P - x = M \cup N$, kde vpravo jsou oddělené množiny, přičemž z předpokladu $a \in M$ plyne, že $b \in N$. Každý bod $x \in P$ různý od a i b tedy roztíná P mezi body a, b, tj. $P - \{a, b\} = S(a, b)$. Podle věty 2.11 je P oblouk ab.

[7]) Slovo „křivka“ má v různých matematických disciplínách různý význam. Zatímco v tomto textu budou křivky bodové množiny, jinde je účelnější nazývat křivkami (vektorové) funkce, tedy parametrizace jistých bodových množin.

[8]) Připomeňme, že to znamená, že oba oblouky mají krajní body A, B.

Věta 4.5. (Moore.) *Vlastní kontinuum P je topologickou kružnicí, právě když je roztíná každá dvoubodová množina $\{a, b\} \subset P$.*

D ů k a z . Protože každá topologická kružnice uvedenou vlastnost má, budeme dokazovat jen obrácené tvrzení.

Dokažme nejdříve (nepřímo), že *pro každé $a \in P$ je množina $P - a$ souvislá*: Z předpokladu její nesouvislosti plyne existence rozkladu $P = C_1 \cup C_2$, kde C_1 a C_2 jsou otevřené disjunktní neprázdné množiny; podle věty 2.2 je každá z množin $D_i := C_i \cup a$, $i = 1, 2$, kontinuem. Podle věty 4.3 existují v každém D_i aspoň dva body, které D_i neroztínají; existují proto dva body $p \in C_1$, $q \in C_2$ tak, že množiny $D_1 - p$ a $D_2 - q$ jsou souvislé. Množina $P - (p \cup q) = (D_1 - p) \cup (D_2 - q)$ je pak (jakožto sjednocení dvou souvislých množin majících společný bod a) souvislá, což odporuje předpokladu věty.

Zvolme $a \in P$ pevně; množina $P - a$ je podle toho, co jsme právě dokázali souvislá (a nespočetná), takže podle věty 2.8 existuje bod $b \in P - a$, pro nějž je $P - \{a, b\}$ sjednocením dvou disjunktních oblastí M, N, jejichž společnou hranicí je b. Kdyby bod a neležel v $\overline{M}$, byl by $P - b = M \cup (N \cup a)$ rozklad souvislé množiny na dvě neprázdné oddělené množiny. Je tedy $\overline{M} = M \cup a \cup b$; podobně se dokáže, že $\overline{N} = N \cup a \cup b$.

Dokažme, že $\overline{M}, \overline{N}$ jsou oblouky ab. Nechť např. $\overline{M}$ není oblouk ab; pak (podle věty 2.11) existuje bod $x \in M$ tak, že množina $\overline{M} - x$ je souvislá. Jsou jen dvě možnosti: 1) $\overline{N}$ není oblouk; pak existuje bod $y \in N$ tak, že i množina $\overline{N} - y$ je souvislá, načež je souvislá i množina $P - \{x, y\} = (\overline{M} - x) \cup (\overline{N} - y)$, protože souvislé množiny vpravo mají společné body a, b – spor. 2) $\overline{N}$ je oblouk; pak pro každý bod $y \in N$ je $\overline{N} - y$ sjednocením množin $ay - y$ a $by - y$ [9]) a množina $P - \{x, y\} = (ay - y) \cup (\overline{M} - x) \cup (by - y)$ je zřejmě opět souvislá – spor.

Tím je dokázáno, že $\overline{M}$ je oblouk ab; důkaz, že i $\overline{N}$ je oblouk ab, je zcela analogický.

Věta 4.6. *K tomu, aby kontinuum P bylo obloukem ab, je nutné a stačí, aby bylo možné zavést do P uspořádání $\prec$ tak, že kromě obvyklých axiomů platí:*

1. *a je první, b poslední bod;*
2. *je-li $c \in P$, $d \in P$, $c \prec d$, jsou množiny*

$$\{x \in P;\, c \prec x \prec d\}, \quad \{x \in P;\, x \prec d\}, \quad \{x \in P;\, x \succ c\}$$

otevřené a neprázdné.

D ů k a z . 1. Je-li P oblouk ab, jsou podmínky zřejmě splněny.

2. Předpokládejme, že podmínky jsou splněny a že A je hustá spočetná část kontinua P obsahující body a, b. Množina A je, jakožto část uspořádané množiny P, také uspořádaná. Má první a poslední prvek a podle podmínky 2 nemá skoky. [10]) Je tedy podobná [11]) množině D všech dyadicky racionálních čísel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. [12]) Buď f podobné zobrazení množiny A na D. Položíme-li

$$f(x) := \sup\{f(z);\, z \in A,\ z \prec x\}, \text{ je-li } x \in P - A,$$

je f definována na celém P a snadno se ukáže, že je homeomorfním zobrazením.

* * *

Definice 4.5. Říkáme, že *vlastní* kontinuum $K \subset P$ je **kontinuum kondenzace** prostoru P, je-li K řídké v P, a **kontinuem konvergence**, existují-li kontinua $K_n \subset P$ disjunktní s K tak, že $K = \operatorname{Lim} K_n$.

Poznámka 4.5. Oba pojmy jsou zřejmě topologické.

Poznámka 4.6. *Každé kontinuum konvergence je řídké, takže je kontinuem kondenzace. Následující dva příklady ukazují, že obrácené tvrzení neplatí*, tj. že existují kontinua kondenzace, která nejsou kontinuy konvergence.

---

[9]) Jsou to oblouky s krajními body a, y a y, b obsažené v oblouku $\overline{N}$, z nichž byl odstraněn společný krajní bod y.

[10]) *Skokem* (v uspořádané množině) se rozumí dvojice jejích bodů $c \prec d$, pro něž je interval $\{x;\, c \prec x \prec d\}$ prázdný.

[11]) *Zobrazení* F uspořádané množiny X do uspořádané množiny Y se nazývá *podobné*, zachovává-li uspořádání, tj. platí-li implikace $x \prec y \Rightarrow F(x) \prec F(y)$. Říkáme, že *množiny* X, Y jsou *podobné*, existuje-li podobné zobrazení množiny X *na* množinu Y.

[12]) Srov. např. s [6], kap. III, Věta 1.

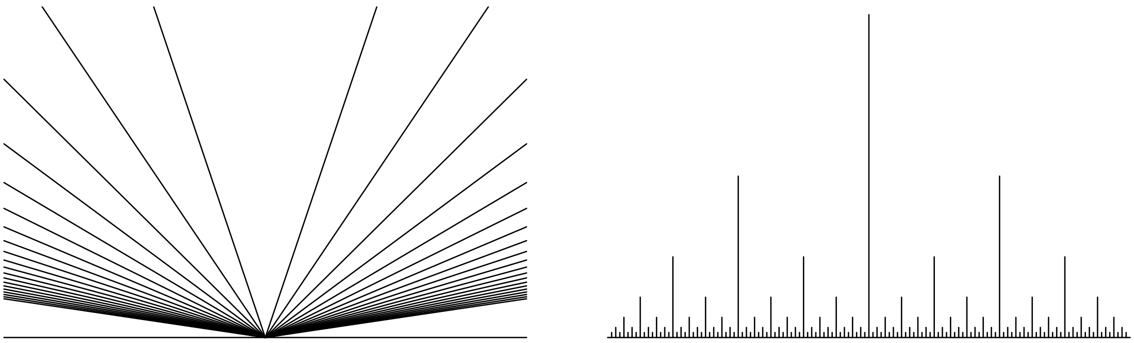
Příklad 4.2. Je-li P sjednocení úsečky $u := \langle(-1,0);(1,0)\rangle$ s úsečkami spojujícími počátek s body $(\pm 1, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, je u kontinuem kondenzace kontinua P, není však jeho kontinuem konvergence. (Jeho kontinuy konvergence jsou však úsečky $\langle(0,0);(\pm 1,0)\rangle$.)

Příklad 4.3. Je-li P sjednocení úsečky $v := \langle(0,0);(1,0)\rangle$ s úsečkami spojujícími body

$$\Big(\frac{2m-1}{2^n}, 0\Big),\ \Big(\frac{2m-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\Big),\ 0 < 2m-1 < 2^n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

je úsečka v je kontinuem kondenzace kontinua P; v tomto případě neobsahuje P žádné kontinuum konvergence.

Příklad 4.4. Typická kontinua konvergence jsou patrná z obr. 7 (dolní úsečka) a z obr. 8 (jednotková kružnice, která leží v uzávěru množiny $\{r(t)\cdot(\cos t, \sin t);\ r(t) := t/(t+1), t \in \langle 0, +\infty)\}$.



Obr. 5 a 6. K příkladům 4.2 a 4.3

Poznámka 4.7. *Je-li K kontinuum konvergence kompaktního prostoru P, existují disjunktní kontinua $K_n \subset P$ tak, že*

$$K_n \cap K = \emptyset \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } K = \operatorname{Lim} K_n .$$

D ů k a z . Podle předpokladu existují kontinua $C(k)$ disjunktní s K tak, že $K = \operatorname{Lim} C(k)$. Položme $k_1 := 1$, $K_1 := C(k_1)$. Jsou-li již sestrojeny indexy $k_1 < \ldots < k_n$ a disjunktní množiny $K_1 := C(k_1), \ldots, K_n := C(k_n)$, položme $r_n := \min\{\rho(K_1, K), \ldots, \rho(K_n, K)\}$. Toto číslo je kladné a protože $\operatorname{Lim} C(k) = K$, existuje podle věty 1.2 index $k_{n+1} > k_n$ tak, že $K_{n+1} := C(k_{n+1}) \subset U(K, r_n)$, což zaručuje, že $(K_1 \cup \ldots \cup K_n) \cap K_{n+1} = \emptyset$.

Tím je indukcí sestrojena posloupnost $\{K_n\}$; protože je vybrána z posloupnosti $\{C(k)\}$, je $\operatorname{Lim} K_n = \operatorname{Lim} C(n) = K$, a z konstrukce plyne, že $m \neq n \Rightarrow K_m \cap K_n = \emptyset$.

Poznámka 4.8. V dalším budeme potřebovat tvrzení, které lze vyslovit ve dvou ekvivalentních verzích:

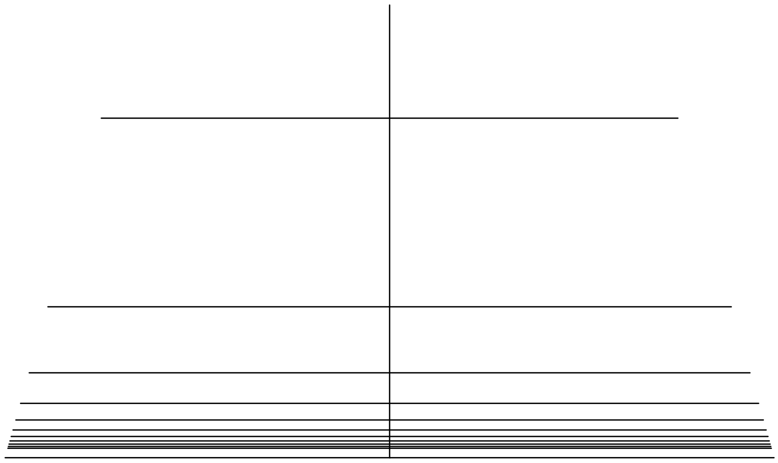
Baireova věta – 1. verze. *Je-li každá z množin P_n, $n \in \mathbb{N}$, otevřená a hustá v úplném prostoru P, je i množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$ hustá v P.* [13])

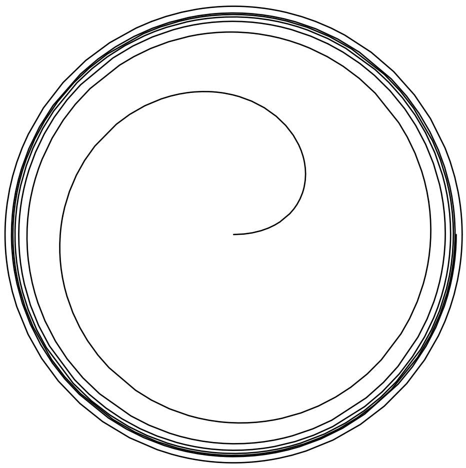
Uvážíme-li, že uzavřená množina $K \subset P$ je řídká v P, právě když je množina $P - K$ hustá v P, a že uzávěr množiny řídké v P je řídký v P, je patrné, že Baireovu větu lze ekvivalentně vyslovit i takto:

Baireova věta – 2. verze. *Je-li P úplný prostor a jsou-li množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, řídké v P, je množina $P^* := P - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ množina hustá v P; je-li $P \neq \emptyset$, je i $P^* \neq \emptyset$.*

Poznamenejme, že sjednocení spočetně mnoha množin řídkých v P se nazývá množina **první kategorie v** P. Neprázdný úplný prostor *není tedy první kategorie v sobě. Protože kompaktní prostory jsou úplné, plyne z toho, že žádné vlastní kontinuum není první kategorie v sobě.*

[13]) Viz [6], str. 132 – 134, nebo [7], str. 300.





Obr. 7 a 8. K příkladu 4.4

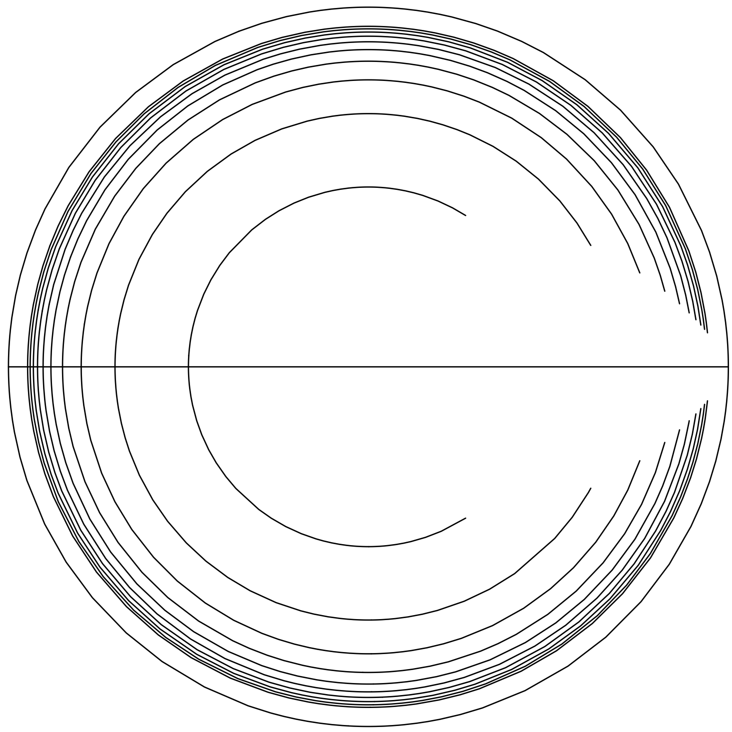
Poznámka 4.9. *Je-li K kontinuem kondenzace prostoru P, je kontinuem kondenzace každého většího prostoru $P_1 \supset P$; analogické tvrzení platí i pro kontinua konvergence.*

Je-li K kontinuem kondenzace prostoru P, platí totéž o každém vlastním kontinuu $C \subset K$. Obdobné tvrzení pro kontinua konvergence však *neplatí*.

Příklad 4.5. Nechť P je sjednocením úsečky spojující body $(-1, 0)$ a $(1, 0)$, jednotkové kružnice $K := \{(\cos\varphi, \sin\varphi)\,;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ a oblouků

$$K_n = \{r_n(\cos\varphi, \sin\varphi)\,;\ r_n := n/(n+1), \varphi \in \langle 1/n, 2\pi - 1/n\rangle\}$$

kružnic o středu $(0, 0)$ a poloměrech r_n. (Viz obr. 9.) Pak je P kontinuum a kružnice K je jeho kontinuem konvergence, zatímco její „pravá polovina“ $C = \{(\cos\varphi, \sin\varphi)\,;\ \varphi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle\}$ kontinuem konvergence není.



Obr. 9. K příkladu 4.5

Poznámka 4.10. *Jsou-li K_n kontinua kondenzace kompaktního prostoru P a je-li $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ kontinuum, je K také kontinuem kondenzace prostoru P.*

D ů k a z . Protože množiny $P - K_n$ jsou otevřené a husté v P, je podle Baireovy věty hustý i jejich průnik

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(P - K_n) = P - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = P - K\,.$$

Protože množina K je podle předpokladu uzavřená, je množina $P - K$ otevřená; protože je hustá v P, je množina K řídká v P. $\square$

Kontinuum z poznámky 4.6 ukazuje, že (na rozdíl od právě dokázaného tvrzení o kontinuích kondenzace) ani *sjednocení dvou kontinuí konvergence nemusí být kontinuem konvergence*.

Poznámka 4.11. *Je-li prostor P sjednocením konečného počtu kontinuí, z nichž žádné neobsahuje žádné kontinuum kondenzace, neobsahuje ani P žádné kontinuum kondenzace.*

D ů k a z . Tvrzení stačí zřejmě dokázat pro případ, kdy P je sjednocením dvou vlastních kontinuí P_1, P_2. Pro každé vlastní kontinuum $C \subset P$ nastane jedna z těchto dvou situací:

1. $C \cap ((P_1 - P_2) \cup (P_2 - P_1)) \neq \emptyset$,

2. $C \subset P_1 \cap P_2$.

Ad 1. Je-li např. $C \cap (P_1 - P_2) \neq \emptyset$, zvolme bod a v tomto průniku a uvažme, že číslo $\delta := \rho(a, P_2)$ je pak kladné. Podle důsledku 1 věty 4.1 existuje vlastní kontinuum $C_1 \subset C - P_2$ obsahující bod a a disjunktní s P_2, takže $\rho(C_1, P_2) > 0$. Protože $C_1 \subset P_1$ a protože P_1 neobsahuje žádné vlastní kontinuum řídké v P_1, není C_1 řídké v P_1. Vzhledem k tomu, že má kladnou vzdálenost od P_2, není řídké ani v P. Tím spíše není v P řídké kontinuum $C \supset C_1$. P tedy žádné kontinuum kondenzace neobsahuje.

Ad 2. Předpokládejme, že C je řídké v P, a dokažme, že pak existuje buď vlastní kontinuum řídké v P_1, nebo vlastní kontinuum řídké v P_2. Pro $i = 1, 2$ položme

(22) $$C_i := \{x \in C\,;\ \text{pro každé okolí } U(x) \text{ je } U(x) \cap P_i - C \neq \emptyset\}\,.$$

Snadno nahlédneme, že obě množiny C_i jsou uzavřené, že $C_1 \cup C_2 = C$ a že množina C_i je řídká v P_i.

Protože kompaktní prostor je úplný a úplný prostor není sjednocením žádných dvou řídkých množin, *není* např. množina C_1 řídká v C. Existuje tedy bod $a \in C_1$ a $\delta > 0$ tak malé, že $\overline{U(a,\delta)} \cap C \subset C_1$, $\overline{U(a,\delta)} - C \neq \emptyset$. Podle věty 4.1 existuje vlastní kontinuum D obsahující bod a a obsažené v C_1. Protože C_1 je řídká v P_1, je v P_1 řídké tím spíše i vlastní kontinuum D. $\square$

Tvrzení analogické tomu, které jsme právě dokázali, *pro kontinua konvergence neplatí.* V následujícím příkladu ukážeme, že *existují kontinua P, P_1, P_2 tak, že zatímco ani P_1, ani P_2 žádné kontinuum konvergence neobsahuje, v $P = P_1 \cup P_2$ takové kontinuum existuje.*

Příklad 4.6. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $m \in \{0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$ nechť $T(n,m)$ je sjednocení úsečky $\langle (m/2^n, 0); (m/2^n, 1/2^n) \rangle$ s úsečkou s krajními body $(m/2^n \pm 1/2^{(n+1)}, 1/2^n)$; nechť $Q := \langle 0,1 \rangle \times \langle 0, 1/2 \rangle$ a $L : \langle 0,1 \rangle \times 0$. V žádném z kontinuí

$$P_1 := L \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} T(n, 2m-1) \Big), \quad P_2 := L \cup \Big(Q \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} T(n, 2m) \Big) \Big) \tag{23}$$

pak neleží žádné kontinuum konvergence, ale úsečka L je kontinuem konvergence kontinua $P := P_1 \cup P_2$. (Viz obr. 10.)

Věta 4.7. *Každý bod p kontinua P, v němž P není lokálně souvislé, leží v nějakém kontinuu konvergence kontinua P.*

D ů k a z . Není-li P lokálně souvislé v bodě p, existuje okolí $U := U(p)$ tak, že p neleží uvnitř kontinua $K_0 := \operatorname{komp}_p \overline{U}$.

Zvolme pevně $\varepsilon_1 \in (0,1)$ a buď $U_1 := U(p, \varepsilon_1)$. Protože $U_1 \not\subset K_0$, existuje bod $p_1 \in U_1 - K_0$; položme $K_1 := \operatorname{komp}_{p_1} \overline{U}$. Protože K_0 a K_1 jsou komponenty téže množiny, je buď $K_0 = K_1$, nebo $K_0 \cap K_1 = \emptyset$; protože $p_1 \in K_1 - K_0$, je $K_0 \cap K_1 = \emptyset$. Podle Janiszewského věty 4.1 je kromě toho $K_1 \cap H(U) \neq \emptyset$.

Nechť $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ je tak malé, že okolí $U_2 := U(p, \varepsilon_2)$ je disjunktní s K_1; zvolme $p_2 \in U_2 - K_0$ a položme $K_2 := \operatorname{komp}_{p_2} \overline{U}$. Pak je $K_2 \cap (K_0 \cup K_1) = \emptyset$, $K_2 \cap H(U) \neq \emptyset$.

Jistě nemusíme provádět formálně indukci, abychom nahlédli, že tento postup vede k posloupnosti $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ disjunktních kontinuí, čísel $\varepsilon_n \in (0, 1/n)$, okolí $U_n := U(p, \varepsilon_n) \not\subset K_0$ a bodů $p_n \in U_n - K_0$, pro něž platí:

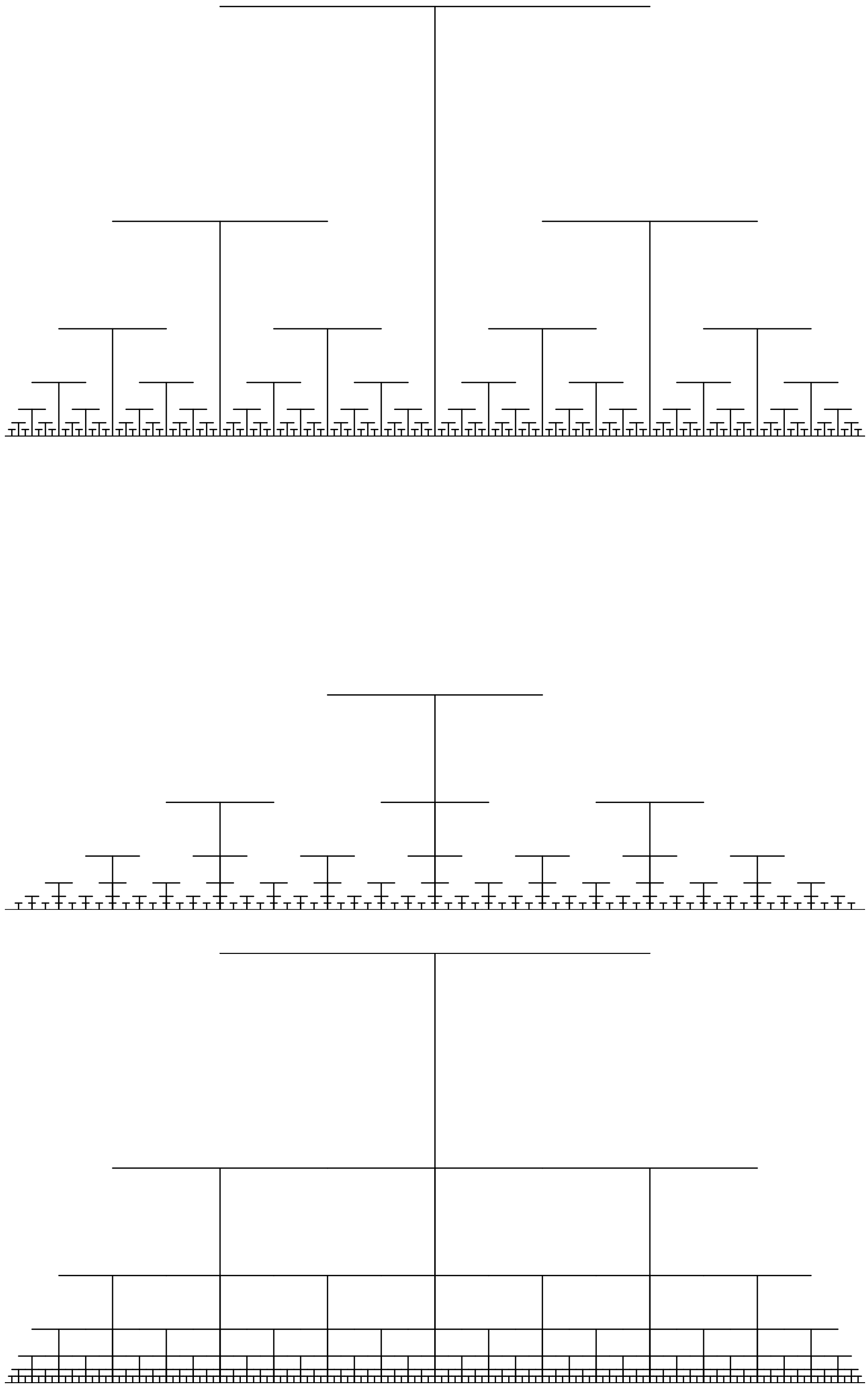
$$p_n \in K_n \subset \overline{U} \quad \text{a} \quad K_n \cap H(U) \neq \emptyset \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Podle věty 1.2 lze z posloupnosti $\{K_n\}$ vybrat konvergentní posloupnost $\{K_{n_i}\}$; ukažme, že její limita K je hledané kontinuum konvergence: Protože K obsahuje bod $p = \lim p_{n_i}$ a protíná $H(U)$, je to vlastní kontinuum; protože $K \subset K_0$, je $K \cap K_n = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

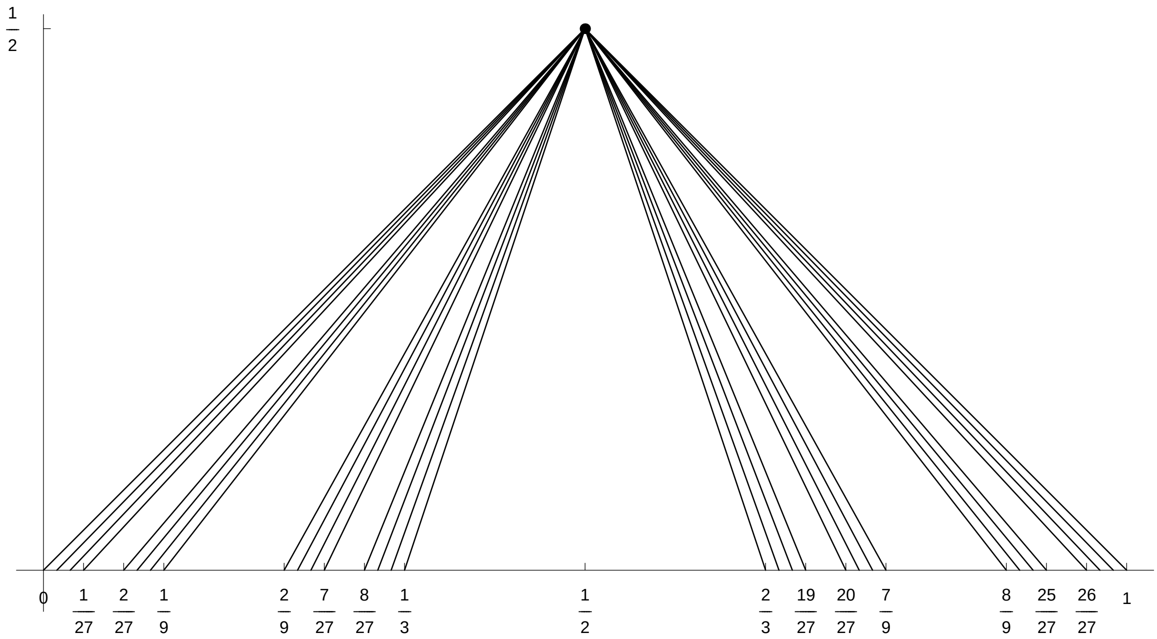
Věta 4.8. *Každý bod p kontinua P, v němž P není lokálně souvislé, je obsažen ve vlastním kontinuu $K \subset P$, v jehož žádném bodě není P lokálně souvislé.*

D ů k a z . Ukažme, že kontinuum K zkonstruované v důkazu předcházející věty má žádanou vlastnost. Předpokládejme, že kontinuum P je lokálně souvislé v některém bodě $y \in K$. Označíme-li $M := \operatorname{komp}_y \overline{U}$, je $K \subset M$ a $y \in \operatorname{Int} M$; protože $K = \operatorname{Lim} K_{n_i}$, existuje i tak, že $K_{n_i} \cap M \neq \emptyset$. Pak je však množina $M \cup K_{n_i}$ kontinuum obsahující p, což je ve sporu s tím, že K_{n_i} je komponenta množiny $\overline{U}$, která bod p neobsahuje. Tento spor ukazuje, že v žádném bodě kontinua K není kontinuum P lokálně souvislé.

Poznámka 4.12. Neexistují tedy kontinua, která by měla jen jeden bod lokální nesouvislosti nebo obecněji jen spočetně mnoho takových bodů. Naproti tomu existují vlastní kontinua, která mají právě jeden lokální souvislosti. Příkladem takového kontinuum je sjednocení P úseček spojujících bod $p := (1/2, 1/2)$ se všemi body Cantorova diskontinua. Bod p je jediný bod, v němž je kontinuum P lokálně souvislé. (Viz obr. 11.)



Obr. 10. Kontinua P_1, P_2, $P = P_1 \cup P_2$ z příkladu 4.6



Obr. 11. K poznámce 4.12

Definice 4.6. Říkáme, že kontinuum P je **dědičně lokálně souvislé**, je-li každé kontinuum $K \subset P$ lokálně souvislé. [14])

Poznámka 4.13. Třída dědičně lokálně souvislých kontinuí je podstatně užší než třída lokálně souvislých kontinuí. Čtverec je jednoduchým příkladem lokálně souvislého kontinua, které není dědičně lokálně souvislé. Příkladem kontinua řídkého v rovině, které je lokálně, ale ne dědičně lokálně souvislé, je dolní kontinuum z obr. 10.

Věta 4.9. *K tomu, aby kontinuum bylo dědičně lokálně souvislé, je nutné a stačí, aby neobsahovalo žádné kontinuum konvergence.*

D ů k a z . 1. Není-li $K \subset P$ lokálně souvislé, existuje v K podle věty 4.8 kontinuum konvergence; toto kontinuum je kontinuem konvergence i v P.

2. Nechť existuje kontinuum konvergence $K \subset P$; pak je $K = \operatorname{Lim} K_n$ pro vhodnou posloupnost disjunktních kontinuí $K_n \subset P$, která jsou navíc disjunktní i s K. Dokažme, že existuje kontinuum $L \subset P$, které obsahuje K a není lokálně souvislé.

Můžeme předpokládat, že samo P je lokálně souvislé (jinak lze klást $L = P$). Zvolme pevně nějaký bod $p \in K$ a buď U tak malé okolí tohoto bodu, že $K - \overline{U} \neq \emptyset$. Označíme-li pak $C := \operatorname{komp}_p \overline{U}$, je C kontinuum obsahující bod p uvnitř, přičemž $K - C \neq \emptyset$. Protože $K = \operatorname{Lim} K_n$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $n \geq n_0 \Rightarrow C \cap K_n \neq \emptyset$. Množina

$$L := C \cup K \cup K_{n_0} \cup K_{n_0+1} \cup \dots \tag{24}$$

je pak zřejmě kontinuum. Kdyby L bylo lokálně souvislé v některém bodě $x \in K - C$, existovalo by kontinuum $D \subset L - C$ a okolí $U(x)$ bodu x tak, že $U(x) \cap L \subset D$. Protože pro skoro všechna n je $U(x) \cap K_n \neq \emptyset$ a protože

$$U(x) \cap L = (U(x) \cap C) \cup (U(x) \cap K) \cup \Big(U(x) \cap \bigcup_{n=n_0}^{\infty} K_n\Big), \tag{25}$$

je

$$D \cap \Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} K_n\Big) \neq \emptyset, \tag{26}$$

[14]) Jde zřejmě o topologický pojem.

tj. existoval by rozklad

$$D = (K \cap D) \cup \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (K_n \cap D), \tag{27}$$

kde $K \cap D \neq \emptyset$ a $K_n \cap D \neq \emptyset$ aspoň pro jedno $n \geq n_0$. To však odporuje Sierpińského větě 4.2.

L tedy není lokálně souvislé v žádném bodě $x \in K - C$.

Poznámka 4.14. Dědičně lokálně souvislé kontinuum může obsahovat kontinua kondenzace. Viz k tomu obr. 6 k příkladu 4.3.

5. Lokálně souvislá kontinua

Definice 5.1. Dyadickým systémem nazveme systém množin, v němž je každému $n \in \mathbb{N}$ a každé n-tici $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$ přiřazena jistá množina $A(i_1, \ldots, i_n)$ tak, že platí:

A. pro každé n je $A(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}) \subset A(i_1, \ldots, i_n)$;

B. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A(i_1, \ldots, i_n) = 0$;

C. uspořádáme-li při pevném n systém 2^n množin $A(i_1, \ldots, i_n)$ lexikograficky, tvoří řetěz.

Poznámka 5.1. Ukažme, že *je-li každá z množin $A(i_1, \ldots, i_n)$ kontinuum, je kontinuem i množina*

(1) $$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,1\}^n} A(i_1, \ldots, i_n).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

(2) $$\delta_n = \max\{\operatorname{diam} A(i_1, \ldots, i_n);\ (i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n\}$$

a dokažme, že z podmínek A, B plyne, že $\delta_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Postupujme nepřímo: Není-li $\delta_n \to 0$, existuje kladné číslo η a posloupnost $\{i_{n_k}\}$ vybraná z $\{i_n\}$ tak, že pro každé k je $\delta_{n_k} \geq \eta$; pro každé k existuje v důsledku toho množina $A(i_1, \ldots, i_{n_k})$ s průměrem $\geq \eta$. Z podmínky A plyne ihned implikace

$$n \leq n_k \ \Rightarrow\ \delta_n \geq \delta_{n_k} \geq \eta;$$

protože $n_k \to \infty$, je $\operatorname{diam} A(i_1, \ldots, i_n) \geq \eta$ pro každé n, takže není splněna podmínka B.

Protože množina

(3) $$A_n := \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,1\}^n} A(i_1, \ldots, i_n).$$

je (podle C a (2)) $2\delta_n$-sřetězená, stačí aplikovat větu 2.4 (s $P = A_1$ a $\varepsilon_n = 2\delta_n$) a uvážit, že (podle poznámky 1.8) je $A = \operatorname{Lim} A_n$. Množina A je tedy souvislá a jako průnik posloupnosti kompaktních množin je kompaktní. Je tedy skutečně kontinuem.

Dyadickým kontinuem nazýváme každou množinu tvaru (1), kde množiny $A(i_1, \ldots, i_n)$ tvoří dyadický systém kontinuí.

Věta 5.1. *Pro každé neprázdné kontinuum P jsou ekvivalentní tyto podmínky:*

I. *P je dyadické kontinuum.*

II. *P je lokálně souvislé kontinuum.*

III. *P je spojitý obraz intervalu $\langle 0, 1\rangle$.*

IV. *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje rozklad P na konečně mnoho kontinuí o průměrech $< \varepsilon$.*

D ů k a z . I $\Rightarrow$ III. Nechť P je dyadické kontinuum. Číslu

(4) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{2^n}$$

přiřaďme bod

(5) $$f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(i_1, \ldots, i_n)$$

a ukažme, že toto přiřazení je *korektní*.

Je-li číslo x dyadicky racionální, má dva dyadické rozvoje:

(6) $$0.i_1 \ldots i_{n-1}0111\ldots \equiv 0.i_1 \ldots i_{n-1}1000\ldots.$$

Znamená-li symbol $\prec$ „před“ v lexikografickém uspořádání z podmínky C, jsou skupiny

(7) $$\begin{aligned} \{i_1 \ldots i_{n-1}0\} &\prec \{i_1 \ldots i_{n-1}1\},\\ \{i_1 \ldots i_{n-1}01\} &\prec \{i_1 \ldots i_{n-1}10\},\\ \{i_1 \ldots i_{n-1}011\} &\prec \{i_1 \ldots i_{n-1}100\},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$n, n+1, n+2\ldots$ čísel napsané v téže řádce lexikograficky sousední, takže se dvojice příslušných množin $A(\ldots)$ protínají.

Vzhledem k tomu, že $\delta_n \to 0$, jsou (jednobodové) množiny

$$A(i_1) \cap \ldots \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}) \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}0) \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}01) \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}011) \cap \ldots,$$
$$A(i_1) \cap \ldots \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}) \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}1) \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}10) \cap A(i_1 \ldots i_{n-1}100) \cap \ldots$$

identické. Definice funkce f je tedy skutečně korektní.

Spojitost f plyne snadno z této úvahy: Jsou-li čísla x' a x'' obsažena v intervalu $\langle m/2^n, (m+1)/2^n \rangle$, jsou oba body $f(x')$ a $f(x'')$ obsaženy v jedné z množin $A(i_1, \ldots, i_n)$, takže

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leq \operatorname{diam} A(i_1, \ldots, i_n) \leq \delta_n .$$

III $\Rightarrow$ IV. Je-li f spojité zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na P, je f stejnoměrně spojité a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n tak, že

$$0 \leq m \leq 2^n - 1 \Rightarrow \operatorname{diam} f(\langle m/2^n, (m+1)/2^n \rangle) < \varepsilon,$$

přičemž množiny $f(\langle m/2^n, (m+1)/2^n \rangle)$ jsou kontinua.

IV $\Rightarrow$ II. Nechť $p \in P$, kde P má vlastnost IV, a nechť $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují kontinua $A_1, \ldots, A_s$ tak, že $P = A_1 \cup \ldots \cup A_s$, přičemž $\operatorname{diam} A_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ pro $i = 1, \ldots, n$. Označme $I := \{i;\ p \in A_i\}$ a $J := \{i;\ p \notin A_i\}$; pak je $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ kontinuum o průměru ε, a protože $\rho(p, \bigcup_{i \in J} A_i) > 0$, je $p \in \operatorname{Int} A$. P je tedy lokálně souvislé v bodě p.

II $\Rightarrow$ IV. Je-li P lokálně souvislé kontinuum, existuje ke každému $x \in P$ souvislé okolí $U(x)$ o průměru $< \varepsilon$. Protože P je kompaktní, existují podle Borelovy věty body $x_1, \ldots, x_s$ tak, že $P = \bigcup_{i=1}^{s} U(x_i)$. Množiny $A_i = \overline{U(x_i)}$ jsou pak kontinua o průměrech $< \varepsilon$, jejichž sjednocením je P.

IV $\Rightarrow$ I. K důkazu budeme potřebovat dvě pomocná tvrzení:

Lemma 5.1. *Nechť P má vlastnost IV. Pak pro každé kontinuum $C \subset P$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje kontinuum $K \subset U(C, \varepsilon)$, které obsahuje C a které lze pro každé $\eta > 0$ rozložit na konečný počet kontinuí o průměrech $< \eta$.*

D ů k a z . Podle předpokladu existuje konečná posloupnost $C(1), \ldots, C(s)$ kontinuí, jejichž sjednocením je P a která mají průměry menší než $\frac{1}{4}\varepsilon$. Jistě lze předpokládat, že kontinua $C(i)$ byla očíslována tak, že $1 \leq i \leq s_1 \Rightarrow C \cap C(i) \neq \emptyset$, zatímco $s_1 < i \leq s \Rightarrow C \cap C(i) = \emptyset$. Pak je

$$K_1 := \bigcup_{i=1}^{s_1} C(i) \tag{8_1}$$

kontinuum a $C \subset K_1 \subset U(C, \frac{1}{4}\varepsilon)$.

Jsou-li sestrojena kontinua $C(i_1, \ldots, i_n)$ $(1 \leq i_1 \leq s_1, \ldots, 1 \leq i_n \leq s_n)$ o průměrech $< \varepsilon/2^{n+1}$ a je-li

$$K_n := \bigcup_{i_1, \ldots, i_n} C(i_1, \ldots, i_n), \tag{8_n}$$

sestrojíme kontinua $C(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$ $(1 \leq i_{n+1} \leq s_{n+1})$ takto: Rozložíme P na konečný počet kontinuí $X_1, \ldots, X_r$ o průměrech $\varepsilon/2^{n+2}$ a pro každé kontinuum $C(i_1, \ldots, i_n)$ najdeme všechna X_j, která $C(i_1, \ldots, i_n)$ protínají; označíme je $C(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$. Můžeme přitom předpokládat, že počet s_{n+1} kontinuí $C(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$ je stejný pro všechna kontinua $C(i_1, \ldots, i_n)$, protože nepředpokládáme, že jsou navzájem různá. Označíme-li pak $K_{n+1} := \bigcup_{i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}} C(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$, je K_{n+1} kontinuum a $K_n \subset K_{n+1} \subset U(K_n, \varepsilon/2^{n+2})$.

Označme konečně

$$K_\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K := \overline{K_\infty} \tag{9}$$

a dokažme, že K je hledané kontinuum.

Indukcí dokážeme, že $C \subset K_n \subset U(C, \frac{1}{2}\varepsilon)$ pro každé n; z toho ihned plyne, že $C \subset K_\infty \subset U(C, \frac{1}{2}\varepsilon)$, takže $C \subset K \subset U(C, \varepsilon)$.

Buď dáno $\eta > 0$ a zvolme n tak, že $\varepsilon/2^{n-1} < \eta$. Položíme-li

$$A(i_1, \dots, i_n) = \overline{C(i_1, \dots, i_n) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_{n+1}, \dots, i_{n+k}} C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+k})}\,, \tag{10}$$

jsou množiny $A(i_1, \dots, i_n)$ kontinua, jejichž sjednocením je K, přičemž

$$\operatorname{diam} A(i_1, \dots, i_n) \leq \operatorname{diam} C(i_1, \dots, i_n) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam} C(i_1, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+k}) < \eta\,. \tag{11}$$

Tím je lemma 5.1 dokázáno.

Lemma 5.2. *Je-li kontinuum P sjednocením neprázdných kontinuí $P_1, \dots, P_n$, existuje řetěz kontinuí $Q_1, \dots, Q_r$ tak, že každé Q_j je rovno některému P_i, každé P_i je rovno některému Q_j, přičemž $Q_1 = P_1$, $Q_r = P_n$.*

D ů k a z . Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tvrzení platí, je-li P sjednocením n (neprázdných) kontinuí, a předpokládejme, že P je sjednocení (neprázdných) kontinuí $P_1, \dots, P_n, P_{n+1}$. Podle předpokladu existuje řetěz $Q_1, \dots, Q_r$ kontinuí s nahoře uvedenými vlastnostmi. Protože P je souvislá množina, existuje k tak, že $Q_k \cap P_{n+1} \neq \emptyset$. Snadno pak nahlédneme, že posloupnost

$$Q_1, \dots, Q_r, Q_{r-1}, \dots, Q_k, P_{n+1}$$

je řetěz splňující všechny žádané podmínky.

Tím je dokázáno i lemma 5.2 a můžeme přikročit k důkazu implikace IV $\Rightarrow$ I; tím dokončíme důkaz věty 5.2.

Podle předpokladu existuje posloupnost $P(0), \dots, P(s)$ neprázdných kontinuí o průměrech < 1, jejichž sjednocením je kontinuum P. Podle lemmat 1 a 2 lze předpokládat, že každé z nich má vlastnost IV a že posloupnost $\{P(k)\}_{k=0}^{s}$ je řetěz; protože jej lze libovolně prodloužit tím, že $P(s+1), P(s+2), \dots$ definujeme jako $P(s)$, můžeme předpokládat, že počet členů posloupnosti je číslo tvaru $2^{n(1)}$, kde $n(1) \in \mathbb{N}$, tj. že posloupnost má tvar

$$P(0), P(1), \dots, P(2^{n(1)} - 1)\,. \tag{12}$$

Předpokládejme, že pro jisté $j \in \mathbb{N}$ a jisté $n(j) \in \mathbb{N}$ jsou sestrojena neprázdná kontinua

$$P(k_1, \dots, k_j)\,, \quad \text{kde } 0 \leq k_m < 2^{n(j)} \text{ pro } m = 1, \dots, j\,, \tag{13}$$

jejichž sjednocením je P, která mají vlastnost IV a průměry $< 1/j$; předpokládejme konečně, že při lexikografickém uspořádání tvoří řetěz.

Pak existuje $n(j+1) \in \mathbb{N}$ a neprázdná kontinua

$$P(k_1, \dots, k_j, k_{j+1})\,, \; 0 \leq k_{j+1} < 2^{n(j+1)}, \tag{14}$$

tak, že pro každou j-tici $(k_1, \dots, k_j)$ je

$$P(k_1, \dots, k_j) = \bigcup_{k_{j+1}} P(k_1, \dots, k_j, k_{j+1})\,, \tag{15}$$

že každé kontinuum (14) má vlastnost IV a průměr $< 1/(j+1)$, přičemž systém všech kontinuí (14) tvoří při lexikografickém uspořádání řetěz.

Z kontinuí $P(k_1, \dots, k_j)$, $j \in \mathbb{N}$, lze snadno vytvořit dyadický systém, který má všechny vlastnosti z definice 5.1:

Je-li $0 \leq k_1 < 2^{n(1)}$, je

$$k_1 = \sum_{i=1}^{n(1)} 2^{n(1)-i} a(i)\,, \tag{16}$$

kde čísla $a(i) \in \{0, 1\}$ jsou jednoznačně určena číslem k_1. Platí-li rovnost (16), označme

$$A(a(1), a(2), \dots, a(n(1))) := P(k_1)\,. \tag{17}$$ [16]

[16]) V podstatě jsme tedy místo čísla k_1 napsaného dekadicky užili jeho dyadický zápis $a(1)a(2)\dots a(n(1))$ a pro větší přehlednost jsme mezi dyadické cifry napsali čárky. Místo P jsme napsali A, abychom vyloučili nedorozumění.

Definujme nyní

$$
\begin{aligned}
A(a(1),\dots,a(n(1)-1)) &:= \bigcup_{q(1)\in\{0,1\}} A(a(1),\dots,a(n(1)-1),q(1)),\\
A(a(1),\dots,a(n(1)-2)) &:= \bigcup_{\{q(2),q(1)\}\in\{0,1\}^2} A(a(1),\dots,a(n(1)-2),q(2),q(1)),\\
&\ \ \vdots\\
A(a(1),\dots,a(n(1)-k)) &:= \bigcup_{\{q(k),\dots,q(1)\}\in\{0,1\}^k} A(a(1),\dots,a(n(1)-k),q(k),\dots,q(1)),\qquad (18)\\
&\ \ \vdots\\
A(a(1),a(2)) &:= \bigcup_{\{q(n(1)-2),\dots,q(1)\}\in\{0,1\}^{n(1)-2}} A(a(1),a(2),q(n(1)-2),\dots,q(1)).\\
A(a(1)) &:= \bigcup_{\{q(n(1)-1),\dots,q(1)\}\in\{0,1\}^{n(1)-1}} A(a(1),q(n(1)-1),\dots,q(1)).
\end{aligned}
$$

Jinými slovy, čteme-li zdola nahoru: Množinu všech dyadických čísel od $00\dots0$ do $11\dots1$ jsme rozdělili na dva stejně početné úseky od $00\dots0$ do $011\dots1$ a od $10\dots0$ do $11\dots1$ a sjednocení všech množin $A(a(1),\dots,a(n(1)))$ odpovídajících prvnímu (resp. druhému) úseku jsme označili $A(0)$ (resp. $A(1)$). Pak jsme každý ze jmenovaných úseků rozdělili napůl a příslušná sjednocení množin $A(a(1),\dots,a(n(1)))$ jsme pojmenovali $A(0,0), A(0,1), A(1,0), A(1,1)$ atd.

Čísla k_2, pro něž je $0 \le k_2 < 2^{n(2)}$, napíšeme v dyadickém tvaru

$$(16') \qquad k_2 = \sum_{i=1}^{n(2)} 2^{n(2)-i} a(n(1)+i),$$

kde $a(n(1)+i) \in \{0,1\}$, položíme

$$(17') \qquad A(a(1),\dots,a(n(1)),\dots,a(n(1)+n(2))) := P(k_1,k_2)$$

a podobně jako jsme v (18) definovali množiny $A(a(1),\dots,a(k))$ pro $k=1,\dots,n(1)$, vytvoříme množiny $A(a(1),\dots,a(n(1)),a(n(1)+1)),\dots,a(n(1)+k))$ pro $k=1,\dots,n(2)$.

Pokračujeme-li takto dál, získáme žádaný dyadický systém z definice 5.1 (kde ovšem místo A napíšeme P).

Poznámka 5.2. Protože (neprázdná) lokálně souvislá kontinua jsou (podle právě dokázané věty) totožná se spojitými obrazy úseček, platí toto důležité tvrzení:

Věta 5.2. *Spojitý obraz lokálně souvislého kontinua je lokálně souvislé kontinuum.*

Poznámka 5.3. Z věty 5.1 a lemmatu 5.1 plyne ihned další tvrzení:

Věta 5.3. *Je-li P lokálně souvislé kontinuum a $C \subset P$ libovolné kontinuum, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ lokálně souvislé kontinuum $K \subset P$ tak, že $C \subset K \subset U(C,\varepsilon)$.*

Definice 5.2. Říkáme, že řetěz množin $A_0,\dots,A_s$ spojující body a,b je **ireducibilní**, jestliže nastane jedna z těchto situací:

1. $s=0$, $\{a,b\} \subset A_0$;
2. $s=1$, $a \in A_0 - A_1$, $b \in A_1 - A_0$;
3. $s>1$ a pro každé dva indexy i,j z $\{0,1,\dots,s\}$, pro něž je $|i-j|>1$, jsou množiny A_i, A_j disjunktní.

Poznámka 5.4. Řetěz $A_0,\dots,A_s$ je ireducibilním řetězem spojujícím body a,b, právě když platí: Je-li $0 \le i_1 < \dots < i_r \le s$ a $r<s$, není posloupnost $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ řetěz spojující body a,b.[17])

[17]) Buď to není řetěz, nebo nespojuje body a,b.

Lemma 5.3. *Každý řetěz $A_0, \dots, A_s$ množin spojující body a, b, obsahuje ireducibilní podřetěz spojující tyto body.*

D ů k a z . Je-li uvedený řetěz ireducibilní, není co dokazovat; není-li ireducibilní a je-li $s > 1$, existují indexy i, j tak, že $0 \leq i < i+1 < j \leq s$ a že $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Vynecháme-li z původního řetězu množiny $A_{i+1}, \dots, A_{j-1}$, dostaneme řetěz $A_0^1, \dots, A_t^1$, který spojuje body a, b, ale je kratší než řetěz původní. Není-li tento kratší řetěz ireducibilní a je-li $t > 1$, lze opakovat operaci, kterou jsme zkrátili původní řetěz.

Po konečném počtu kroků dostaneme buď ireducibilní řetěz tvaru $A_0^m, \dots, A_u^m$, kde $u > 1$, který spojuje body a, b, nebo řetěz tvaru A_0^m, A_1^m, kde $a \in A_0^m$, $b \in A_1^m$. Tento řetěz je buď ireducibilní, nebo je $b \in A_0^m$ a vynecháme množinu A_1^m, nebo je $a \in A_1^m$, a vynecháme množinu A_0^m.

Lemma 5.4. *Je-li souvislý prostor P pokryt nějakým systémem $\mathfrak{S} = \{\Omega(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ oblastí, lze každé dva body a, b z P spojit ireducibilním řetězem*

$$\Omega(\alpha_0), \dots, \Omega(\alpha_s) \tag{19}$$

oblastí z $\mathfrak{S}$.

D ů k a z . Buď M množina všech bodů $x \in P$, které lze spojit s bodem a řetězem oblastí z $\mathfrak{S}$. Množina M je pak otevřená: Je-li $x \in M$, existuje řetěz tvaru (19), který spojuje body a, x; tentýž řetěz spojuje s bodem a i každý bod $y \in \Omega_{\alpha_s}$, takže $\Omega(\alpha_s) \subset M$.

Množina M je i uzavřená: Je-li $x \in \overline{M}$, existuje $\alpha \in A$ tak, že $x \in \Omega(\alpha)$; toto $\Omega(\alpha)$ obsahuje nějaký bod $y \in M$. Je-li (19) řetěz spojující body a, y, je $\Omega(\alpha_0), \dots, \Omega(\alpha_s), \Omega(\alpha)$ řetěz spojující body a, x, takže $x \in M$.

Protože každá oblast $\Omega(\alpha)$ obsahující bod a je řetězem spojujícím bod a s kterýmkoli bodem $x \in \Omega(\alpha)$, je $M \neq \emptyset$.

Protože prostor P je souvislý, je tedy $M = P$, tj. každý bod $b \in P$ lze spojit s bodem a řetězem oblastí z $\mathfrak{S}$. Abychom dokončili důkaz lemmatu 5.4, stačí už jen aplikovat lemma 5.3.

Definice 5.3. Říkáme, že řetěz $A_0, \dots, A_s$ (kde $s \geq 0$) vlastních kontinuí spojující body a, b je **regulární**, je-li ireducibilní a platí-li tyto dvě podmínky:

A. $a \in A_0$, $b \in A_s$;

B. $1 \leq i \leq s \Rightarrow A_{i-1} \cap A_i$ je jednobodová množina.

Věta 5.4. *Každé dva body $a \neq b$ lokálně souvislého kontinua P lze pro každé $\varepsilon > 0$ spojit regulárním řetězem lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< \varepsilon$.*

D ů k a z . Označme M množinu všech bodů, které lze s bodem a spojit uvedeným způsobem a ukažme nejdříve, že M je otevřená množina:

Je-li $x \in M$ a $\varepsilon > 0$, existuje regulární řetěz $A_0, \dots, A_s$ lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< \varepsilon$, který spojuje body a, x. Buď $\eta \in (0, \varepsilon - \operatorname{diam} A_s)$; podle důsledku 1 Janiszewského věty 4.1 a podle věty 5.3 existuje lokálně souvislé kontinuum K o průměru $< \eta$, obsahující bod x uvnitř a disjunktní s $A_0 \cup \ldots \cup A_{s-1}$. Posloupnost $A_0, \dots, A_s \cup K$ je pak regulární řetěz spojující bod a s každým bodem $y \in \operatorname{Int} K$; $\operatorname{Int} K$ je tedy okolí bodu x obsažené v M.

Dokažme, že množina M je uzavřená: Nechť $x \in \overline{M}$ a nechť K je lokálně souvislé kontinuum, pro něž je $x \in \operatorname{Int} K$, $\operatorname{diam} K < \varepsilon$; zvolme pevně bod $y \in M \cap \operatorname{Int} K$. Pak existuje regulární řetěz lokálně souvislých kontinuí $A_0, \dots, A_s$ spojující body a, y, přičemž $\operatorname{diam} A_i < \varepsilon$ pro $i = 0, \dots, s$. Nechť k je nejmenší index, pro nějž je $K \cap A_k \neq \emptyset$. Je buď $x \in A_k$, a tedy $x \in M$, nebo je $x \in K - A_k$. V tom případě nechť f je spojité zobrazení $\langle 0, 1 \rangle$ na K (srov. s větou 5.1) a $u \in \langle 0, 1 \rangle$ takové číslo, že $x = f(u)$. Množina $f_{-1}(A_k)$ je uzavřená v $\langle 0, 1 \rangle$ a neobsahuje u; u leží tedy v některém styčném intervalu (v_1, v_2) k této množině. Označíme-li $A^*_{k+1} = f(\langle v_1, u \rangle)$, je A^*_{k+1} lokálně souvislé kontinuum obsahující bod x a mající s A_k jediný společný bod $f(v_1)$. Protože $A^*_{k+1} \subset K$, je $A^*_{k+1} \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}) = \emptyset$ a $\operatorname{diam} A^*_{k+1} < \varepsilon$. Systém kontinuí $A_1, \dots, A_k, A^*_{k+1}$ je regulární řetěz lokálně souvislých kontinuí průměru $< \varepsilon$, spojující a a x. Je tedy $x \in M$.

Protože množina M je zřejmě neprázdná, je $M = P$ a věta 5.4 je dokázána.

Věta 5.5. (Mazurkiewicz – Moore – Menger.) *Je-li P lokálně souvislé kontinuum, lze každé dva různé body a, b z P spojit obloukem ležícím v P.*[18]

[18]) Prostory, v nichž lze každé dva různé body spojit obloukem, se nazývají *obloukově souvislé* (*arcwise connected*).

D ů k a z . Spojme v P (podle předcházející věty) body a a b regulárním řetězem Ř(1) lokálně souvislých kontinuí

$$A^1(0), A^1(1), \ldots, A^1(s_1) \tag{20_1}$$

o průměrech < 1 a označme $p^1(i) := A^1(i-1) \cap A^1(i)$ pro $i = 1, \ldots, s_1$.

Je-li pro některé $n \in \mathbb{N}$ sestrojen regulární řetěz Ř(n) lokálně souvislých kontinuí

$$A^n(0), A^n(1), \ldots, A^n(s_n) \tag{20_n}$$

o průměrech $< 1/n$, který spojuje body a, b, označme $p^n(i) := A^n(i-1) \cap A^n(i)$ pro $i = 1, \ldots, s_n$ a sestrojme řetěz Ř$(n+1)$ spojením $s_n + 1$ dílčích regulárních řetězů lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< 1/(n+1)$ takto:

Řetěz $A^{n+1}(0), \ldots, A^{n+1}(r_1)$ spojuje body $a, p^n(1)$ v kontinuu $A^n(0)$,
řetěz $A^{n+1}(r_1+1), \ldots, A^{n+1}(r_2)$ spojuje body $p^n(1), p^n(2)$ v kontinuu $A^n(1)$,
....
řetěz $A^{n+1}(r_{s_n}+1), \ldots, A^{n+1}(s_{n+1})$ spojuje body $p^n(s_n), b$ v kontinuu $A^n(s_n)$.

Spojením těchto řetězů získáme regulární řetěz

$$A^{n+1}(0), \ldots, A^{n+1}(r_1), A^{n+1}(r_1+1) \ldots, A^{n+1}(r_2), \ldots, A^{n+1}(r_{s_n}+1), \ldots, A^{n+1}(s_{n+1}) \tag{20_{n+1}}$$

lokálně souvislých kontinuí o průměrech $< 1/(n+1)$, který spojuje body a, b.

Označíme-li

$$A^{(n)} = \bigcup_{i=0}^{s_n} A^n(i) \tag{21}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, je $A^{(n)}$ lokálně souvislé kontinuum, přičemž $A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$. Dokažme, že *množina*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \tag{22}$$

je oblouk ab:

Podle poznámky 4.2 je C kontinuum. Z konstrukce je zřejmé, že každý bod $p^n(i)$ leží v každé z množin $A^{(k)}$, tedy i v C. Protože bod $p^n(i)$ roztíná $A^{(n)}$ mezi body a, b, roztíná i kontinuum C mezi těmito body.

Množina M všech bodů p_i^n $(i = 1, \ldots, s_n, n \in \mathbb{N})$ je zřejmě hustá v C. Dokážeme-li, že kontinuum C je lokálně souvislé, bude naše tvrzení dokázáno, neboť podle věty 3.3 je pak množina $S(a, b) \cup a \cup b$ kompaktní, a tedy splývá s C, protože obsahuje hustou množinu M; odtud pak z věty 3.4 plyne, že C je oblouk.

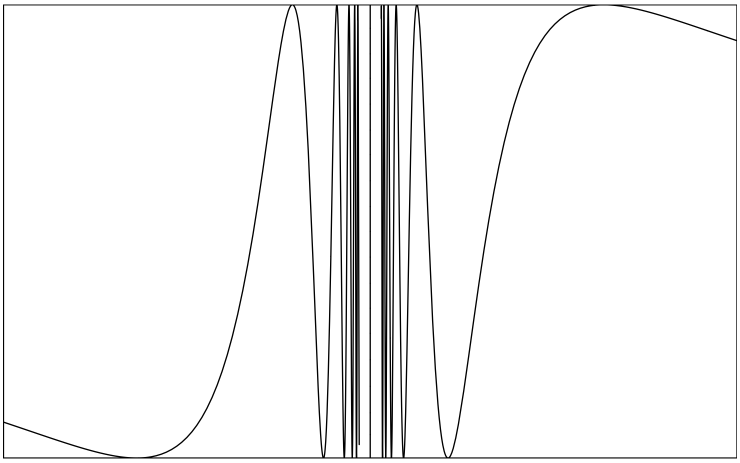
Lokální souvislost C však plyne z věty 5.2, protože řetězy (20_n) lze modifikovat podobně jako v důkazu této věty, část IV $\Rightarrow$ I, tj. lze z nich utvořit dyadický systém s nezměněnými množinami $A^{(n)}$, tedy se stejnou množinou C.

Poznámka 5.5. Větu 5.5 nelze obrátit. Existují kontinua, která nejsou lokálně souvislá a v nichž lze každé dva různé body spojit obloukem. Příkladem takového kontinua je sjednocení uzávěru grafu funkce $\sin(1/x)$, $0 < |x| \leq 1$, s hranicí čtverce $\langle -1, 1 \rangle^2$. (Viz obr. 12.)

Naproti tomu platí:

Věta 5.6. *K tomu, aby kontinuum P bylo lokálně souvislé, je nutné a stačí, aby pro každý bod $x \in P$ a pro každé jeho okolí $U(x)$ existovalo okolí $V(x)$ tak, že každý bod $y \in V(x) - x$ lze spojit s bodem x obloukem $C_y \subset U(x)$.*

D ů k a z . Je zřejmé, že z podmínky vyslovené ve větě plyne lokální souvislost kontinua P. Podmínka je však i nutná, protože každý bod lokálně souvislého kontinua P je (podle důsledku 1 Janiszewského věty 4.1 a podle vět 5.3 a 5.5) obsažen uvnitř libovolně malých lokálně souvislých kontinuí $K \subset P$.



Obr. 12; z technických důvodů nejsou na osách stejná měřítka

6. Ireducibilní a nerozložitelná kontinua

Definice 6.1. Množina F se nazývá **ireducibilní vzhledem k množinovému systému** $\mathfrak{S}$, je-li $F \in \mathfrak{S}$ a platí-li implikace

$$X \subsetneq F \Rightarrow X \notin \mathfrak{S}. \tag{1}$$

Věta 6.1. (Brouwerova redukční věta.) *Nechť P je prostor se spočetnou bází a nechť $\mathfrak{S}$ je množinový systém s těmito vlastnostmi:*

1. *Každá množina $F \in \mathfrak{S}$ je uzavřenou podmnožinou prostoru P.*
2. *Je-li $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost množin z $\mathfrak{S}$, je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathfrak{S}$.*

Pak každá množina $F \in \mathfrak{S}$ obsahuje množinu F^* ireducibilní vzhledem k systému $\mathfrak{S}$.

D ů k a z . Nechť $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ je báze P a nechť $F \in \mathfrak{S}$. Položme $F_0 = F$ a předpokládejme, že pro některé $n \in \mathbb{N}$ je již sestrojena množina F_{n-1}. Mohou nastat jen dvě situace:

A. Existuje množina $H \in \mathfrak{S}$ tak, že $H \subset F_{n-1} - U_n$; pak jednu takovou množinu H vybereme a položíme $F_n = H$.

B. Žádná množina $H \in \mathfrak{S}$ splňující podmínku $H \subset F_{n-1} - U_n$, neexistuje; pak položíme $F_n = F_{n-1}$.

Dokažme, že množina

$$F^* := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \tag{2}$$

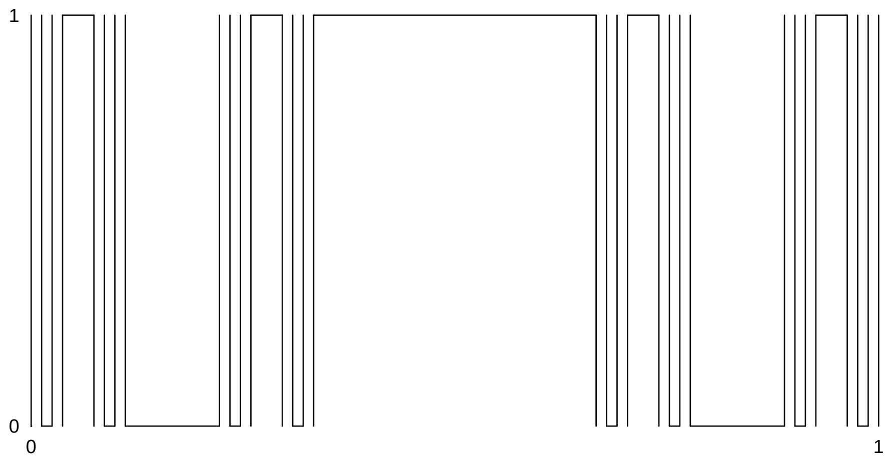
je pak hledaná ireducibilní množina:

Protože uzavřené množiny F_n tvoří nerostoucí posloupnost, je $F^* \in \mathfrak{S}$ podle předpokladu 2 věty; navíc je $F^* \subset F$. Předpokládejme, že nějaká množina $X \subsetneq F^*$ je prvkem $\mathfrak{S}$; protože X je pak uzavřená množina, existuje U_n tak, že $U_n \cap F^* \neq \emptyset = U_n \cap X$. Z toho plyne, že $X \subset F^* - U_n \subset F_{n-1} - U_n$, takže (podle pravidla A konstrukce) je $F_n \cap U_n = \emptyset$. Tím spíše je tedy $F^* \cap U_n = \emptyset$ – spor.

Definice 6.2. Jsou-li a, b dva různé body kontinua P, říkáme, že P je **ireducibilní mezi body** a, b, neexistuje-li žádné kontinuum $K \subsetneq P$ obsahující oba body a, b. Říkáme, že **kontinuum** P **je ireducibilní**, existují-li v P dva různé body, mezi nimiž je P ireducibilní.[19])

Příklady 6.1. 1. Kontinuum složené z úsečky u s krajními body $(0, \pm 1)$ a z grafu funkce $\sin(1/x)$, $x \in (0, 1\rangle$ je ireducibilní mezi bodem $(1, \sin 1)$ a kterýmkoli bodem úsečky u.

2. Kontinuum z příkladu 4.4 (obr. 8) je ireducibilní mezi počátkem a kterýmkoli bodem jednotkové kružnice.



Obr. 13

[19]) Oba pojmy jsou topologické.

3. Nechť Δ je Cantorovo diskontinuum a $J(i_1, \dots, i_n)$, $n \geq 0$, nechť jsou jeho (omezené) styčné intervaly. P nechť je sjednocení všech úseček $\langle (x,0); (x,1)\rangle$, kde $x \in \Delta$, s úsečkami $\langle (a,1); (b,1)\rangle$, kde $(a,b) = J(i_1, \dots, i_n)$, n sudé, a s úsečkami $\langle (a,0); (b,0)\rangle$, kde $(a,b) = J(i_1, \dots, i_n)$, n liché. Pak je P kontinuum ireducibilní mezi každými dvěma body $A \in \langle (0,0); (0,1)\rangle$, $B \in \langle (1,0); (1,1)\rangle$. Viz obr. 13.

Věta 6.2. *Pro každé kontinuum P obsahující body $a \neq b$ existuje kontinuum $K \subset P$ ireducibilní mezi a, b.*

D ů k a z . Stačí aplikovat Brouwerovu redukční větu 6.1, v níž za $\mathfrak{S}$ zvolíme systém všech kontinuí $K \subset P$ obsahujících množinu $\{a, b\}$. Podmínka 2 této věty platí, protože průnik nerostoucí posloupnosti kontinuí (obsahujících body a, b) je kontinuum (obsahující body a, b).

Věta 6.3. *Žádné kontinuum P ireducibilní mezi body a, b není sjednocením dvou kontinuí A, B obsahujících bod a a různých od P.*

D ů k a z . Kdyby kontinuum P bylo sjednocením kontinuí A, B různých od P a obsahujících bod a, ležel by bod b v jednom z kontinuí A, B, což vzhledem k předpokladu $A \neq P \neq B$ odporuje ireducibilitě kontinua P mezi body a, b.

Věta 6.4. *Nechť P je kontinuum ireducibilní mezi body a, b a nechť $C \subset P$ je kontinuum; pak platí:*

1. *Obsahuje-li kontinuum C jeden bodů a, b, je $P - C$ souvislá množina.*

2. *Je-li množina $P - C$ nesouvislá, je sjednocením dvou disjunktních oblastí, z nichž jedna obsahuje bod a, druhá bod b.*

D ů k a z . Ad 1. Je-li množina $P - C$ nesouvislá, existuje rozklad $P - C = A \cup B$ na dvě disjunktní, otevřené a neprázdné množiny A, B. Množiny $A \cup C$, $B \cup C$ jsou pak podle věty 2.2 kontinua; obě jsou neprázdná, různá od P a jejich sjednocením je P. Podle věty 6.3 leží bod a jen v jedné z nich, takže nemůže ležet v C. Protože ve větě 6.3 můžeme místo a napsat b, neleží v C ani bod b.

Ad 2. Jeden z bodů a, b leží tedy v A, druhý v B, a označení lze jistě zvolit tak, že $a \in A$, $b \in B$. Protože $A \cup C$ je kontinuum obsahující bod a, plyne z první části věty, v níž C nahradíme množinou $A \cup C$, že (otevřená) množina $P - (A \cup C) = B$ je souvislá; z podobných důvodů platí totéž o množině A.

Věta 6.5. *K tomu, aby kontinuum K bylo obloukem ab, je nutné a stačí, aby bylo lokálně souvislé a ireducibilní mezi a, b.*

D ů k a z . Pro oblouk ab je podmínka zřejmě splněna. Je-li K lokálně souvislé kontinuum, lze body a, b podle věty 5.5 spojit obloukem $C \subset K$. Protože K je ireducibilní mezi a, b, je $C = K$.

Věta 6.6. *Je-li P ireducibilní kontinuum a bod $p \in P$ leží v nějakém kontinuu kondenzace $K \subset P$, není kontinuum P lokálně souvislé v bodě p.* [20])

D ů k a z . Nechť P je ireducibilní mezi body a, b. Jsou dvě možnosti: 1. $a \neq p \neq b$, 2. $p \in \{a, b\}$.

Ad 1. Můžeme navíc předpokládat, že $K \subset P - \{a, b\}$, neboť podle důsledku 1 Janiszewského věty 4.1 lze K v případě potřeby patřičně zmenšit. Označíme-li

$$A = \operatorname{konst}_a(P - K), \quad B = \operatorname{konst}_b(P - K), \tag{3}$$

je (podle věty 4.1)

$$\overline{A} \cap K \neq \emptyset \neq \overline{B} \cap K, \tag{4}$$

takže $\overline{A} \cup K \cup \overline{B} \subset P$ je kontinuum; protože obsahuje body a, b (mezi nimiž je P ireducibilní), je identické s P. Protože $P - K \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ a protože K je řídké v P, plyne z toho, že $P = \overline{P - K} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \subset P$, takže

$$P = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{5}$$

1a. Vyšetřme nejdříve případ, kdy $p \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap K$, a předpokládejme, že P je lokálně souvislé v bodě p. Buď $U(p)$ tak malé, že $K - \overline{U(p)} \neq \emptyset$, a nechť $C := \overline{\operatorname{komp}_p U(p)}$. Pak je C kontinuum obsahující bod p uvnitř a $K - C \neq \emptyset$. Protože $p \in \overline{A} \cap \overline{B}$, je $A \cap \operatorname{Int} C \neq \emptyset \neq B \cap \operatorname{Int} C$, a z definice konstituanty plyne existence kontinuí $K_1 \subset A$, $K_2 \subset B$, pro něž je $a \in K_1$, $b \in K_2$, $K_1 \cap \operatorname{Int} C \neq \emptyset \neq K_2 \cap \operatorname{Int} C$. Množina $K_1 \cup C \cup K_2 \subset P$ je pak kontinuum obsahující body a, b, a protože P je mezi těmito body ireducibilní, je

[20]) Podle věty 4.7 pak bod p leží na nějakém kontinuu konvergence kontinua P.

$K_1 \cup C \cup K_2 = P$. To však je spor, protože množiny A, B, a tím spíše kontinua K_1, K_2, jsou disjunktní s K, takže $K - (K_1 \cup C \cup K_2) = K - C \neq \emptyset$.

1b. Předpokládejme nyní, že $p \in \overline{A} \cap K - \overline{B}$; případ $p \in \overline{B} \cap K - \overline{A}$ je zcela analogický. Číslo $\rho := \frac{1}{2}\rho(p, \overline{B})$ je pak kladné a množina $K_0 := \mathrm{komp}_p(K \cap \overline{U(p,\rho)})$ je podle Janiszewského věty 4.1 vlastní kontinuum obsahující bod p a disjunktní s $\overline{B}$.

Předpokládejme, že kontinuum P je lokálně souvislé v bodě p. Pak existuje kontinuum C tak, že $p \in \mathrm{Int}\, C$, $K_0 - C \neq \emptyset$. Podle definice množiny A existuje kontinuum $K_1 \subset A$ obsahující spolu s bodem a i nějaký bod $x \in A \cap \mathrm{Int}\, C$. Množina $K_1 \cup C \cup K \cup \overline{B} \subset P$ je kontinuum obsahující oba body a, b, protože každá z množin K_1, C, K, $\overline{B}$ je kontinuum a $a \in K_1$, $x \in K_1 \cap C$, $p \in C \cap K$, $K \cap \overline{B}$, $b \in B$. Protože P je ireducibilní mezi body a, b, je $K_1 \cup C \cup K \cup \overline{B} = P$. Kdyby otevřená množina $P - (K_1 \cup C \cup \overline{B}) \subset K$ byla neprázdná, měla by množina K vnitřní body, což odporuje její řídkosti; je tedy $K_1 \cup C \cup \overline{B} = P$. Protože $K_0 \cap K_1 \subset K_0 \cap A = \emptyset$ a $K_0 \cap \overline{B} = \emptyset$, je

$$\emptyset = K_0 - P = K_0 - (K_1 \cup C \cup \overline{B}) = K_0 - C \neq \emptyset,$$

což je spor.

Tím je věta dokázána za dodatečného předpokladu, že $a \neq p \neq b$.

Ad 2. Je-li např. $p = a$, lze předpokládat, že $b \notin K$. Protože $\overline{B} \cap K \neq \emptyset$, je $\overline{B} \cup K$ kontinuum obsahující body $a = p$ a b, a je tedy identické s P. Kdyby byla otevřená množina $P - \overline{B} \subset K$ neprázdná, obsahovalo by kontinuum K vnitřní body; je tedy $P = \overline{B}$. Je-li kontinuum P lokálně souvislé v bodě $p = a$, existuje kontinuum C tak, že $a \in \mathrm{Int}\, C$, $K - C \neq \emptyset$. Protože $B \cap \mathrm{Int}\, C \neq \emptyset$, existuje kontinuum $K_2 \subset B$ tak, že $b \in K_2$, $K_2 \cap \mathrm{Int}\, C \neq \emptyset$. Kontinuum $K_2 \cup C$ obsahuje pak oba body a, b, a rovná se tedy P. Protože $K \cap K_2 = \emptyset$, je $\emptyset = K - P = K - (K_2 \cup C) = K - C \neq \emptyset$, což je spor.

Tím je důkaz věty 6.6 dokončen.

Věta 6.7. *Je-li P kontinuum, jsou ekvivalentní tyto tři podmínky:*

1. *P je oblouk.*
2. *P je ireducibilní a neobsahuje žádné kontinuum kondenzace.*
3. *P je ireducibilní a neobsahuje žádné kontinuum konvergence.*

D ů k a z . 1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3. Je-li P oblouk, je ireducibilní (mezi svými krajními body) a neobsahuje zřejmě žádné řídké vlastní kontinuum, tedy žádné kontinuum kondenzace; tím spíše neobsahuje žádné kontinuum konvergence.

3 $\Rightarrow$ 1. Je-li P ireducibilní a neobsahuje žádné kontinuum konvergence, je podle věty 4.9 (dědičně) lokálně souvislé, a je tedy podle věty 6.5 obloukem.

* * *

Definice 6.3. Říkáme, že kontinuum P je **nerozložitelné**, je-li vlastní a má-li tuto vlastnost: Jsou-li K_1, K_2 kontinua, pro něž je $K_1 \cup K_2 = P$, je buď $K_1 = P$, nebo $K_2 = P$.

Poznámka 6.1. *Je-li P nerozložitelné kontinuum, je doplněk $P - K$ každého kontinua $K \subset P$ souvislý.* Kdyby totiž bylo $P - K = A \cup B$, kde A, B jsou disjunktní neprázdné otevřené množiny, byl by $P = (A \cup K) \cup (B \cup K)$ rozklad P na dvě kontinua (srov. s větou 2.2), z nichž žádné se nerovná P.

Definice 6.4. Je-li P kontinuum, nazveme **kompozantou bodu** p **v** P množinu $R_p(P)$ všech bodů $x \in P$, pro něž je P reducibilní mezi p a x. (Jinými slovy: $x \in R_p(P)$, *právě když existuje kontinuum* $K_{px} \subsetneq P$ *obsahující body* p, x.)

Poznámka 6.2. Doplněk $P - R_p(P)$ kompozanty $R_p(P)$ je identický s množinou všech bodů $q \in P$, pro něž je P ireducibilní mezi p, q. Kompozanta $R_p(P)$ je (jakožto sjednocení jistého systému kontinuí majících společný bod p) souvislá, takže $\overline{R_p(P)}$ *je kontinuum*.

Příklady 6.2. 1. Je-li P oblouk pq je $R_p(P) = P - q$, $R_q(P) = P - p$, $R_x(P) = P$ pro každé $x \in P - \{p, q\}$.

2. Je-li P topologická kružnice, je $R_p(P) = P$ pro každé $p \in P$.

3. Označme

$$us := \langle (0,-1); 0,1) \rangle,\ si := \{(x, \sin(1/x));\ x \in (0,1\rangle\},\ b := (1, \sin 1)$$

a nechť $P := si \cup us$. Pak je $R_p(P) = P - b$ pro každé $p \in us$ a $R_p(P) = si$ pro každé $p \in si$.

Věta 6.8. *Pro každé vlastní kontinuum P a pro každý bod $p \in P$ je kompozanta $R_p(P)$ hustá v P a existují kontinua $K_n \subsetneq P$ tak, že*

$$R_p(P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \,. \tag{6}$$

D ů k a z . 1. Zvolme v P nějakou bázi $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ neprázdných množin U_n a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $V_n := U_n - p$ a

$$K_n := \operatorname{komp}_p(P - V_n). \tag{7}$$

Každá s množin K_n je pak kontinuum různé od P a obsahující bod p, takže $K_n \subset R_p(P)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$; pravá strana rovnosti (6) je tedy částí její levé strany.

Obráceně: Je-li $x \in R_p(P)$, $x \neq p$, existuje kontinuum $K_{px} \subsetneq P$ obsahující body p a x. Je-li $y \in P - K_{px}$, existuje V_n tak, že $y \in V_n \subset P - K_{px}$. Potom však je $K_{px} \subset \operatorname{komp}_p(P - V_n) = K_n$, takže levá strana rovnosti (6) je obsažena v její pravé straně. Tím je rovnost (6) dokázána.

2. Kdyby kontinuum $\overline{R_p(P)}$ nebylo rovno celému P, existovalo by podle důsledku 2 Janiszewského věty 4.1 kontinuum K tak, že $\overline{R_p(P)} \subsetneq K \subsetneq P$, a P by pak bylo reducibilní mezi p a každým bodem $x \in K - R_p(P)$, což je ve sporu s definicí $R_p(P)$.

Věta 6.9. *Je-li C kompozanta kontinua P, je množina $P - C$ souvislá.*

D ů k a z . Podle předpokladu je $C = R_p(P)$ pro vhodné $p \in P$. Stačí vyšetřit případ, kdy $C \neq P$, tj. kdy existuje bod $q \in P$ tak, že P je ireducibilní mezi p, q.

Předpokládejme, že $P - C = M \cup N$, kde M, N jsou neprázdné oddělené množiny, jejichž označení je zvoleno tak, že $q \in M$. Z oddělenosti množin M, N (a z normality metrických prostorů) plyne existence otevřené množiny $G \supset M$, jejíž uzávěr je disjunktní s N. Pak je $H(G) \cap (M \cup N) = (\overline{G} - G) \cap (M \cup N) = \emptyset$, takže $H(G) \subset C$. Označíme-li $K := \operatorname{komp}_q \overline{G}$, plyne z podmínek $N \neq \emptyset$, $\overline{G} \cap N = \emptyset$, že $G \neq P$; podle Janiszewského věty 4.1 je tedy $K \cap H(G) \neq \emptyset$. Zvolíme-li v této množině bod a, je $a \in C$, takže existuje kontinuum $Q \subset C$ obsahující body p, a. Protože kontinuum K obsahuje body q, a, je $Q \cup K$ kontinuum obsahující body p, q. Protože P je mezi těmito body ireducibilní, je $Q \cup K = P$, takže $N \subset Q \cup K$; to spolu s implikacemi

$$Q \subset C \Rightarrow Q \cap N \subset C \cap N = \emptyset, \quad K \subset \overline{G},\ \overline{G} \cap N = \emptyset \Rightarrow K \cap N = \emptyset$$

ukazuje, že $N = \emptyset$, což je spor, který dokazuje větu 6.9.

Věta 6.10. *K tomu, aby vlastní kontinuum P bylo nerozložitelné, je nutné a stačí, aby každé kontinuum $K \subsetneq P$ bylo řídké v P.*

D ů k a z . 1. Předpokládejme, že každé kontinuum $K \subset P$ různé od P je v P řídké a nechť $P = K_1 \cup K_2$, kde K_1, K_2 jsou kontinua; máme dokázat, že pak je buď $K_1 = P$, nebo $K_2 = P$. Je-li však $K_1 \neq P$, je K_1 podle předpokladu řídké v P, z čehož plyne, že $K_2 = P$.

2. Nechť naopak existuje kontinuum $K \subsetneq P$, které není v P řídké (takže $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$); máme dokázat, že P lze pak rozložit na dvě kontinua, z nichž žádné není identické s P.

Je-li množina $P - K$ souvislá, je $\overline{P - K}$ kontinuum disjunktní s $\operatorname{Int} K$, tedy různé od P. Hledaným rozkladem je tedy rozklad $P = K \cup \overline{P - K}$.

Není-li množina $P - K$ souvislá, je $P - K = A \cup B$, kde A, B jsou neprázdné disjunktní otevřené množiny. Podle věty 2.2 jsou množiny $K_1 := A \cup K$, $K_2 := B \cup K$ kontinua, přičemž $K_1 \neq P \neq K_2$. Hledaným rozkladem je proto rozklad $P = K_1 \cup K_2$.

Věta 6.11. *Je-li P nerozložitelné kontinuum, platí tato tvrzení:*

1. *Pro každé dva body p, q z P je*

$$\text{buď } R_p(P) = R_q(P), \text{ nebo } R_p(P) \cap R_q(P) = \emptyset. \tag{8}$$

2. *Systém všech kompozant kontinua P je nespočetný.*

3. *Existuje nespočetná množina $M \subset P$ tak, že P je ireducibilní mezi každými dvěma body $x \neq y$ z M.*

Obráceně:

4. *Obsahuje-li ireducibilní kontinuum P dvě disjunktní kompozanty, je nerozložitelné.*

5. *Obsahuje-li kontinuum P alespoň tři různé body x, y, z tak, že P je ireducibilní mezi x, y, mezi x, z i mezi y, z, je P nerozložitelné.*

D ů k a z . 1. Předpokládejme, že $R_p(P) \cap R_q(P) \neq \emptyset$, a dokažme nejdříve inkluzi

$$R_p(P) \subset R_q(P) . \tag{9}$$

Je-li $y \in R_p(P)$, je P reducibilní mezi body p, y, a existuje tedy kontinuum $K_{py} \subsetneq P$ obsahující tyto body. Zvolíme-li pevně nějaký bod $x \in R_p(P) \cap R_q(P)$, existuje kontinuum $K_{px} \subsetneq P$ obsahující body p, x a kontinuum $K_{qx} \subsetneq P$ obsahující body q, x. Množina $K_{qy} := K_{qx} \cup K_{px} \cup K_{py}$ je pak kontinuum obsahující body q, y; protože žádné z kontinuí vpravo není rovné P, je podle věty 6.10 řídké v P, a totéž tedy platí i o K_{qy}. Je proto $K_{qy} \neq P$ a bod y tedy leží v $R_q(P)$. Inkluze (9) je dokázána.

Protože obrácenou inkluzi dostaneme záměnou bodů p, q, je $R_p(P) = R_q(P)$. Tím je tvrzení 1 dokázáno.

2. Podle věty 6.8 je každá kompozanta $R_p(P)$ sjednocením spočetně mnoha kontinuí $K_n \neq P$, tedy (podle věty 6.10) kontinuí řídkých v P. Každá kompozanta je tedy množinou 1. kategorie. Protože P je 2. kategorie a protože je sjednocením všech svých kompozant, musí být těchto kompozant nespočetně mnoho.

3. Hledanou množinou je zřejmě množina M, která má s každou kompozantou společný právě jeden bod.

4. Dokažme, že *je-li rozložitelné kontinuum P ireducibilní mezi body $a \neq b$, nejsou žádné dvě kompozanty kontinua P disjunktní.*

Předpokládáme, že existují kontinua K_1, K_2 tak, že $K_1 \neq P \neq K_2$ a $K_1 \cup K_2 = P$; protože P je kontinuum, je $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Oba body a, b neleží v jedné z množin K_1, K_2, protože P je mezi nimi body a, b ireducibilní; zvolme označení tak, že $a \in K_1$, $b \in K_2$. Nechť p, q jsou (libovolné) dva body z P a nechť $C_1 := R_p(P)$, $C_2 := R_q(P)$ jsou příslušné kompozanty. Je-li označení zvoleno tak, že $p \in K_1$, je $K_1 \subset C_1$.

Je-li $q \in K_1$, je $K_1 \subset C_2$, takže $\emptyset \neq K_1 \subset C_1 \cap C_2$. Je-li $q \in K_2$, je $K_2 \subset C_2$ a $\emptyset \neq K_1 \cap K_2 \subset C_1 \cap C_2$.

5. Předpokládejme opět, že P je rozložitelné a užívejme označení ze 4. části důkazu. Jsou-li x, y, z tři různé body z P, leží aspoň dva z nich v jedné z množin K_i, z čehož plyne, že P je mezi těmito dvěma body reducibilní.

Poznámka 6.3. Zatím nevíme, zdali nerozložitelná kontinua vůbec existují; předcházející dvě věty naznačují, že pokud ano, budou mít asi velmi složitou strukturu. Jedno z nejjednodušších nerozložitelných kontinuí sestrojil polský matematik B. Knaster (Fundamenta Mathematicae 3, 1922, str. 209); popíšeme zde jeho konstrukci a nakreslíme velmi neúplný obrázek jedné kompozanty tohoto kontinua.

Knasterovo nerozložitelné kontinuum je sjednocením všech půlkružnic

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = r^2 , \quad y \geq 0 ,$$

jejichž krajní body leží v Cantorově diskontinuu a všech půlkružnic

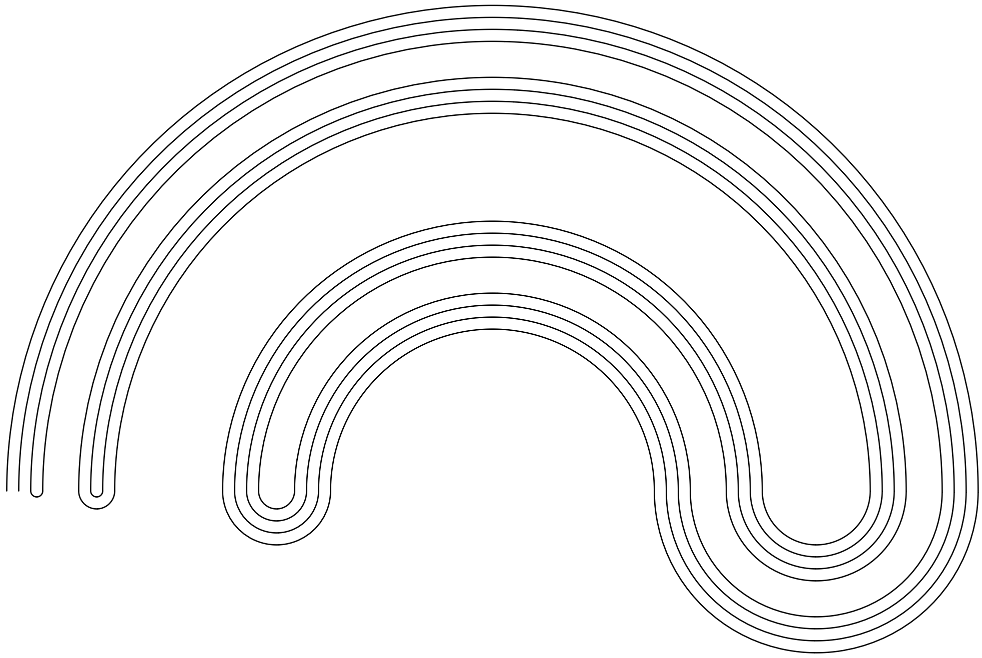
$$\left(x - \frac{5}{2 \cdot 3^n}\right)^2 + y^2 = r^2 , \quad y \leq 0 ,$$

jejichž krajní body leží v Cantorově diskontinuu a zároveň v intervalu $\langle 2/3^n, 1/3^{n-1} \rangle$. (Viz [2], str. 143.) Malá část jeho kompozanty, která prochází všemi body 1. druhu Cantorova diskontinua, je nakreslena na obr. 14. Knasterovo kontinuum obsahuje ovšem podobných kompozant, z nichž žádná již neobsahuje žádný bod 1. druhu, nespočetně mnoho.

Knaster však v témže ročníku 3 časopisu Fundamenta Mathematicae (str. 247) nabídl ještě daleko komplikovanější *dědičně nerozložitelné kontinuum*, tedy kontinuum, jehož žádné vlastní subkontinuum není rozložitelné. Takové kontinuum neobsahuje žádný oblouk, protože oblouk je rozložitelný.

Poznamenejme však, že situace je ještě „*mnohem, mnohem horší, než by se zdálo*“: Lze ukázat, že v prostoru všech neprázdných kontinuí obsažených např. ve čtverci $Q := \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ je funkce

$$\mathrm{d}(A, B) := \max(\max(\{\rho(x, B);\ x \in A\}), \max(\{\rho(y, A);\ y \in B\}))$$



Obr. 14. Nepatrná část Knasterova nerozložitelného kontinua

metrikou.

Polský matematik S. Mazurkiewicz dokázal (Fund. Math. 16 (1930), str. 151), že *při této metrice je množina všech dědičně nerozložitelných kontinuí obsažených v* Q *množinou* 2. *kategorie a typu* G_δ.

Jak poznamenává Kuratowski (srov. [2], str.145), *je paradoxní, že nejsingulárnější kontinua jsou mezi kontinuy nejčastější.*

7. Pojem křivky

Úmluva. *Všechny metrické prostory, které budeme v dalším vyšetřovat, mají spočetnou bázi.*

Jak se ukazuje, slovo „křivka“ má v různých matematických disciplínách různý význam, protože každá disciplína definici přizpůsobuje svým specifickým potřebám. V elementární analytické geometrii se mezi křivky počítají kuželosečky a další křivky vzniklé zpravidla jistými jednoduchými geometrickými operacemi: lemniskata a obecněji Cassiniho křivky vznikají podobným způsobem jako elipsa, na základě elementárních geometrických úvah vznikají např. epicykloidy a hypocykloidy (např. kardioida a asteroida), různé závitnice a spirály atd. Některé křivky jsou souvislé, jiné nesouvislé (jako hyperbola); některé jsou kompaktní (kružnice, elipsa, lemniskata), jiné ne (parabola, Archimedova spirála). Pokud je mi známo, obecnou definici křivky analytická geometrie neposkytuje.

Ve fyzice se křivkou často nazývá trajektorie pohybujícího se bodu a např. silokřivka má slovo křivka přímo v názvu. Protože křivka definovaná jako spojitý obraz kompaktního jednorozměrného intervalu může být i čtverec (s vnitřkem), je k požadavku spojitosti pohybu zřejmě nutné přidat další vhodné předpoklady.

Obecná topologie zkoumá křivky jako bodové množiny s jistými vlastnostmi. Velmi obecná je Menger - Urysonova definice a jednoduchá je i Cantorova definice rovinné křivky; budeme o nich mluvit později. Definic můžeme ovšem vyslovit celou řadu podle toho, jaké vlastnosti preferujeme nebo potřebujeme.

Základním požadavkem v topologii je, aby křivka byla množina topologicky invariantní. Dali bychom asi také přednost definicím, které operují jen s „vnitřními“ vlastnostmi příslušné množiny, před definicemi založenými na jejích „vnějších“ vlastnostech, tedy – zhruba řečeno – na vztazích množiny a prostoru, v němž tato množina leží. Každá množina má své „globální“ („integrální“) vlastnosti a vlastnosti lokální. Protože nám v dalším půjde spíše o lokální vlastnosti, nebude podstatným omezením, budeme-li se zabývat jen kontinuy, místo abychom studovali např. prostory, které se dají rozložit na konečně mnoho uzavřených souvislých lokálně kompaktních množin. Globální vlastnosti posledně jmenovaných prostorů jsou proti globálním vlastnostem kontinuí obvykle mnohem složitější.

S některými množinami, které bychom mohli považovat za křivky, jsme se již setkali. Nebude proto naškodu, sepsat několik jednoduchých vlastností množin, o kterých bychom snad byli ochotni mluvit jako o křivkách, a zkontrolovat, které typy nám známých množin tyto vlastnosti mají:

V1. Vlastní kontinuum obsažené v křivce je křivka.

V2. Souvislá množina, která je sjednocením konečně mnoha křivek, je křivka.

V3. Čtverec (s vnitřkem), kruh, krychle, apod. nejsou křivky.

V4. Mezi křivky patří

V4A. oblouky;

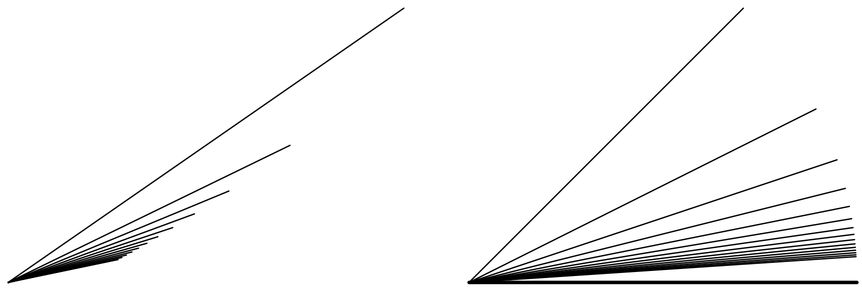
V4B. uzávěr grafu funkce $\sin(1/x)$, $0 < |x| \leq 1$;

V4C. kontinuum složené ze spočetně mnoha úseček vycházejících z jednoho bodu (viz obr. 15, v němž se levé kontinuum skládá z úseček, jejichž délka konverguje k nule, zatímco v kontinuu vpravo jsou všechny úsečky stejně dlouhé);

V4D. kontinuum řídké v rovině, složené z úseček vycházejících z jednoho bodu (srov. s obr. 11, kde je úseček nespočetně mnoho).

Poznámka 7.1. Ukažme nejdříve, že podmínky V1 – V4 *nesplňuje* žádné z dále uvedených kontinuí; to bude motivací pro hledání uspokojivější definice křivky.

A. *Spojitý obraz úsečky* je podle věty 5.1 totéž co lokálně souvislé kontinuum. Podmínka V1 není splněna, protože existují lokálně souvislá kontinua, která nejsou lokálně souvislá dědičně. Na rozdíl od dědičně lokálně souvislých kontinuí mají (podle věty 3.2) lokálně souvislá kontinua vlastnost V2. Lokálně souvislá kontinua nesplňují (na rozdíl od kontinuí lokálně souvislých dědičně) podmínku V3, protože mezi ně patří čtverec, kruh i krychle. Mezi lokálně souvislá kontinua patří oblouky, takže podmínka V4A je splněna; podmínka V4B splněna není, podmínky V4C a V4D obecně také ne. (Kontinuum složené z konečného počtu úseček lokálně souvislé je a totéž platí i kontinuu složeném z nekonečně mnoha úseček $\langle(0,0);(1/n,1/n^2)\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Kontinuum složené z úsečky $\langle(0,0);(1,0)\rangle$ a úseček $\langle(0,0);(1,1/n)\rangle$ však lokálně souvislé není.)



Obr. 15

B. *Spojitý prostý obraz úsečky* (neboli její homeomorfní obraz) je oblouk. Splňuje sice podmínky V1 a V3, ale sjednocení konečného počtu oblouků nemusí být oblouk a množina uvedená sub V4B obloukem také není. Je-li počet úseček ≥ 2, ani množiny uvedené sub V4C a V4D oblouky nejsou.

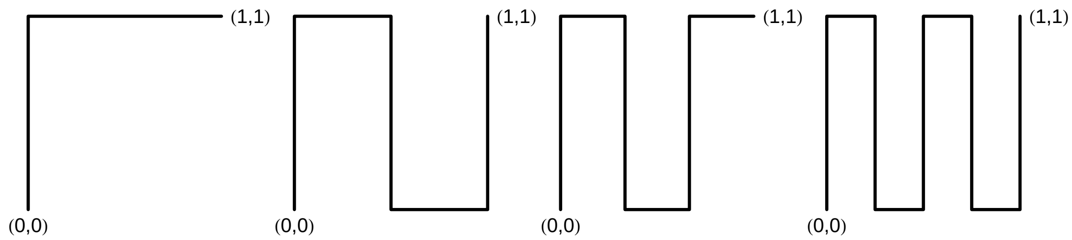
C. *Ireducibilní kontinuum* nemá zřejmě vlastnost V1, protože subkontinuum ireducibilního kontinua může být reducibilní. (Kontinuum z obr. 8 je ireducibilní mezi počátkem a kterýmkoli bodem jednotkové kružnice, ale tato kružnice je reducibilní.) Nemá ani vlastnost V2, protože sjednocením dvou oblouků ab, které kromě bodů a, b nemají žádné body společné, je topologická kružnice, která (na rozdíl od oblouků) není ireducibilní. Čtverec (s vnitřkem) není sice ireducibilní kontinuum, ale existují ireducibilní kontinua, která čtverec obsahují.

Příklad 7.1. Buď $Q := \langle 0,1 \rangle^2$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $L_n \subset Q$ jakýkoli oblouk s krajními body $(0,0)$ a $(1,1)$, od kterého má každý bod $(x,y) \in Q$ vzdálenost $\leq 1/n$. (Viz obr. 16, na němž jsou nakresleny příklady oblouků $L_1, \ldots, L_4$.) Označme $Q^* := Q \times \{0\}$, $M_n := L_n \times \{1/n\}$; N_{2n-1} nechť je úsečka s krajními body $(1,1,1/(2n-1))$, $(1,1,1/2n)$, zatímco N_{2n} je úsečka s krajními body $(0,0,1/2n)$, $(0,0,1/(2n+1))$. Pak je

$$K := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \cup Q^* \tag{2}$$

kontinuum obsahující čtverec Q^* a ireducibilní mezi bodem $(0,0,1)$ a každým bodem $(x,y,0) \in Q^*$. $\square$

Oblouky i množina z podmínky V4B jsou ireducibilní kontinua, množiny z podmínek V4C a V4D nejsou ireducibilní, jsou-li sjednocením více než dvou úseček.

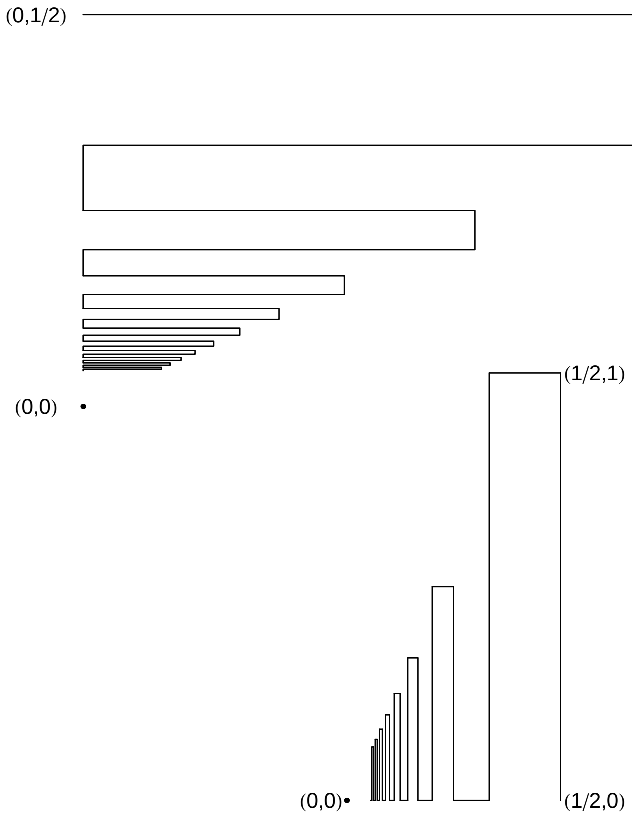


Obr. 16. Jak např. mohou vypadat oblouky $L_1, \ldots, L_4$

D. *Ireducibilní lokálně souvislá kontinua* jsou podle věty 6.5 oblouky.

E. *Kontinua řídká v prostoru* P mají *všechny* vlastnosti uvedené nahoře, je-li $P = \mathbb{R}^2$. Je-li však např. $P = \mathbb{R}^3$, je v P řídký např. každý čtverec, v $P = \mathbb{R}^4$ např. každá (trojrozměrná) krychle. Je-li P obecný metrický prostor, nelze kontinua řídká v P žádným univerzálním způsobem ani charakterizovat.

F. *Kontinua složená z konečného počtu oblouků vycházejících z jednoho bodu* tvoří patrně příliš úzkou třídu kontinuí. Splňují podmínky V2, V3, V4A, ale kontinuum V4B není sjednocením konečného počtu oblouků, stejně jako kontinua V4C a V4D, jsou-li sjednocením nekonečně mnoha úseček se společným krajním bodem. Je možná poněkud překvapující, že *nemají vlastnost* V1. V následujícím příkladu sestrojíme v rovině *dva oblouky* L, M*, které vycházejí z počátku a pro něž kontinuum* $K : L \cup M$ *obsahuje* nekonečně *mnoha oblouků* O_n *vycházejících z počátku, který je jejich jediným společným bodem.*



Obr. 17a

Příklad 7.2. Nakreslíme-li „běžný jednoduchý" obrázek dvou rovinných oblouků L, M vycházejících např. z počátku, budou v jejich sjednocení $L \cup M$ existovat nejvýše dva oblouky L', M', jejichž jediným společným bodem je počátek. *Existují však dvojice rovinných oblouků* L, M *s krajním bodem* $(0,0)$, *v jejichž sjednocení existuje nekonečně mnoho oblouků* O_n *s krajním bodem* $(0,0)$, *přičemž* $m \neq n \Rightarrow O_m \cap O_n = (0,0)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme A_n jako sjednocení úseček, jejichž krajními body jsou sousední členy posloupnosti

$$\left(0, \tfrac{1}{2n}\right), \ \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2n}\right), \ \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2n-1}\right), \ \left(0, \tfrac{1}{2n-1}\right), \ \left(0, \tfrac{1}{2n+2}\right); \tag{3}$$

B_n nechť je lomená čára, která vznikne z A_n zrcadlením podle přímky $y = x$. Položme

$$L := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ M := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \ K := L \cup M. \tag{4}$$

Na obr. 17a je nahoře nakreslena lomená čára $A_1 \cup \ldots \cup A_8$, pod ní lomená čára $B_0 \cup \ldots \cup B_8$, na obr. 17b je jejich sjednocení, v němž jsou silnějšími linkami vyznačeny části oblouků $O_1, \ldots, O_4$ obsažených v K a majících jen počátek společný.

O_1 je sjednocení úseček, jejichž krajní body jsou sousední členy (nekonečné) posloupnosti

$$(5_1) \qquad \left(\tfrac{1}{3},1\right),\ \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2}\right),\ \left(\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{3}\right),\ \left(\tfrac{1}{7},\tfrac{1}{3}\right),\ \left(\tfrac{1}{7},\tfrac{1}{4}\right),\ \left(\tfrac{1}{9},\tfrac{1}{4}\right),\ \left(\tfrac{1}{9},\tfrac{1}{5}\right),\ \left(\tfrac{1}{11},\tfrac{1}{5}\right),\ \ldots,$$

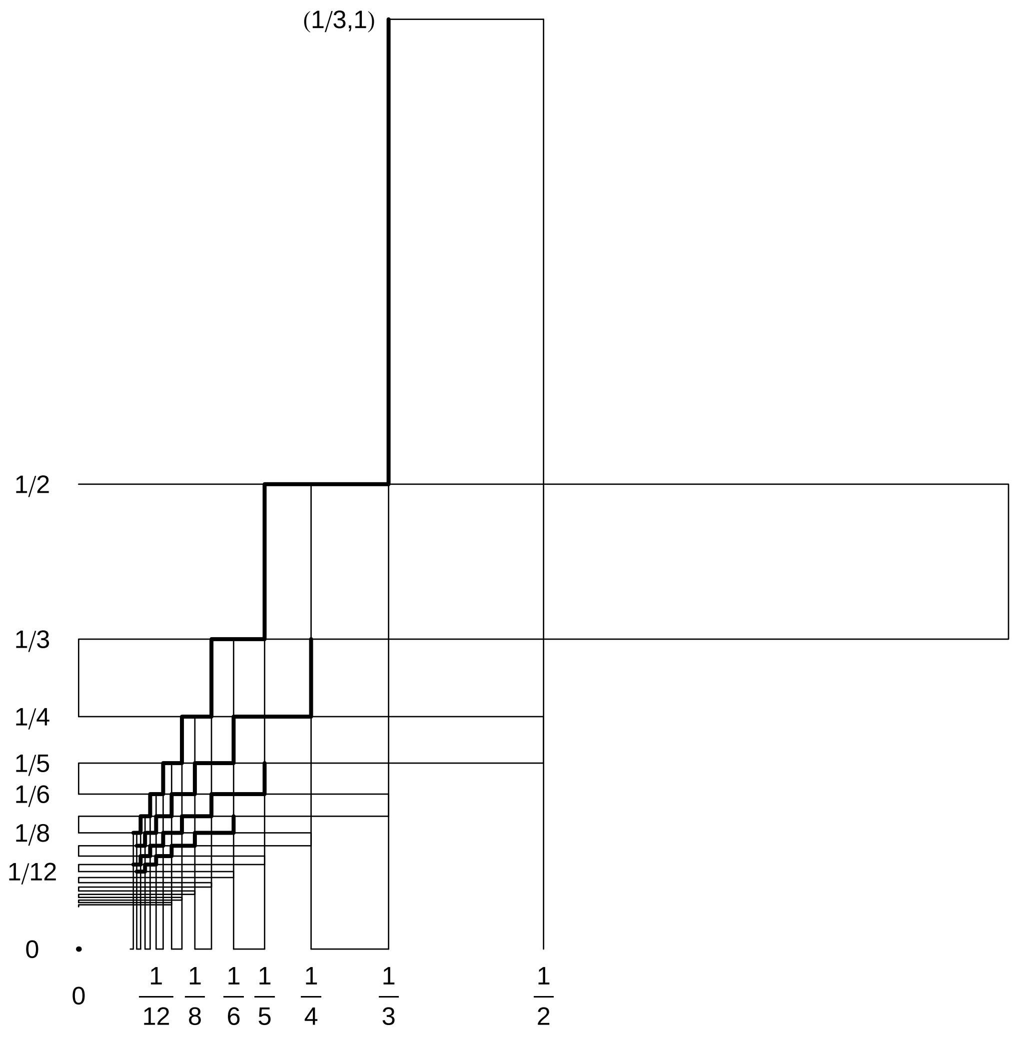
k němuž je přidán počátek; O_1 je zřejmě oblouk.

Podobně vznikne O_2 z posloupnosti

$$(5_2) \qquad \left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{3}\right),\ \left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right),\ \left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{4}\right),\ \left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{5}\right),\ \left(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{5}\right),\ \left(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{6}\right),\ \left(\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{6}\right),\ \left(\tfrac{1}{10},\tfrac{1}{7}\right),\ \ldots$$

a O_n pro obecné n z posloupnosti o členech

$$(5_n) \qquad \left(\tfrac{1}{n+2},\tfrac{1}{2n-1}\right),\ \left(\tfrac{1}{n+2},\tfrac{1}{2n}\right),\left(\tfrac{1}{n+4},\tfrac{1}{2n}\right),\ \left(\tfrac{1}{n+4},\tfrac{1}{2n+1}\right),\ldots,\left(\tfrac{1}{n+2+2k},\tfrac{1}{2n-1+k}\right),\ \left(\tfrac{1}{n+2k},\tfrac{1}{2n+k}\right),\ldots.$$



Obr. 17b

G. *Kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha oblouků vycházejících z jednoho bodu* nesplňuje, jak ukazuje následující příklad, podmínku V1:

Příklad 7.3. Užívejme stejné označení jako při konstrukci Cantorova diskontinua Δ v kapitole 0 a pro každý z intervalů[21]) $\langle 0,1\rangle$, $\Delta(k_1)$, $\Delta(k_1,k_2)$, $\ldots$, $\Delta(k_1,\ldots,k_n)$, $\ldots$ (kde $k_n \in \{0,1\}$) vytvořme přidáním

[21]) které budeme pro stručnost zápisu ztotožňovat s odpovídajícími úsečkami na ose x v rovině xy

dvou úseček ležících v horní polorovině rovnostranný trojúhelník; takto vytvořené trojúhelníky označme

$$(6') \qquad T,\, T(k_1),\, T(k_1,k_2),\, \dots,\, T(k_1,\dots,k_n),\, \dots .$$

Vrcholy těchto trojúhelníků ležící v horní otevřené polorovině značme

$$(6'') \qquad v,\, v(k_1),\, v(k_1,k_2),\, \dots,\, v(k_1,\dots,k_n),\, \dots,$$

$u(k_1)$ nechť je úsečka s krajními body $v, v(k_1)$, pro $n > 1$ nechť $u(k_1,\dots,k_n)$ značí úsečku s krajními body $v(k_1,\dots,k_{n-1}), v(k_1,\dots,k_n)$. Pro každý bod $x \in \Delta$ existuje právě jedna posloupnost k_n, kde $k_n \in \{0,1\}$, tak, že $x = 2\sum_{n=1}^{\infty} k_n/3^n$, a $L(x) := \bigcup_{n=1}^{\infty} u(k_1,\dots,k_n) \cup x$ je oblouk s krajními body v, x. Pro body x 1. druhu[22]) je příslušná posloupnost $\{k_n\}$ stacionární, takže existuje p tak, že $\bigcup_{n=p+1}^{\infty} \cup x$ je úsečka s krajními body $v(k_1,\dots,k_p)$ a x. Z toho plyne, že oblouk $L(x)$ je sjednocením konečného počtu úseček.

Množina

$$(7) \qquad K := T \cup \bigcup_{(k_1,\dots,k_n)\in\{0,1\}^n} T(k_1,\dots,k_n) = \langle 0,1\rangle \cup \bigcup_{x \text{ je 1. druhu}} L(x)$$

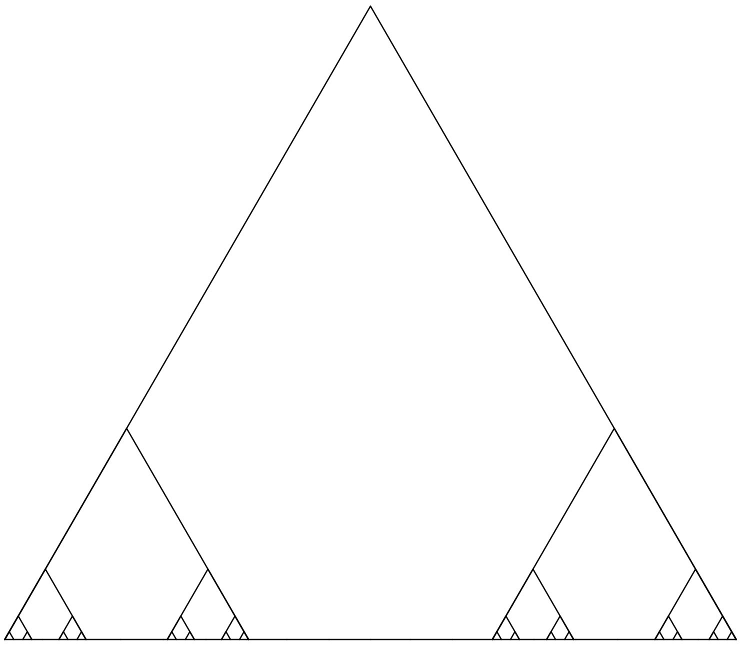
je kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha oblouků s krajními body v, x, kde $x \in \Delta$ je 1. druhu.

Označme (jako v kapitole 0) $J, J(i_1), J(i_1,i_2), \dots$ omezené styčné intervaly diskontinua Δ a položme

$$(7') \qquad K^* := K - \Big(J \cup \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} J(i_1,\dots,i_n)\Big).$$

Množina K^* je kontinuum, které nelze napsat jako sjednocení spočetně mnoha oblouků s krajním bodem v, protože $\Delta \subset K^*$ a jediným obloukem v K^* spojujícím bod v s bodem $x \in \Delta$ je $L(x)$.

Kontinuum K, které je sjednocením spočetně mnoha oblouků se společným krajním bodem splňuje podmínky V2, V4A, V4C. Protože oblouk je množina řídká v rovině, nemůže K být např. čtverec. Podmínka V4B splněna není, a protože kontinuum z obr. 11 není sjednocením spočetně mnoho úseček, není splněna ani podmínka V4C.



Obr. 18

[22]) k nimž nyní počítejme i body 0 a 1

* * *

Poznámka 7.2. K tomu, abychom mohli vyslovit definici křivky podle Mengera a Urysona, potřebujeme pojem tzv. *malé induktivní dimenze.* Obecnou definici dimenze spolu s nejzákladnějšími větami o prostorech dimenze 0 a 1, které budeme potřebovat, lze nalézt např. v Kuratowského knihách Topologie I a II. Pro informaci čtenáře zde uvedeme jen tuto definici; potřebné netriviální věty vyslovíme bez důkazu.

Definice 7.1. Pro každý prostor P a pro každý bod $p \in P$ definujeme **dimenzi** $\dim P$ **prostoru** P a **dimenzi** $\dim_p P$ **prostoru** P **v bodě** p indukcí takto:

1. $\dim \emptyset = -1$.

2. Je-li $n \geq -1$ celé číslo, znamená nerovnost $\dim_p P \leq n+1$ existenci libovolně malých okolí $U(p)$, pro něž je $\dim H(U(p)) \leq n$. Je-li $n \geq 0$, je $\dim_p P = n$, platí-li nerovnost $\dim_p P \leq n$, ale nerovnost $\dim_p P \leq n-1$ neplatí.

3. Je-li $P \neq \emptyset$, je $\dim P := \sup\{\dim_p P;\ p \in P\}$. (Speciálně: Je-li množina $\{\dim_p P;\ p \in P\}$ shora neomezená, je $\dim P = +\infty$.)

Poznámka 7.3. Čísla $\dim P$ a $\dim_p P$ jsou zatím definována jen v případě, že P je (separabilní) metrický prostor. Analogická čísla dostaneme pro podmnožiny M prostoru P, považujeme-li je za jeho podprostory. Slovo okolí a hranice pak ovšem znamenají okolí a hranici v M. Zatímco okolí v M jsou totožná s průniky okolí v P s množinou M, s hranicí množiny A v M je to složitější:

Pozor však! *Hranice* $H_M(A)$ *množiny* A *v* M *není obecně rovna* $H(A) \cap M$! (Příklad: Je-li $P = \mathbb{R}$ a je-li $A = M$ množina všech racionálních čísel, je $H(A) = \mathbb{R}$, tedy $H(A) \cap M = A$, zatímco $H_M(A) = \emptyset$.) Vztah mezi hranicí v P a v M je obecně dán rovnostmi

$$H_M(A) = \overline{A}^M \cap \overline{M-A}^M = M \cap \overline{A} \cap \overline{M-A}. \tag{8}$$

Je-li množina A otevřená v M (speciálně: je-li A okolí v M nějakého bodu z M), existuje otevřená množina $B \subset P$ tak, že $A = B \cap M$; pak je

$$H_M(A) = \overline{A}^M - A = \overline{A} \cap M - A = \overline{B \cap M} \cap M - B \cap M \subset \overline{B} - B = H(B). \tag{9}$$

Indukcí lze odtud celkem snadno dokázat, že $\dim_p M \leq \dim_p P$ pro každé $p \in M$; z toho ihned plyne, že $\dim P \leq n \Rightarrow \dim M \leq n$. Nám budou stačit dvě slabší tvrzení:

Věta 7.1. *Je-li* $p \in M \subset P$, *platí implikace*

$$\dim_p P = 0 \Rightarrow \dim_p M = 0\,, \quad \dim_p P = 1 \Rightarrow \dim_p M \leq 1\,. \tag{10}$$

Je-li $M \subset P$, *platí implikace*

$$\dim P = 0 \Rightarrow \dim M \leq 0\,, \quad \dim P = 1 \Rightarrow \dim M \leq 1\,. \tag{11}$$

D ů k a z . Je-li $\dim_p P = 0$, existují libovolně malá okolí B bodu p, pro něž je $H(B) = \emptyset$; podle (9) mají pak okolí $B \cap M$ bodu $p \in M$ také prázdnou hranici v M. Tím jsou dokázány první implikace v (10) a v (11).

Dále: Je-li $\dim_p P \leq 1$, existují libovolně malá okolí B bodu p, pro něž je $\dim H(B) \leq 0$; vzhledem k (9) a k tomu, co jsme již dokázali, je $\dim H_M(B \cap M) \leq 0$. Z toho plyne, že $\dim_p M \leq 1$; platí tedy i druhé implikace v (10) a v (11).

Věta 7.2. *Je-li* $p \in M \subset P$, *je podmínka* $\dim_p M = 0$ *ekvivalentní s existencí libovolně malých okolí* $U(p)$, *pro něž je* $M \cap H(U(p)) = \emptyset$. *Podmínka* $\dim_p M \leq 1$ *je pak ekvivalentní s existencí libovolně malých okolí* $U(p)$, *pro něž je* $\dim (M \cap H(U(p))) \leq 0$.

Poznámka 7.4. Právě zavedené pojmy jsou topologické. Jinými slovy: *Je-li* $M \subset P$ *a je-li* $f : M \to R$ *homeomorfní zobrazení, je* $\dim_p M = \dim_{f(p)} f(M)$ *pro každé* $p \in M$ *a* $\dim M = \dim f(M)$.

Poznámka 7.5. Prostor P má dimenzi 0 v bodě $p \in P$, existují-li libovolně malá okolí $U(p)$, jejichž hranice je prázdná;[23]) prostor $P \neq \emptyset$ má dimenzi 0, má-li dimenzi 0 v každém bodě $p \in P$.

[23]) Připomeňme, že množina má prázdnou hranici, právě když je obojetná.

Příklady 7.4. 1. *Každý neprázdný spočetný prostor P má dimenzi* 0, protože každý bod $p \in P$ má dokonce libovolně malá *sférická* okolí s prázdnou hranicí. To je zřejmé v případě jednobodového prostoru P; obsahuje-li P aspoň dva různé body, stačí poloměr volit tak, aby nebyl roven žádnému z čísel $\rho(p, x)$, kde $p \neq x \in P$.

2. *Množina M všech iracionálních čísel má také dimenzi* 0, protože pro každé iracionální číslo p existují racionální čísla r_1, r_2 tak, že $r_1 < p < r_2$ a že rozdíl $r_2 - r_1$ je libovolně malý. Okolí $(r_1, r_2) \cap M$ bodu p má pak v M prázdnou hranici.

3. *Cantorovo diskontinuum má dimenzi* 0, protože pro každý jeho bod p existuje interval libovolně malé délky, jehož krajní body leží ve vhodných styčných intervalech. (Připomeňme, že sjednocení všech styčných intervalů včetně intervalů $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$ je husté v $\mathbb{R}$.)

4. $\mathbb{R}$ *a všechny intervaly $M \subset \mathbb{R}$ mají dimenzi* 1: Je-li $M \subset \mathbb{R}$ interval, je-li $p \in M$ a je-li $\varepsilon > 0$ dostatečně malé, má hranice okolí $U_M(p, \varepsilon)$ dimenzi 0.[24])

5. *Každý oblouk má dimenzi* 1: Protože pojem dimenze je topologický a protože kompaktní jednorozměrné intervaly mají dimenzi 1, platí totéž o obloucích.

6. *Každé vlastní kontinuum má dimenzi* ≥ 1. Je-li totiž $p \in P$, kde P je vlastní kontinuum, existuje $q \in P$ různé od p. Je-li průměr nějakého okolí $U(p)$ menší než $\rho(p, q)$, je $H(U(p)) \neq \emptyset$, takže $\dim_p P \geq 1$.

Věta 7.3. *V každém prostoru dimenze 0 existuje spočetná báze složená z obojetných množin. Je-li dáno libovolné $\varepsilon > 0$, lze bázi navíc zvolit tak, že všechny její členy mají průměry menší než ε.*

D ů k a z . Je-li $\dim P = 0$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $n \in \mathbb{N}$ okolí $U_n(p)$ tak, že $H(U_n(p)) = \emptyset$ a $\operatorname{diam} U_n(p) < \varepsilon/(n+1)$. Podle Lindelöfovy věty lze ze systému $\mathfrak{S}_n$ všech těchto okolí $U_n(p)$ vybrat spočetný systém $\mathfrak{S}_n^*$, který pokrývá P. Snadno nahlédneme, že systém $\mathfrak{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n^*$ je pak spočetnou bází prostoru P; kromě toho je $\operatorname{diam} U \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ pro každé $U \in \mathfrak{S}$.

Definice 7.2. Říkáme, že prostor $P \neq \emptyset$ je **totálně nesouvislý**, je-li každá jeho komponenta jednobodová.

Věta 7.4. *Má-li prostor P dimenzi 0, je totálně nesouvislý.*[25])

D ů k a z . Má-li prostor P dimenzi 0 a jsou-li p, q dva různé body z P, existuje okolí $U(p)$ tak, že $q \in P - \overline{U(p)}$, $H(U(p)) = \emptyset$. Kdyby existovala souvislá množina $M \subset P$ obsahující oba body p, q, musela by protínat $H(U(p))$, protože množiny $U(p)$ a $P - \overline{U(p)}$ jsou oddělené. Body p, q proto leží v různých komponentách prostoru P.

Definice 7.3 (Menger – Uryson). *Slovo* **křivka** *bude od tohoto okamžiku znamenat kontinuum dimenze* 1.

Věta 7.5 (bez důkazu).[26]) *Kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha křivek, je křivka.*

Poznámka 7.6. Důkaz tvrzení, že eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ má *algebraickou* dimenzi n, tedy že v něm existuje n-tice lineárně nezávislých vektorů, zatímco každá množina složená $n+1$ vektorů je lineárně závislá, je zcela jednoduchý. Tím spíše možná udiví, že důkaz rovnosti $\dim \mathbb{R}^n = n$ elementární není; přijmeme proto tuto skutečnost bez důkazu.

Věta 7.6 (bez důkazu).[27]) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\dim \mathbb{R}^n = n$; dimenze jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$ je rovna $n - 1$.*

Poznámka 7.7. Nechť P je křivka. Podle části 6 příkladů 7.4 je $\dim K \geq 1$ pro každé vlastní kontinuum $K \subset P$, podle věty 7.1 je naopak $\dim K \leq 1$. P má tedy vlastnost V1. Podle věty 7.5 má P i vlastnost V2, podle věty 7.6 i vlastnost V3. Oblouky mají dimenzi 1 podle části 5 v příkladech 7.4, a platí tedy V4A. V4C je důsledkem věty 7.5. Vlastnosti V4B a V4D jsou také splněny, protože v 8. kapitole (věta 8.5) dokážeme, že *každé kontinuum řídké v rovině je křivkou i podle definice* 7.3.

Definice 7.4. Vlastní kontinuum řídké v rovině se nazývá **Cantorova křivka.**

---

[24]) Pro vnitřní body intervalu je $H(M)$ dvoubodová, pro jeho hraniční body jednobodová množina.

[25]) Je-li prostor P kompaktní, platí i obrácené tvrzení (viz větu 8.14).

[26]) Důkaz viz [1], §22, I, Théoreme 1.

[27]) Důkaz viz [1], §23, II, 7 (Théoreme fondamental).

8. Rozvětvování kontinuí

Je-li P kontinuum dimenze 1, existují ke každému bodu $p \in P$ libovolně malá okolí $U(p)$, která mají hranici dimenze 0, tedy totálně nesouvislou (srov. s větou 7.4). Množina $H(U(p))$ je kompaktní, a je tedy buď konečná, nebo nekonečná spočetná, nebo má mohutnost kontinua. Body $p \in P$ lze proto klasifikovat podle toho, kolik bodů obsahují množiny $H(U(p))$. Příslušné definice vyslovíme nejen pro kontinua, ale obecněji pro separabilní metrické prostory. *Mohutnost množiny M označíme* $\operatorname{card} M$; $\aleph$ resp. $\mathfrak{c}$ bude mohutnost nekonečných spočetných množin resp. mohutnost kontinua.

Úmluva. K množině všech celých nezáporných čísel a právě uvedených dvou mohutností přidáme ještě ordinální číslo ω a vzniklou množinu

(1)
$$\mathfrak{C} := \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq 0\} \cup \{\omega, \aleph, \mathfrak{c}\}$$

uspořádáme takto: v oboru celých čísel ponecháme obvyklé uspořádání, za nimi bude následovat ω, pak $\aleph$, a nakonec $\mathfrak{c}$.

Definice 8.1.. Nechť P je separabilní metrický prostor a nechť $p \in P$.

1. Je-li n celé nezáporné číslo, budeme psát $\operatorname{ord}_p P \leq n$, existují-li libovolně malá okolí $U(p)$ tak, že $\operatorname{card} H(U(p)) \leq n$. Je-li $\operatorname{ord}_p P \leq n$, ale není $\operatorname{ord}_p P \leq n-1$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = n$.

2. Budeme psát $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, existují-li libovolně malá okolí $U(p)$, jejichž hranice obsahuje jen konečný počet bod; je-li $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, ale není $\operatorname{ord}_p P = n$ pro žádné celé číslo $n \geq 0$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = \omega$.

3. Existují-li libovolně malá okolí $U(p)$ tak, že $\operatorname{card} H(U(p)) = \aleph$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$. Je-li $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$, ale není $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = \aleph$.

4. Není-li $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$, budeme psát $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$.

5. Je-li $m \in \mathfrak{C}$ a $\operatorname{ord}_p P \leq m$ pro každé $p \in P$, budeme psát $\operatorname{ord} P \leq m$; je-li $\operatorname{ord} P \leq m$ a není-li $\operatorname{ord} P \leq m'$ pro žádné $m' \in \mathfrak{C}$, $m' < m$, budeme psát $\operatorname{ord} P = m$.

6. Číslo $\operatorname{ord}_p P$ (resp. $\operatorname{ord} P$) se nazývá **řád rozvětvení prostoru P v bodě p** (resp. **řád rozvětvení prostoru P**).

Poznámka 8.1. Pojem řádu rozvětvení je topologický. Je-li P kompaktní prostor, je $\operatorname{ord}_p P$ některé z čísel z $\mathfrak{C}$. Rovnost $\operatorname{ord}_p P = 0$ je ekvivalentní s rovností $\dim_p P = 0$, tedy s podmínkou, že existují libovolně malá okolí $U(p)$ s prázdnou hranicí.

Poznámka 8.2. Rovnost $\operatorname{ord}_p P = \omega$ znamená, že existují okolí $U_n(p)$, jejichž průměr je menší než $1/n$ a jejichž hranice obsahují jen konečný počtu s_n bodů, přičemž množina $\{s_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ není omezená. [28])

Tento řád rozvětvení má např. počátek v kontinuu, které je sjednocením úseček spojujících počátek s body $(\cos(1/n)/n, \sin(1/n)/n)$, $n \in \mathbb{N}$, jejichž vzdálenost od počátku konverguje k nule. (Srov. s kontinuem na obr. 15 vlevo.)

Definice 8.2. Body $p \in P$, v nichž je

(2)
$$\operatorname{ord}_p P \begin{Bmatrix} = 1 \\ = 2 \\ > 2 \\ \leq \omega \\ \leq \aleph \\ > \aleph \end{Bmatrix}, \quad \text{se nazývají} \quad \begin{Bmatrix} \textbf{krajní body} \\ \textbf{obyčejné body} \\ \textbf{body rozvětvení} \\ \textbf{regulární body} \\ \textbf{racionální body} \\ \textbf{iracionální body} \end{Bmatrix} \quad \text{prostoru } P.$$

Prostor, který má jen regulární (resp. racionální) body, se nazývá **regulární** (resp. **racionální**). V opačném případě se nazývá **iregulární** (resp. **iracionální**). [29])

Příklady 8.1. 1. Oblouk ab má dva krajní body a, b, ostatní body jsou obyčejné.

---

[28]) Velmi zhruba řečeno: Jak okolí $U_n(p)$ zmenšujeme, počet bodů množiny $H(U_n(p))$ roste nade všechny meze.

[29]) Všechny tyto pojmy jsou topologické. V topologické literatuře se zpravidla neříká „krajní bod“, ale „koncový bod“; název „krajní bod“ je však v souladu s terminologií užívanou pro intervaly a obecněji pro uspořádané množiny, u nichž musíme rozlišovat mezi počátečním a koncovým bodem.

2. Kružnice má jen obyčejné body.

3. Pro kontinuum P, které je sjednocením (konečného počtu) n úseček $a_k b_k$ majících společný jen krajní bod $a_1 = \ldots, a_n$, má tento bod řád rozvětvení rovný n; body b_n jsou krajní body kontinua P, ostatní jeho body jsou obyčejné.

4. Jak jsme již řekli, pro kontinuum P, které je sjednocením (nekonečně mnoha) úseček $a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, které mají společný jen krajní bod $a = a_1 = a_2 = \ldots$ a jejichž topologická limita je jednobodová (takže jejich průměry konvergují k nule), je a bodem rozvětvení řádu ω; body b_n jsou krajní, ostatní body kontinua P jsou obyčejné.

5. Sjednocení posloupnosti úseček L_n s krajními body $(0,0)$ a $(1,1/n)$ s úsečkou L s krajními body $(0,0)$ a $(1,0)$ je kontinuum, které má v každém bodě $x \in L$ řád rozvětvení $\aleph$. (Srov. s obr. 15 vpravo.)

6. Je-li P sjednocení úseček spojujících bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se všemi body Cantorova diskontinua, je $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$ pro každé $p \in P$. (Srov. s obr. 11.)

7. Je-li P uzávěr grafu funkce $\sin(1/x)$, kde $x \neq 0$, je $\operatorname{ord}_p P = \aleph$ pro každé $p \in \langle (0,-1); (0,1) \rangle$; ostatní body jsou obyčejné. [30])

8. Je-li P_1 kontinuum z příkladu 4.6, je jistě zřejmé, že řád rozvětvení každého bodu $p \in P_1$ ležícího v otevřené horní polorovině je jedno z čísel 1, 2, 3. Bod $p = (p_1, 0) \in P_1$ má řád rozvětvení 3, je-li p_1 dyadicky racionální číslo z intervalu $(0,1)$; pro ostatní body na ose x je $\operatorname{ord}_x P = 2$. V kontinuum P_2 z téhož příkladu přibudou ještě body s řádem rozvětvení 4. Body kontinua $P = P_1 \cup P_2$ ležící na ose x mají řád rozvětvení $\aleph$.

9. **Trojúhelníkové kontinuum Sierpińského** je definováno takto: Nechť T je uzavřený rovnostranný trojúhelník s vrcholy a, b, c. Rozdělme jej spojnicemi středů stran na čtyři trojúhelníky a vnitřek toho z nich, který neobsahuje žádný vrchol trojúhelníku T, odstraňme; zbudou tři uzavřené trojúhelníky $T(i_1)$, $0 \leq i_1 \leq 2$. Rozdělme každý trojúhelník $T(i_1)$ spojnicemi středů stran na čtyři trojúhelníky a vnitřek toho z nich, který neobsahuje žádný vrchol trojúhelníku $T(i_1)$, odstraňme; pro každé i_1 zbudou tři trojúhelníky $T(i_1, i_2)$, $0 \leq i_2 \leq 2$. Pokračujeme-li takto do nekonečna, získáme v n-tém kroku 3^n uzavřených (rovnostranných) trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$, kde $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1,2\}^n$; označíme-li T^n jejich sjednocení, je $\{T^n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost kontinuí. Jejich průnik

$$P := \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{0,1,2\}^n} T(i_1, \ldots, i_n) \tag{3}$$

je Sierpińského trojúhelníkové kontinuum (jinak též **Sierpińského trojúhelníková křivka**). Je zřejmé, že je to kontinuum řídké v rovině, tedy *Cantorova křivka*.

Ve vrcholech trojúhelníku T má P řád rozvětvení 2, ve vrcholech každého z vynechaných trojúhelníků řád 4, v ostatních bodech řád 3.

Poznamenejme, že každé posloupnosti $\{i_n\}$, kde $0 \leq i_n \leq 2$, odpovídá právě jeden bod Sierpińského křivky; je to jediný bod průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T(i_1, \ldots, i_n). \tag{4}$$

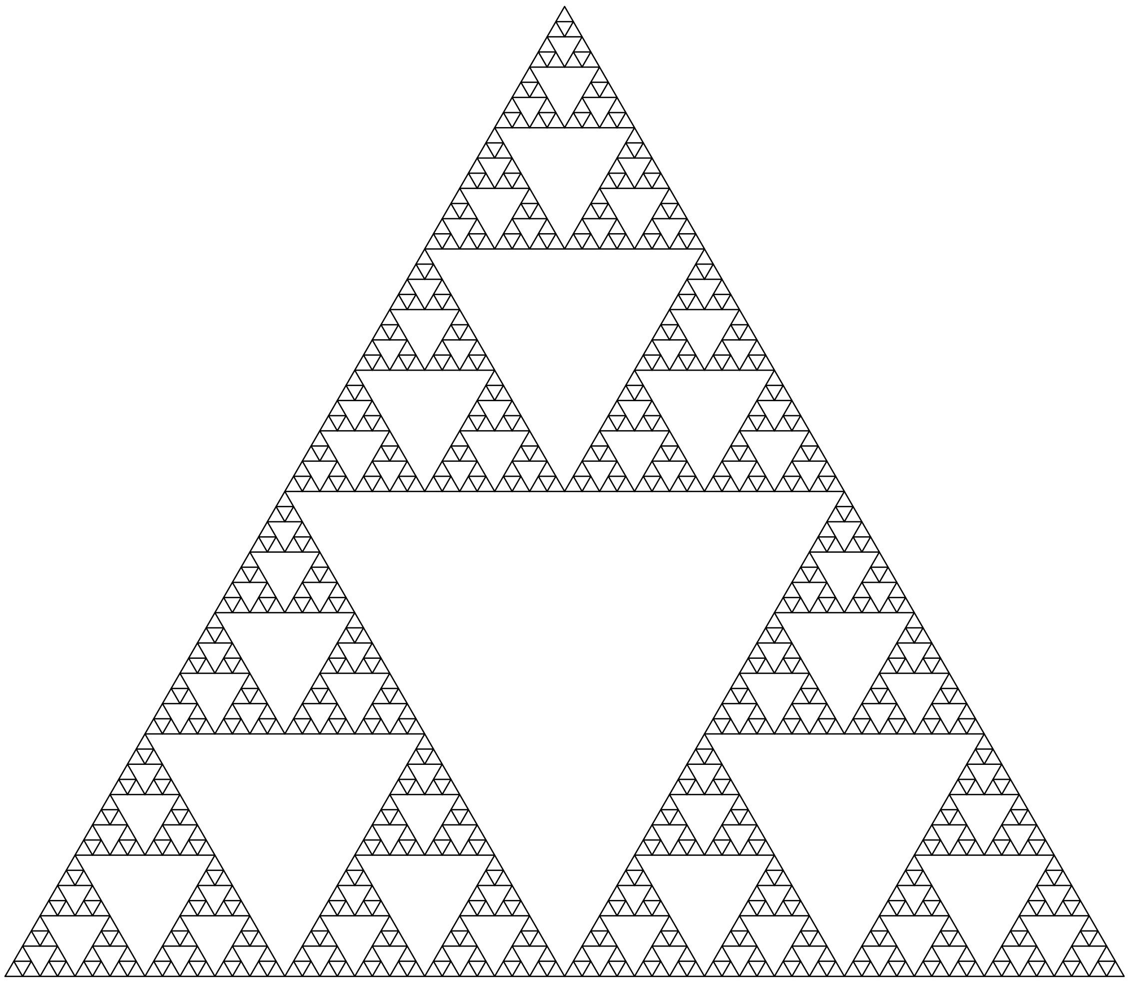
Analogicky jako má Cantorovo diskontinuum body 1. a 2. druhu, obsahuje Sierpińského křivka nejen hranice všech trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$, ale nespočetně mnoho dalších bodů. Hranice trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$ jsou (spolu s $H(T)$) nakresleny na obr.19 pro $n = 1, \ldots, 5$.

Sierpińského křivku P obsaženou v rovině xy můžeme vhodným homeomorfním zobrazením přemístit na sféru tak, aby obrazy A, B, C ležely na rovníku a obrazy ostatních bodů v otevřené horní polosféře. Znamená-li P^* obraz kontinua P při takovéto transformaci a je-li P^{**} množina symetrická s P^* vzhledem k rovníkové rovině, má kontinuum $P^* \cup P^{**}$ v bodech A, B, C řád 4. *Každý bod tohoto kontinua má tedy řád rozvětvení* 3 *nebo* 4*; neleží v něm žádné obyčejné body* (*a samozřejmě ani žádné krajní body*).

Cvičení. *Najděte spojité zobrazení f intervalu $\langle 0,1 \rangle$ na Sierpińského trojúhelníkovou křivku.* (Tím bude zároveň dokázáno, že toto kontinuum je lokálně souvislé).

---

[30]) P v tomto případě není kontinuum, protože jde o neomezenou množinu.



Obr. 19. Vytváření Sierpińského trojúhelníkové křivky

N á v o d : Umluvme se, že označení trojúhelníků $T(i)$ je zvoleno tak, že $T(0)$ leží v T vlevo dole, $T(1)$ nahoře, $T(2)$ vpravo dole. Podobně postupujme pro obecné n: Hodnotám $i_{n+1} = 0, 1, 2$ nechť v trojúhelníku $T(i_1, \ldots, i_n)$ odpovídá po řadě trojúhelník $T(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$ ležící vlevo dole, nahoře, vpravo dole.

Řetěz $T(0), T(1), T(2)$ má tu vlastnost, že jeho první člen $T(0)$ obsahuje bod $(0, 0)$, poslední člen $T(2)$ bod $(1, 0)$. Podobnou vlastnost má i řetěz

$$T(0,0),\ T(0,2),\ T(0,1),\ T(1,0),\ T(1,1),\ T(1,2),\ T(3,1),\ T(3,0),\ T(3,2)$$

a čtenář jistě najde algoritmus, jak podobný řetěz sestavit z trojúhelníků $T(i_1, \ldots, i_n)$ pro obecné n.

Rozdělme interval $\langle 0, 1\rangle$ na tři stejně dlouhé intervaly $I(0) = \langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, $I(1) = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$, $I(2) = \langle \frac{2}{3}, 1\rangle$. Jsou-li již sestrojeny intervaly $I(i_1, \ldots, i_n$, kde $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1, 2\}^n$, rozdělme každý z nich na tři stejně dlouhé uzavřené intervaly $I(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$, a to tak, že číslu $i_{n+1} = 0, 1, 2$ odpovídá po řadě levý, prostřední a pravý interval.

Pro každou posloupnost $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $i_n \in \{0, 1, 2\}$ pro každé n, je průnik

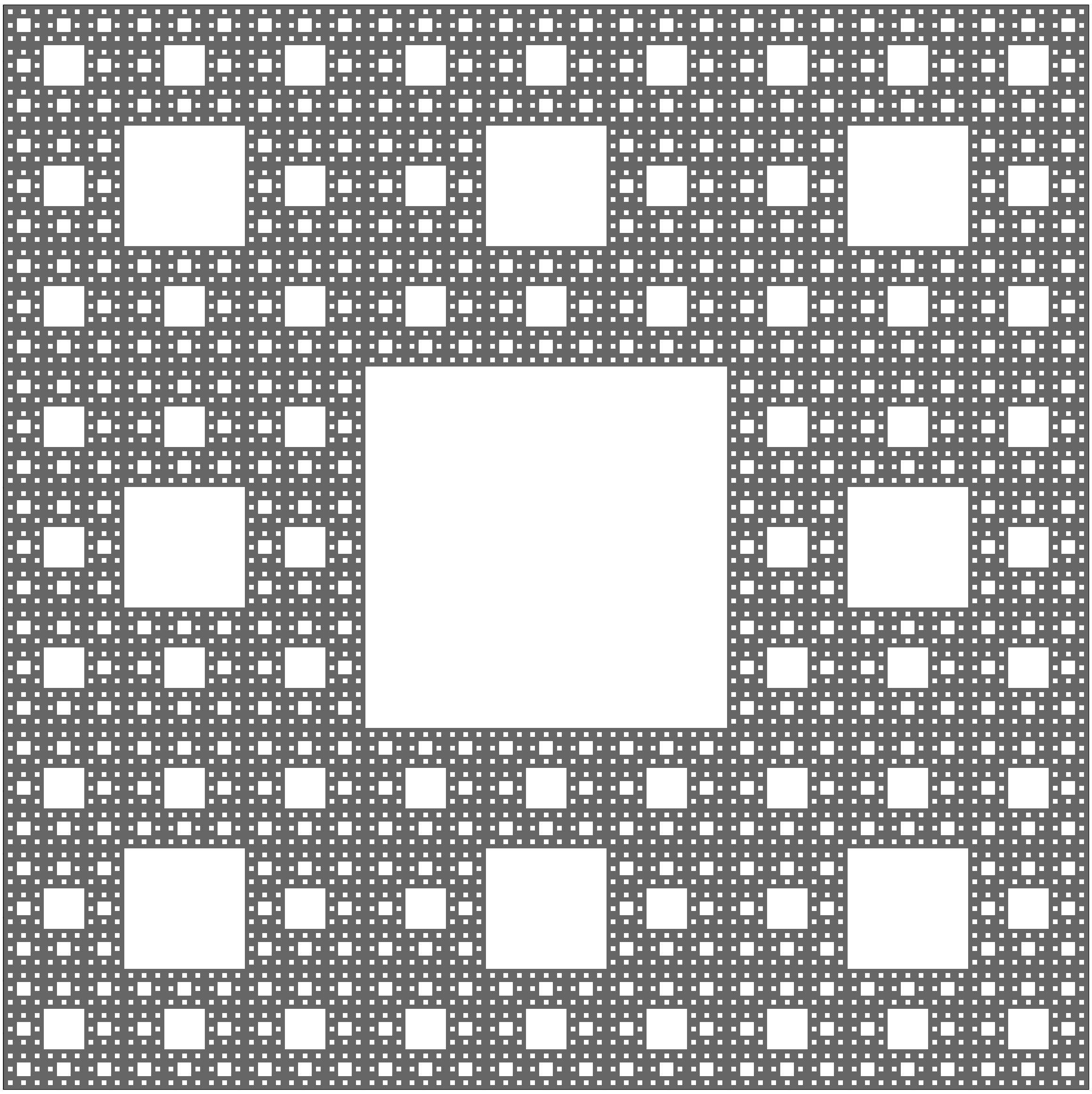
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(i_1, \ldots, i_n) \tag{5}$$

jednobodový; příslušný bod označme $x(\{i_n\})$ a definujme $f(x(\{i_n\}))$ jako jediný bod průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T(i_1, \ldots, i_n). \tag{6}$$

Snadno se nahlédne, že definice je korektní, takže definuje jisté zobrazení $f : \langle 0,1\rangle \to_{\text{na}} P$; ani důkaz spojitosti této funkce není obtížný.

Cvičení. Pro každý bod $p \in P$ různý od vrcholů a, b, c trojúhelníka T najděte oblouky ap, bp a cp obsažené v P, jejichž jediným společným bodem je p.



Obr. 20. Vytváření Sierpińského koberce

10. **Univerzální Sierpińského křivka** (nebo též **Sierpińského koberec**) se zkonstruuje takto: Jednotkový čtverec $Q := \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ rozdělíme úsečkami rovnoběžnými s jeho stranami na devět shodných čtverců a vnitřek prostředního čtverce vynecháme; tím získáme 8 shodných čtverců $Q(i_1)$, $0 \le i_1 \le 7$. Analogickou operací provedenou s každým čtvercem $Q(i_1)$ získáme 8^2 čtverců $Q(i_1, i_2) \subset Q(i_1)$, $0 \le i_2 \le 7$, atd. do nekonečna. Označíme-li

$$Q^n := \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,\dots,7\}^n} Q(i_1, i_2, \dots, i_n) \tag{7}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$, je univerzální křivka definována jako průnik všech Q^n:

$$Q^\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^n \,. \tag{8}$$

(Viz obr. 20, kde je nakreslen průnik $Q^1 \cap \ldots \cap Q^5$).

Je zřejmé, že je to kontinuum řídké v rovině, tedy Cantorova křivka; platí přitom dvě důležitá tvrzení, z nichž dokážeme pouze druhé:

1. *Každou Cantorovu křivku lze homeomorfně zobrazit do Q^∞.* [31])

2. *Řád rozvětvení množiny Q^∞ je roven $\mathfrak{c}$ v každém bodě $p \in Q^\infty$.* [32])

D ů k a z . Pro stručnost pišme $P := Q^\infty$ a P pak považujme za samostatný prostor.[33]) Kdyby existoval bod $p \in P$ tak, že $\operatorname{ord}_p < \mathfrak{c}$, měl by libovolně malá okolí $U(p)$ se spočetnou hranicí. Protože hranice je uzavřená množina, která roztíná P mezi vnitřkem a vnějškem příslušné množiny, stačí ukázat, že *pro každou uzavřenou spočetnou množinu $A \subset P$ je množina $P - A$ souvislá.* Předpokládejme, že

$$P - A = G_1 \cup G_2 \,, \text{ kde } G_1, G_2 \text{ jsou disjunktní otevřené množiny;} \tag{9}$$

máme dokázat, že jedna z množin G_i je prázdná.

Označme

$$B(x) := \{(x, y);\ y \in \langle 0, 1\rangle\}\,, \quad C(y) := \{(x, y);\ x \in \langle 0, 1\rangle\} \tag{10}$$

a buď

$$X := \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ B(x) \subset P - A\}\,, \quad Y := \{y \in \langle 0, 1\rangle;\ C(y) \subset P - A\}\,. \tag{11}$$

Zvolme na okamžik pevně nějaký bod $x_0 \in X$. Pak je $B(x_0) \cap A = \emptyset$, a protože $B(x_0)$ je souvislá část množiny $P - A$, leží celá buď v G_1, nebo v G_2. Předpokládejme, že označení bylo zvoleno tak, že $B(x_0) \subset G_1$. Každá úsečka $C(y)$, kde $y \in Y$, leží také buď v G_1, nebo v G_2; protože protíná úsečku $B(x_0)$, a tedy i množinu G_1, je $C(y) \subset G_1$ pro všechna $y \in Y$. Každá úsečka $B(x)$, $x \in X$, protíná každou úsečku $C(y)$, $y \in Y$, a leží tedy z podobných důvodů také v G_1. Tím je dokázáno, že

$$Z := \bigcup_{x \in X} B(x) \cup \bigcup_{y \in Y} C(y) \subset G_1 \,. \tag{12}$$

Protože množina A je spočetná, je množina Z hustá v P, takže $P = \overline{Z} \subset \overline{G_1} \subset P - G_2$. Množina G_2 je tedy prázdná.

Cvičení. Podobně jako v případě Sierpińského trojúhelníkové křivky zkonstruujte *spojité zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na Sierpińského univerzální křivku.* $\square$

11. *Je-li P nerozložitelné kontinuum, je $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$ pro každé $p \in P$.*

D ů k a z . Je-li $U(p)$ okolí, pro něž je $P - \overline{U(p)} \neq \emptyset$, protíná každá kompozanta K prostoru p jak $U(p)$, tak i $P - \overline{U(p)}$, neboť je (podle věty 6.8) hustá v P. V důsledku toho je i $K \cap H(U(p)) \neq \emptyset$. Protože v P existuje nespočetně mnoho disjunktních kompozant (viz větu 6.11), je množina $H(U(p))$ nespočetná, a má tedy mohutnost $\mathfrak{c}$.

12. Nechť P je kontinuum složené z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ osy x a půlkružnic

$$\Big(x - \frac{2m-1}{2^n}\Big)^2 + y^2 = \frac{1}{4^n}\,,\ y \geq 0\,, \tag{13}$$

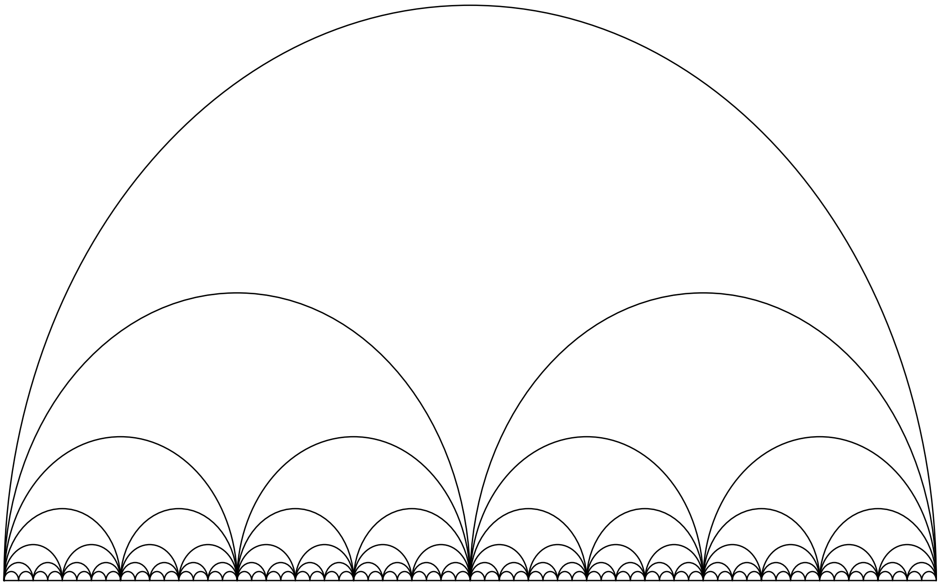
kde $n \in \mathbb{N}$ a $1 \leq m \leq 2^{n-1}$. Pak je $\operatorname{ord}_p P = \omega$, je-li $p = (r, 0)$, kde $r \in \langle 0, 1\rangle$ je dyadicky racionální, a $\operatorname{ord}_p P = 2$ pro ostatní body $p \in P$. (Viz obr. 21.)

---

[31]) Proto se této Sierpińského křivce říká *univerzální*. Konstrukci univerzální křivky spolu s důkazem uvedeného tvrzení uveřejnil Sierpiński v článku v Comptes Rendus, Paris, 162 (1916), str. 629.

[32]) Viz Uryson: O Kantorovych mnogoobrazijach, část II, kap. I, §4, příklad 11.

[33]) To znamená, že slovy okolí, hranice atd. rozumíme okolí, hranice atd. v P.



Obr. 21. Vytváření křivky z příkladů 8.1, část 12

13. Kontinuum P nechť se skládá z úsečky $V_0 := \langle (0,0);(1,0) \rangle$ na ose x, ze svislých úseček $S(n,k)$ a z vodorovných úseček $V(n,k)$, kde

$$S(n,k) := \Big\langle \Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\Big); \Big(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\Big\rangle, \quad V(n,k) := \Big\langle \Big(\frac{4k+1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big); \Big(\frac{4k+3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\Big\rangle \tag{14}$$

a kde $n \geq 0$, $0 \leq k < 2^n$. (Viz obr. 22.) Funkce $\operatorname{ord}_p P$ nabývá těchto hodnot:

$$\operatorname{ord}_p P = \begin{cases} 2, \text{ je-li buď } p = (0,0), \text{ nebo } p = (1,0), \\ 4, \text{ je-li } p = (x,0), \text{ kde } x \in (0,1) \text{ je dyadicky racionální číslo,} \\ 3, \text{ je-li } p = (x,0), \text{ kde } x \in (0,1) \text{ není dyadicky racionální číslo;} \\ 3, \text{ je-li } p \text{ průsečík } S(n,j) \text{ s } V(n,k), \\ 2 \text{ v ostatních bodech množiny } P - V_0. \end{cases} \tag{15}$$

14. *Každé racionální vlastní kontinuum je křivka,* protože každá neprázdná spočetná množina má dimenzi 0.

* * *

Definice 8.3. Je-li $\mathfrak{S} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nějaký neprázdný systém otevřených množin prostoru P budeme říkat, že $p \in P$ je $\mathfrak{S}$-**regulární bod**, existují-li libovolně malá okolí $G_\alpha \in \mathfrak{S}$ bodu p. V opačném případě se bod p nazývá $\mathfrak{S}$-**iregulární**.

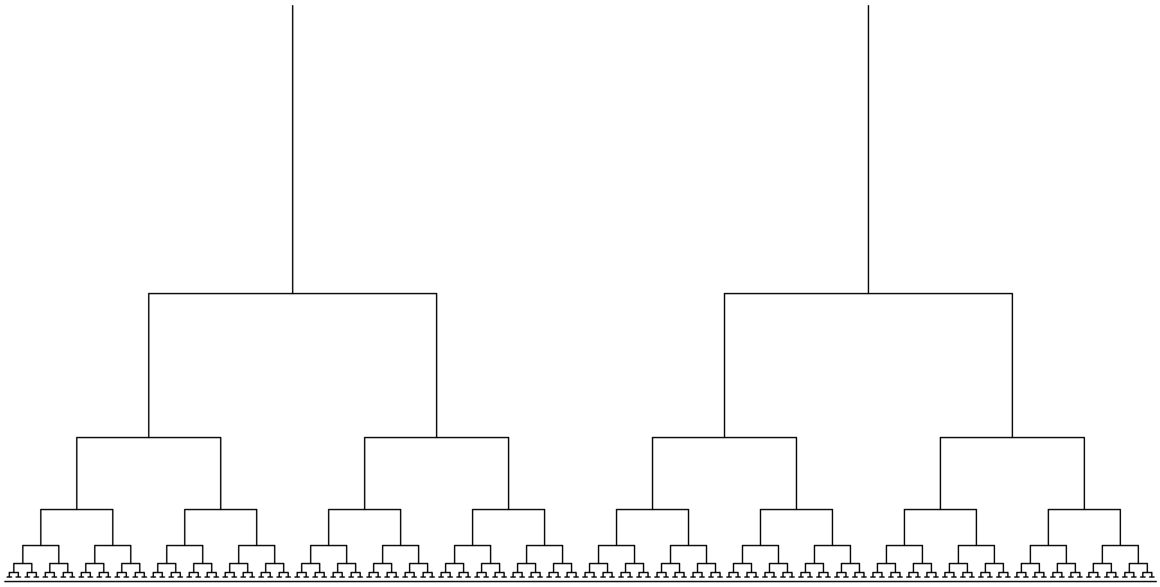
Příklady 8.2 1. Je-li $\mathfrak{S}$ systém všech obojetných podmnožin prostoru P, jsou $\mathfrak{S}$-regulárními body právě všechny body $p \in P$, v nichž je $\dim_p P = 0$.

2. Je-li $\mathfrak{S}$ systém všech otevřených podmnožin prostoru P, které mají konečnou hranici, jsou $\mathfrak{S}$-regulární právě všechny body $p \in P$, v nichž je $\operatorname{ord}_p P \leq \omega$, neboli právě všechny body, v nichž je P regulární podle definice 8.2.

Věta 8.1. *Množina všech $\mathfrak{S}$-regulárních bodů je typu G_δ, množina všech $\mathfrak{S}$-iregulárních bodů typu F_σ.*

D ů k a z . Je-li M množina všech $\mathfrak{S}$-regulárních bodů, existují pro každé $x \in M$ množiny $G_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že

$$x \in G_n(x) \in \mathfrak{S}, \quad \operatorname{diam} G_n(x) < \frac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$



Obr. 22. Vytváření křivky z příkladů 8.1, část 13

Snadno nahlédneme, že

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x \in M} G_n(x);$$

vpravo je přitom množina typu G_δ. Množina $P - M$ všech $\mathfrak{S}$-iregulárních bodů je proto typu F_σ.

Věta 8.2. *Nechť P je kompaktní prostor a systém $\mathfrak{S}$ otevřených množin $G \subset P$ nechť má tyto vlastnosti:*

A. *Je-li $G \in \mathfrak{S}$ a je-li G_1 otevřená množina, pro niž je $H(G_1) \subset H(G)$, je i $G_1 \in \mathfrak{S}$.*

B. *Je-li $G_1 \in \mathfrak{S}$, $G_2 \in \mathfrak{S}$, je i $G_1 \cup G_2 \in \mathfrak{S}$.*

Potom je každý $\mathfrak{S}$-iregulární bod $p \in P$ obsažen ve vlastním kontinuu K_p, které obsahuje pouze $\mathfrak{S}$-iregulární body.

D ů k a z . Je-li $p \in P$, označme

$$K_p = \{x \in P;\ x \in G \in \mathfrak{S} \ \Rightarrow\ p \in \overline{G}\} \tag{17}$$

a dokažme tato tvrzení:

1. $K_p = p \ \Rightarrow\ p$ je $\mathfrak{S}$-regulární bod.
2. $p \neq q \in K_p \ \Rightarrow\ q$ je $\mathfrak{S}$-iregulární bod.
3. K_p je uzavřená množina.
4. K_p je souvislá množina.

Z nich ihned plyne tvrzení věty, protože K_p je (pro každý bod $p \in P$) množina obsahující bod p; podle tvrzení 3 a 4 je to kontinuum, které je pro každý $\mathfrak{S}$-iregulární bod vlastní podle tvrzení 1.

Ad 1. Nechť $K_p = p$ a nechť U je libovolné okolí bodu p. Protože $K_p = p$, neleží žádný bod $x \in H(U)$ v K_p a lze mu proto přiřadit okolí $G(x) \in \mathfrak{S}$, pro něž je $p \notin \overline{G(x)}$. Protože $H(U)$ je kompaktní množina, lze ze systému těchto okolí vybrat konečnou posloupnost $G_1, \dots, G_s$ tak, že $H(U) \subset G := \bigcup_{i=1}^{s} G_i$. Uzávěr množiny G přitom neobsahuje bod p a podle předpokladu B je $G \in \mathfrak{S}$.

Je-li $V = U - \overline{G}$, je $p \in V$ a

$$H(V) = H(U \cap \operatorname{Ext} G) \subset (H(U) \cap \overline{\operatorname{Ext} G)}) \cup (\overline{U} \cap H(\operatorname{Ext} G)) \subset H(G),$$

protože $H(U) \cap \overline{\operatorname{Ext} G} \subset G \cap \overline{\operatorname{Ext} G} = \emptyset$ a $H(\operatorname{Ext} G) \subset H(G)$; podle předpokladu A je tedy $V \in \mathfrak{S}$.

Dokázali jsme tedy, že pro každé okolí U bodu p existuje okolí $V \subset U$ tohoto bodu tak, že $V \in \mathfrak{S}$; bod p je tedy $\mathfrak{S}$-regulární.

Ad 2. Nechť $p \neq q \in K_p$; kdyby bod q byl $\mathfrak{S}$-regulární, existovalo by okolí $U(q) \in \mathfrak{S}$ tak, že $p \notin \overline{U(q)}$. To však odporuje definici (17) množiny K_p.

Ad 3. Nechť $x_n \in K_p$ (pro každé $n \in \mathbb{N}$), $x_n \to x$ a nechť $G \in \mathfrak{S}$ je nějaké okolí bodu x; pak je G také okolím některého z bodů x_n, a odtud plyne, že $p \in \overline{G}$. Je tedy $x \in K_p$.

Ad 4. Předpokládejme, že $K_p = F_1 \cup F_2$, kde F_1, F_2 jsou kompaktní, disjunktní množiny, přičemž $p \in F_1$; dokažme, že $F_2 = \emptyset$.

Z normality prostoru P plyne existence otevřené množiny $U \supset F_2$, pro niž je $\overline{U} \cap F_1 = \emptyset$. Odtud plyne, že

$$H(U) \cap K_p = H(U) \cap (F_1 \cup F_2) = (H(U) \cap F_1) \cup (H(U) \cap F_2) = \emptyset,$$

takže stejně jako v důkazu tvrzení 1 existuje otevřená množina $G \in \mathfrak{S}$, pro niž je $H(U) \subset G$, $p \notin \overline{G}$.

Označíme-li $W = U \cup G$, je $H(W) \subset H(U) \cup H(G)$. Protože $\overline{U} = U \cup H(U) \subset U \cup G = W$, je $H(W) \cap H(U) = \emptyset$, takže $H(W) \subset H(G)$. Podle předpokladu A odtud plyne, že $W \in \mathfrak{S}$. Protože $\overline{W} = \overline{U} \cup \overline{G}$ neobsahuje bod p, je $K_p \cap W = \emptyset$, a tím spíše je $F_2 \cap W = \emptyset$. Protože však $F_2 \subset U \subset W$, je $F_2 = \emptyset$, jak jsme měli dokázat.

Označení. Pro každý prostor P a každé $n \in \mathfrak{C}$ označme

$$P^{[n]} = \{x \in P;\ \operatorname{ord}_p P \leq n\}. \quad \square \tag{18}$$

Z předcházejících dvou vět plyne toto závažné tvrzení:

Věta 8.3. *Je-li P kompaktní prostor, platí tato dvě tvrzení:*

1. *Všechny množiny $P^{[n]}$, kde $n \in \mathfrak{C}$, jsou typu G_δ, zatímco množiny $P - P^{[n]}$ jsou typu F_σ. Speciálně: Je-li P kontinuum, je množina $P^{[1]}$ všech jeho krajních bodů typu G_δ.*

2. *Každý iregulární (resp. iracionální) bod $p \in P$ leží v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$, jehož všechny body jsou iregulární (resp. iracionální).*

Důkaz. 1. Je-li $n \neq \omega$, definujme $\mathfrak{S}$ jako systém všech otevřených množin $G \subset P$, pro něž je $\operatorname{card} H(G) \leq n$; je-li $n = \omega$, nechť $\mathfrak{S}$ znamená systém všech otevřených množin $G \subset P$, jejichž hranice je konečná. V obou případech jsou pak $\mathfrak{S}$-regulární body právě všechny body z $P^{[n]}$. Podle věty 8.1 je tato množiny typu G_δ, takže její doplněk je typu F_σ.

Je-li P nevlastní kontinuum, je tvrzení o krajních bodech triviální; je-li P vlastní kontinuum, je $P^{[0]} = \emptyset$ a $P^{[1]}$ je množina všech jeho krajních bodů.

2. Definujme $\mathfrak{S}$ jako systém všech otevřených množin $G \subset P$, které mají konečné (resp. spočetné) hranice. Snadno se ukáže, že $\mathfrak{S}$ má vlastnosti A, B z věty 8.2, a $\mathfrak{S}$-iregulární jsou právě všechny iregulární (resp. iracionální) body. Stačí tedy aplikovat větu 8.2.

Věta 8.4. *Každý kompaktní totálně nesouvislý prostor P má dimenzi* 0.

Důkaz. Buď $\mathfrak{S}$ systém všech obojetných množin prostoru P. Uvažme, že $\mathfrak{S}$-regulární jsou právě ty body $p \in P$, v nichž je $\dim_p P = 0$, a aplikujme větu 8.2. Kdyby v P existoval nějaký $\mathfrak{S}$-iregulární bod, ležel by podle věty 8.3 v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$ (obsahujícím jen $\mathfrak{S}$-iregulární body); protože v totálně nesouvislém kompaktním prostoru P žádná vlastní kontinua neexistují, jsou všechny jeho body $\mathfrak{S}$-regulární. Je tedy $\dim_p P = 0$ pro každé $p \in P$, tj. $\dim P = 0$.

Protože v P neexistují žádná vlastní kontinua, je $\mathfrak{S}$-regulární každý bod $p \in P$.

Věta 8.5. *Vlastní kontinuum $P \subset \mathbb{R}^2$ je Cantorovou křivkou, právě když má dimenzi* 1.

Důkaz. 1. Není-li P řídké v rovině, obsahuje nějaký kruh, a má tedy dimenzi 2 (podle věty 7.6, protože otevřené kruhy jsou homeomorfní s rovinou).

2. Obráceně: Je-li $\dim P = 2$, existuje $p \in P$ tak, že $\dim_p P = 2$; lze jistě předpokládat, že $p = (0,0)$. Nechť K_r znamená kružnici o středu p a poloměru $r > 0$. Z podmínky $\dim_p P = 2$ plyne existence takového $R > 0$, že

$$0 < r \leq 2R \Rightarrow H(U(p,r)) = K_r \cap P \text{ má dimenzi } 1; \tag{19}$$

množina $K_r \cap P$ není tedy totálně nesouvislá, a podle věty 8.4 obsahuje nějaké vlastní kontinuum, tedy nějaký (kruhový) oblouk. Nechť je to oblouk

$$N(r;\varphi_1,\varphi_2) := \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi);\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}. \tag{20}$$

Označíme-li ještě

$$M(\varphi_1,\varphi_2) := \{r \in \langle R, 2R\rangle;\ N(r;\varphi_1,\varphi_2) \subset K_r \cap P\}, \tag{21}$$

je

$$\langle R, 2R\rangle = \bigcup_{\substack{\varphi_1<\varphi_2\\ \varphi_1,\varphi_2 \text{ jsou racionální}}} M(\varphi_1,\varphi_2). \tag{22}$$

Protože $\langle R, 2R\rangle$ je množina druhé kategorie, nejsou všechny množiny $M(\varphi_1,\varphi_2)$ řídké; protože jsou uzavřené, obsahuje některá z nich nějaký interval $\langle r_1, r_2\rangle \subset \langle R, 2R\rangle$. Potom je příslušná množina $\langle r_1, r_2\rangle \times \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle$ částí P, a kontinuum P tedy není v rovině řídké.

Věta 8.6. *Je-li P kontinuum ireducibilní mezi body p, q, je $\operatorname{ord}_x P > 1$ pro každý bod $x \in P$ různý od bodů p, q.*

D ů k a z . Předpokládejme, že existuje bod $x \in P$ různý od bodů p, q, pro něž je $\operatorname{ord}_x P = 1$. Takový bod má okolí $U = U(x)$, pro něž je $(p \cup q) \cap U = \emptyset$, přičemž $H(U) = y$ je jednobodová množina. Pak je $P - y = U \cup (P - \overline{U})$, kde množiny vpravo jsou oddělené. Podle věty 2.2 je $P - U$ kontinuum obsahující oba body p, q a různé od P, takže P není ireducibilní mezi p a q.

Věta 8.7. *Je-li P kontinuum, je množina $P - P^{[1]}$ semikontinuum, a totéž platí o každé množině $P - M$, kde $M \subset P^{[1]}$. Množina $P^{[1]}$ má dimenzi ≤ 0, množina $P - P^{[1]}$ je hustá v P.*

D ů k a z . Nechť body p, q leží v množině $P - M$, kde $M \subset P^{[1]}$. Podle věty 6.2 existuje kontinuum $C \subset P$ ireducibilní mezi body p, q, podle věty 4.2 je $\operatorname{ord}_x C > 1$ pro každé $x \in C - (p \cup q)$, a tím spíše je pak $\operatorname{ord}_x P > 1$, takže $x \in P - M$. Je tedy $C \subset P - M$; $P - M$ je semikontinuum, protože pro každé dva body p, q v $P - M$ existuje kontinuum $C \subset P - M$, které je obsahuje.

Každý bod $x \in P^{[1]}$ má okolí U_n, jejichž průměr konverguje k nule a jejichž hranice $H(U_n) = \{z_n\}$ je jednobodová množina; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{U_n} \neq P$. Zvolme nějaké $y_n \in P - \overline{U_n}$ a $C_n \subset P$ nechť je kontinuum ireducibilní mezi body x, y_n. Pak je $H(U(x)) \cap C_n \neq \emptyset$, tj. $z_n \in C_n$; podle věty 8.6 je $\operatorname{ord}_{z_n} C_n > 1$, tedy i $\operatorname{ord}_{z_n} P > 1$. Žádné z_n neleží tedy v $P^{[1]}$, tj. $H(U_n) \cap P^{[1]} = \emptyset$ pro každé n. Bod $x \in P^{[1]}$ má tedy libovolně malá okolí U_n, jejichž hranice neprotíná $P^{[1]}$; to znamená, že $\dim_x P^{[1]} \le 0$. Protože tato nerovnost platí pro každý bod $x \in P^{[1]}$, je $\dim P^{[1]} \le 0$, jak jsme měli dokázat.

Protože pro každý bod $x \in P^{[1]}$ mají průměry příslušných okolí U_n limitu 0, je bod limitou posloupnosti příslušných bodů $z_n \in P - P^{[1]}$; množina $P - P^{[1]}$ je tedy hustá v P.

Poznámka 8.3. Jak ukazuje následující příklad, *existují rovinné křivky, pro něž je i množina $P^{[1]}$ hustá v P.* Vzhledem k tomu, že podle věty 8.3 je množina $P^{[1]}$ typu G_δ, je pak druhé kategorie (v P), takže množina $P - P^{[1]}$ je první kategorie.[33]) V smyslu kategorií je tedy množina všech krajních bodů takové křivky P „daleko robustnější“ než množina všech ostatních bodů z P.

Příklad 8.3. Definujme nejdříve „operaci I“, která k dané úsečce vytvoří jistý nekonečný systém úseček na ní kolmých. Je-li dána úsečka $C = \langle a; b\rangle \subset \mathbb{R}^2$, kde $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, označme

$$ab := (a_2 - b_2, b_1 - a_1) \tag{23}$$

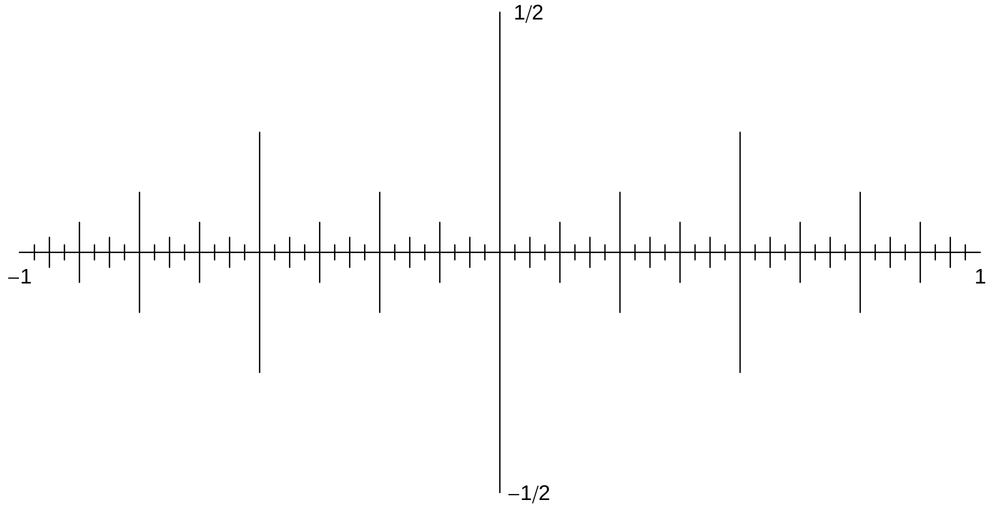
vektor kolmý k $b - a$, jehož délka je rovna délce úsečky C.

$I(C)$ nechť je systém všech úseček $u(m, n)$ s krajními body

$$a + \frac{2m-1}{2^n}(b - a) \pm \frac{ab}{2^{n+1}}, \text{ kde } 1 \le m \le 2^{n-1} \text{ a } n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Nechť $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$; systém $I_1 := I(C)$ se pak skládá ze všech svislých úseček, které protínají osu x v bodech tvaru $((2m-1)/2^n, 0)$ a jejichž krajní body mají od osy x vzdálenost $1/2^{n+1}$.

[33]) Množina A typu G_δ hustá v P je průnikem jisté posloupnosti otevřených množin A_n hustých v P; doplňky $P - A_n$ množin A_n jsou řídké, jejich sjednocení $P - A$ je množina první kategorie. Typickým příkladem husté množiny typu G_δ je množina všech iracionálních čísel v $\mathbb{R}$.



Obr. 23a.

Je-li již pro některé $n \in \mathbb{N}$ definován systém I_n, buď I_{n+1} sjednocení všech systémů $I(C')$, kde $C' \in I_n$. Množinu P_n definujme jako sjednocení úsečky $\langle a\,;\, b\rangle$ se všemi úsečkami systémů $I_1, \ldots, I_n$. Na obr. 23b jsou nakresleny všechny úsečky systému P_3, jejichž délka je $\geq 2^{-5}$. [34])

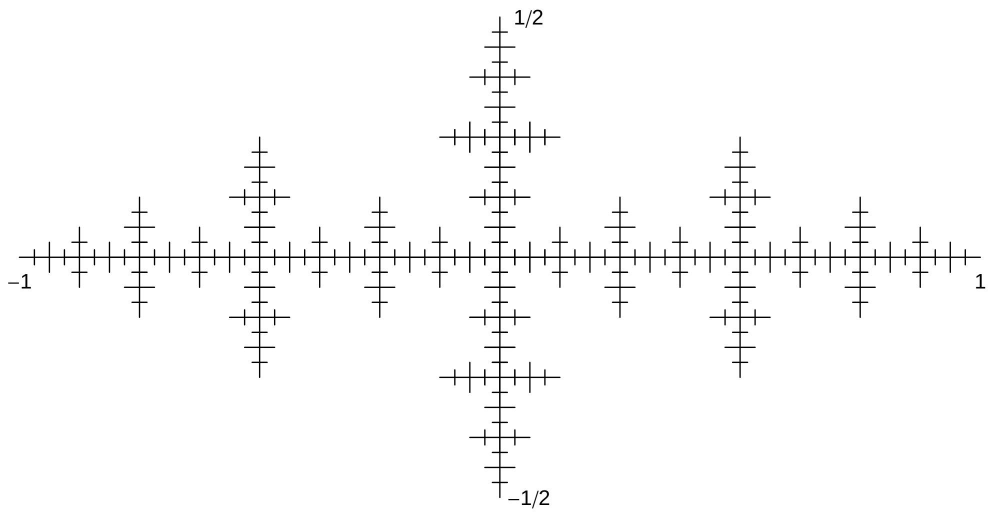
Množiny P_n jsou kontinua tvořící rostoucí posloupnost; sjednocení všech těchto kontinuí je souvislá množina, takže její uzávěr

$$P := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} \tag{25}$$

je kontinuum. Protože

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n^{[1]} \subset P^{[1]} \tag{26}$$

a protože množina vlevo je zřejmě hustá v P, platí totéž tím spíše o množině vpravo. [35])



Obr. 23b.

[34]) Systémy I_n, kde $n > 3$, žádné takové úsečky neobsahují.

[35]) Podrobný rozbor této křivky najde čtenář v [4], str. 615 – 630. Kromě obyčejných a krajních bodů obsahuje křivka P spočetnou množinu bodů rozvětvení, z nichž každý má řád 4.

Věta 8.8. *Je-li P kompaktní prostor, je množina všech jeho iracionálních bodů buď prázdná, nebo iregulární.*

D ů k a z . Máme dokázat implikaci

$$\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c} \Rightarrow \operatorname{ord}_p(P - P^{[\aleph]}) > \omega\,, \tag{27}$$

neboli implikaci

$$\operatorname{ord}_p(P - P^{[\aleph]}) \leq \omega \Rightarrow \operatorname{ord}_p P \leq \aleph\,. \tag{27'}$$

Premisa implikace (27′) znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí G bodu p tak, že $\operatorname{diam} G < \varepsilon$ a že množina $A := H(G) - P^{[\aleph]}$ je konečná. Protože každá konečná množina je typu G_δ, je doplněk $B := H(G) \cap P^{[\aleph]}$ množiny A v $H(G)$ množina typu F_σ, takže $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, kde množiny B_n jsou uzavřené.

Označme $\mathfrak{S}_n$ systém všech otevřených množin M prostoru P, které mají spočetné hranice, průměr $< 1/n$ a pro něž je

$$\rho(p, M) \geq \tfrac{1}{2}\rho(p, H(G))\,. \tag{28}$$

Každý systém $\mathfrak{S}_n$ pokrývá množinu B, a tím spíše i každou z množin B_n. Podle Borelovy věty lze proto (pro každé $n \in \mathbb{N}$) vybrat konečný systém $\mathfrak{S}'_n \subset \mathfrak{S}_n$, který také pokrývá B_n; protože množiny M, pro něž je $B_n \cap M = \emptyset$, můžeme ze systémů $\mathfrak{S}'_n$ odstranit, aniž se cokoli podstatného změní, můžeme předpokládat, že $M \in \mathfrak{S}'_n \Rightarrow M \cap B_n \neq \emptyset$.

Seřadíme-li všechny prvky systému $\mathfrak{S}' := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}'_n$ do posloupnosti $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, je $\operatorname{diam}(M_n) \to 0$. Položíme-li

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\,, \quad V := G - \overline{U}\,, \tag{29}$$

je $B \subset U$, $p \in V$ (podle (24)) a $\operatorname{diam}(V) < \varepsilon$. Dokažme, že $H(V)$ je spočetná množina.

Protože $H(V) \subset (H(G) - U) \cup H(U) \subset A \cup H(U)$ a protože množina A je konečná, stačí ukázat, že $H(U)$ je spočetná množina. Je však

$$\overline{U} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{M_n} \cup H(G)\,, \tag{30}$$

neboť z podmínek $\operatorname{diam} M_n \to 0$, $M_n \cap H(G) \neq \emptyset$ plyne, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k} \subset H(G)\,. \tag{31}$$

Je tedy

$$H(U) = \overline{U} - U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{M_n} - U) \cup (H(G) - U) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} H(M_n) \cup A\,, \tag{32}$$

a poslední množina je spočetná.

Poznámka 8.4. Poznamenejme, že podle věty 8.3 každý iregulární (resp. iracionální) bod (kompaktního prostoru) P leží v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$ obsahujícím jen iregulární (resp. iracionální) body; pokud tedy není množina všech jeho iracionálních bodů prázdná, je sjednocením jistého (neprázdného) systému vlastních kontinuí, načež i množina všech iregulárních bodů z P má podobnou vlastnost.

Obsahuje-li P aspoň jeden iracionální bod, lze tvrzení věty 8.8 charakterizovat rovností

$$(P - P^{[\aleph]})^{[\omega]} = \emptyset\,. \tag{33}$$

Poznámka 8.5. Slovo „iregulární“ *nelze* ve větě 8.8 nahradit slovem „iracionální“, protože existují kompaktní prostory, v nichž množina všech bodů s řádem rozvětvení $\mathfrak{c}$ neobsahuje žádný bod s řádem rozvětvení $\mathfrak{c}$ (takže všechny její body jsou jejími racionálními body).

Příklad kompaktního prostoru s uvedenou vlastností najdeme v [2], str. 209 (bez důkazu). Existují i iracionální křivky K, pro něž je $K - K^{[\aleph]}$ racionální – viz např. [3], str. 143 – 148. (Příklady zde neuvádíme, protože značně komplikované jsou nejen příslušné důkazy, ale již sama konstrukce.)

Porovnejme však větu 8.8 s tímto tvrzením:

Věta 8.9. *Je-li P iracionální kompaktní prostor a je-li $Q := P - P^{[\aleph]}$, je podprostor $\overline{Q}$ iracionální v každém bodě z Q. Jinými slovy:*

$$\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c} \Rightarrow \operatorname{ord}_p \overline{P - P^{[\aleph]}} = \mathfrak{c}. \tag{34}$$

D ů k a z . Nechť $p \in P$ je bod, v němž je podprostor $\overline{Q}$ racionální. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje pak okolí G bodu p tak, že diam $G < \varepsilon$ a že množina $A := H(G) \cap \overline{Q}$ je spočetná; protože je kompaktní, je typu G_δ. Množina $B := H(G) - \overline{Q}$, obsahující jen racionální body prostoru P, je v důsledku toho typu F_σ. Další postup je stejný jako v důkazu věty 8.8 a jako tam se dokáže, že $\operatorname{ord}_p P \leq \aleph$.

Je-li tedy p racionálním bodem podprostoru $\overline{Q}$, je též racionálním bodem prostoru P. Je-li bod p iracionálním bodem prostoru P, tj. je-li $p \in Q$, tj. $\operatorname{ord}_p P = \mathfrak{c}$, je p iracionálním bodem podprostoru $\overline{Q}$, tj. $\operatorname{ord}_p \overline{Q} = \mathfrak{c}$; právě to jsme měli dokázat.

9. Racionální a regulární křivky

Uveďme nejdříve bez důkazu[36]) toto tvrzení:

Lemma 9.1. *Je-li $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, kde každá z množin vpravo je uzavřená (v P), přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\dim P_n = 0$, platí implikace*

$$p \in P_0\,,\ \dim_p P_0 = 0 \Rightarrow \dim_p P = 0\,. \tag{1}$$

Důsledek 1. *Je-li $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, kde každá z množin vpravo má dimenzi 0 a je typu F_σ (v P), má i P dimenzi 0.*

Důsledek 2. *Je-li $P = A \cup B$, kde $\dim A = \dim B = 0$ a kde obě množiny jsou zároveň typu F_σ a G_δ, je i $\dim P = 0$.*

Důsledek 3. *Je-li $p \in P$ a $\dim(P - p) = 0$, je i $\dim P = 0$.*

Věta 9.1. *K tomu, aby prostor P se spočetnou bází byl racionální, je nutné a stačí, aby existovala spočetná množina $A \subset P$ tak, že $\dim(P - A) \leq 0$.*

D ů k a z . 1. Je-li P racionální prostor se spočetnou bází, existuje v něm báze složená z množin U_n, jejichž hranice jsou spočetné. Položíme-li $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(U_n)$, snadno nahlédneme, že $\dim(P - A) \leq 0$.

2. Je-li $P = A \cup B$, kde A je spočetná množina a $B = P - A$ má dimenzi 0, je pro každé $p \in P$ také (podle důsledku 3 lemmatu 9.1) $\dim_p(p \cup B) = 0$. Existují tedy libovolně malá okolí $U(p)$, jejichž hranice neprotíná B a je tedy částí spočetné množiny A.

Příklad 9.1. Typickou racionální křivkou je uzávěr P grafu funkce $\sin(1/x)$, $x \in (0, 1\rangle$. Je-li A_1 libovolná spočetná množina hustá v úsečce $\langle(0, -1); (0, 1)\rangle$, A_2 libovolná spočetná množina hustá v množině $\{(x, y);\ x \in (0, 1),\ y = \sin(1, x)\}$ a znamená-li $Q_n(p)$ otevřený čtverec o středu v bodě $p \in A := A_1 \cup A_2$ a délce strany $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, je hranice v P každého z těchto čtverců spočetná množina. Sjednocení S všech hranic je také spočetné, množina $P - S$ má dimenzi 0.

Věta 9.2. *Je-li $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, kde P_n jsou uzavřené racionální množiny, je i prostor P racionální. Speciálně: Kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha racionálních křivek, je racionální křivka.*

D ů k a z . Položme $C_1 := P_1$ a $C_n := P_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ pro každé $n > 1$. Pak jsou množiny C_n disjunktní, racionální a typu F_σ, přičemž $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Podle věty 9.1 existují spočetné množiny A_n a množiny B_n dimenze ≤ 0 tak, že $C_n = A_n \cup B_n$ (pro každé $n \in \mathbb{N}$). Položme $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; množina A je pak spočetná. Protože $B_n = B \cap C_n$, kde C_n je typu F_σ v P, je B_n typu F_σ v B. Podle důsledku 1 lemmatu 9.1 je $\dim B \leq 0$. Odtud podle věty 9.1 plyne, že prostor $P = A \cup B$ je racionální.

Poznámka 9.1. *Pro regulární křivky tvrzení analogické větě* 9.2 neplatí, *a to ani když jde o sjednocení dvou křivek.*

Příklad 9.2. Jsou-li P_1, P_2 křivky z příkladu 4.6, je $\operatorname{ord}_p P_1 \leq 3$ pro každé $p \in P_i$, $i = 1, 2$, ale $\operatorname{ord}_p P = \aleph$ pro každý bod $p \in \langle(0, 0); (1, 0)\rangle$, protože hranice každého dost malého okolí každého takového bodu protíná nekonečně mnoho úseček $\langle(0, 1/2^n); (1, 1/2^n)\rangle$. $\square$

Doplňme tento příklad obecným tvrzením:

Věta 9.3. 1. *Je-li K kontinuum konvergence prostoru P, je $\operatorname{ord}_p P \geq \aleph$ pro každé $p \in K$.*

2. *V žádném regulárním prostoru neexistuje žádné kontinuum konvergence.*

3. *Každé regulární kontinuum je dědičně lokálně souvislé.*

D ů k a z . 1. Je-li K kontinuum konvergence prostoru P, existují disjunktní kontinua K_n tak, že $K = \operatorname{Lim} K_n$, přičemž navíc je $K_n \cap K = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $p \in K$; protože K je vlastní kontinuum, existuje $U(p)$ tak, že $K - \overline{U(p)} \neq \emptyset$. Protože skoro všechna kontinua K_n mají pak společné body jak s $U(p)$, tak i s $K - \overline{U(p)}$, mají společné body i s $H(U(p))$. Protože K_n jsou disjunktní, obsahuje $H(U(p))$ nekonečně mnoho bodů.

Tvrzení 2 věty 9.3 je totožné s tvrzením 1.

[36]) Důkaz lze najít např. v [1], str. 171 – 173.

3. Podle věty 4.9 je kontinuum dědičně lokálně souvislé, právě když neobsahuje žádné kontinuum konvergence; podle tvrzení 2 tuto vlastnost má každé regulární kontinuum.

Poznámka 9.2. *Dědičně lokálně souvislé kontinuum nemusí být regulární, ale – jak ukázal Whyburn – je racionální.* [37])

Příklad 9.3. Iregulární dědičně lokálně souvislé kontinuum sestrojíme např. takto:
Označme S úsečku $\langle 0,1\rangle \times 0$ na ose x. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme A_n jako sjednocením půlkružnic

$$\left(x - \frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4^n}\,,\; y \geq 0\,,\; 1 \leq k \leq 2^{n-1} \tag{2}$$

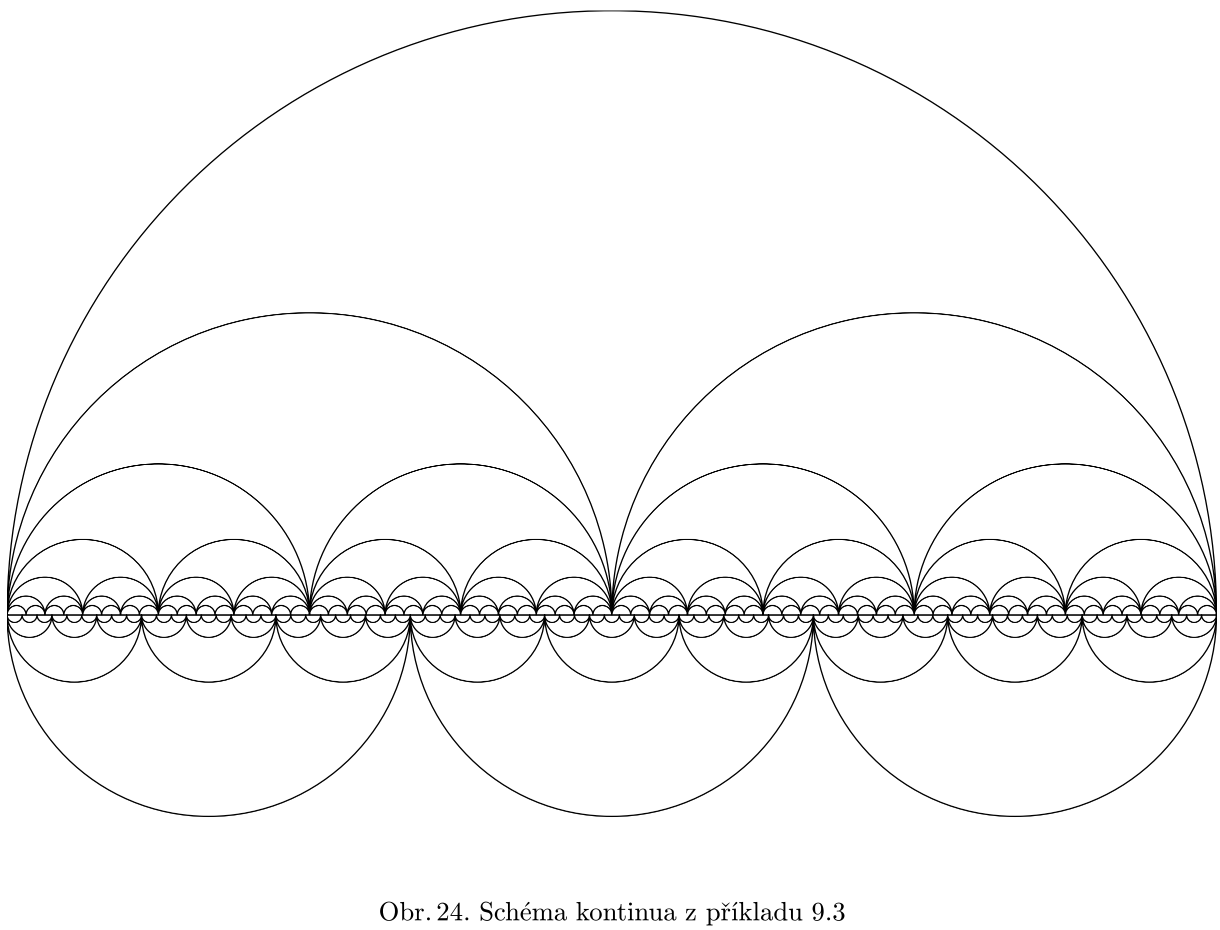
a pro každé $m \geq 0$ buď B_m sjednocením půlkružnic

$$\left(x - \frac{2k-1}{2\cdot 3^m}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4\cdot 9^m}\,,\; y \leq 0\,,\; 1 \leq k \leq 3^m\,. \tag{3}$$

Každé A_n a každé B_m je pak kontinuum a totéž platí i pro sjednocení

$$K := S \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m\,. \tag{4}$$

Na obr. 24 jsou kromě úsečky S nakreslena kontinua $A_1, \ldots, A_7$ a kontinua $B_1, \ldots, B_4$.



Obr. 24. Schéma kontinua z příkladu 9.3

Snadno nahlédneme, že hranice každého okolí každého bodu $(x,0) \in S$, kde x je dyadicky (resp. triadicky) racionální, protíná nekonečně mnoho kontinuí B_m (resp. A_n); není-li $x \in (0,1)$ ani dyadicky,

[37]) Viz Whyburn, [5], kap. V.

ani triadicky racionální, protíná hranice každého okolí bodu nekonečně mnoho kontinuí A_n a nekonečně mnoho kontinuí B_m. Každý bod $(x,0) \in S$ má tedy řád rozvětvení rovný $\aleph$. $\square$

Není náhoda, že regulární body p křivek P_1, P_2 z příkladu 4.6*, které nejsou regulárními body jejich sjednocení $P_1 \cup P_2$, leží v průniku $P_1 \cap P_2$:*

Věta 9.4. *Jsou-li K_1, K_2 regulární křivky, je-li $p \in K_1 \cup K_2$ a $\operatorname{ord}_p(K_1 \cup K_2) = \aleph$, je $p \in K_1 \cap K_2$. Je-li $K_1 \cap K_2$ neprázdná totálně nesouvislá množina, je $K_1 \cup K_2$ regulární křivka.*

D ů k a z . 1. Je-li $p \in K_1 - K_2$ (resp. $p \in K_2 - K_1$), jsou všechna dost malá okolí bodu p disjunktní s K_2 (resp. s K_1). Z toho ihned plyne, že $\operatorname{ord}_p(K_1 \cup K_2)$ se rovná $\operatorname{ord}_p K_1$ (resp. $\operatorname{ord}_p K_1$), což je podle předpokladu $\leq \omega$.

2. Je-li $p \in K_1 \cup K_2$ a $\operatorname{ord}_p(K_1 \cup K_2) = \aleph$, existuje podle 2. části věty 8.3 vlastní kontinuum C obsahující bod p a složené výhradně z iregulárních bodů. Podle toho, co jsme dokázali v 1. části tohoto důkazu, je $C \subset K_1 \cap K_2$, takže množina $K_1 \cap K_2$ není totálně nesouvislá.

Věta 9.5. *Je-li C kontinuum kondenzace kontinua K, je množina*

(5)
$$R := \{x \in C;\ \operatorname{ord}_x K > 2\}$$

všech bodů rozvětvení kontinua K ležících v C hustá v C.

D ů k a z . Nechť C je kontinuum kondenzace kontinua K. Protože podle Janiszewského věty 4.1 existuje pro každý bod $x \in C$ a každé jeho okolí $U(x)$ různé od C vlastní kontinuum $C' \subset C \cap \overline{U(x)}$ a protože každé takové kontinuum C' je spolu s C řídké v K, *stačí ukázat, že C obsahuje aspoň jeden bod rozvětvení kontinua K.*

Zvolme v C nějaké dva body $p \neq q$; protože podle věty 6.2 existuje kontinuum $C'' \subset C$ ireducibilní mezi p, q a i toto kontinuum je řídké v K, *lze předpokládat, že C je ireducibilní mezi body p, q.*

Logicky jsou možné tyto dva případy:

a) Některý bod $x \in C$ je obsažen v nějakém kontinuu konvergence prostoru K; podle 1. tvrzení věty 9.3 je pak $\operatorname{ord}_x K \geq \aleph$ a jsme hotovi.

b) Žádný bod $x \in C$ neleží na žádném kontinuu konvergence prostoru K, tedy ani na žádném kontinuu konvergence kontinua C. Jinými slovy: Ireducibilní kontinuum C neobsahuje žádné kontinuum konvergence; podle věty 6.9 je to tedy oblouk, přičemž p, q jsou zřejmě jeho krajní body.

Zvolme libovolně bod $x \in C - \{p,q\}$. Jsou opět dvě možnosti: ba) $\operatorname{ord}_x K > 2$ a jsme hotovi, nebo bb) $\operatorname{ord}_x K = 2$. V tomto druhém případě existuje okolí U bodu x tak, že $\overline{U}$ neobsahuje žádný z bodů p, q a že $H(U)$ je dvoubodová množina, jejíž body označíme a, b. Protože oblouky py, qy obsažené v C mají společné body jak s U, tak s $K - \overline{U}$, protíná každý z nich i $H(U)$; je tedy $H(U) = \{a,b\} \subset C$.

Protože kontinuum C je řídké v K, *není* $U \subset C$, takže existuje bod $y \in U - C$. Označíme-li $D := \operatorname{komp}_y(U - C)$, protíná $\overline{D}$ (podle Janiszewského věty 4.1) množinu $H(U - C)$. Protože

$$H(U - C) = \overline{U - C} - (U - C) \subset (\overline{U} - U) \cup C = H(U) \cup C = C,$$

protíná množina $\overline{D}$ oblouk C. Zvolme v množině $\overline{D} \cap C$ bod z; pro každé dostatečně malé okolí V bodu z je množina $\overline{V}$ disjunktní s množinou $\{p,\ q,\ y\}$. Protože každá ze souvislých množin $pz \subset C$, $qz \subset C$, D obsahuje jak body z V, tak i body z $K - \overline{V}$, je průnik každé z nich s $H(V)$ neprázdný. Průniky jsou po řadě částí disjunktních množin $pz - z \subset C$, $qz - z \subset C$, $D \subset U - C$, a jsou tedy nejen neprázdné, ale i disjunktní. Z toho ihned plyne, že $\operatorname{ord}_z K \geq 3$.

Věta 9.6. *Je-li K kontinuum, jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

I. *K neobsahuje žádné kontinuum kondenzace.*

II. *Uzávěr $\overline{R}$ množiny R všech bodů rozvětvení kontinua K je buď prázdný, nebo má dimenzi* 0.

D ů k a z implikace I $\Rightarrow$ II. Neobsahuje-li K žádné kontinuum kondenzace, neobsahuje žádné kontinuum konvergence, a podle věty 4.9 je dědičně lokálně souvislé. Kdyby neplatilo tvrzení II, platila by nerovnost $\dim \overline{R} > 0$; podle věty 8.4 by kompaktní množina $\overline{R}$ nebyla totálně nesouvislá a obsahovala by tedy jakési vlastní kontinuum S, o němž lze (podle věty 6.2) předpokládat, že je ireducibilní. Podle věty 6.5 je pak S oblouk .

Je-li $x \in S$ a je-li $U(x)$ libovolné jeho okolí, jsou logicky možné tyto dva případy: a) $U(x) - S \neq \emptyset$, b) $U(x) \subset S$. Kdyby však nastala situace b), bylo by $\operatorname{ord}_y R = \operatorname{ord}_y S \leq 2$ pro každé $y \in U(x)$, takže $U(x)$ by neobsahovalo žádné body rozvětvení, což je ve sporu s podmínkou $x \in \overline{R}$.

Tím jsme dokázali, že pro každé $x \in S$ a pro každé jeho okolí $U(x)$ je $U(x) - S \neq \emptyset$; kontinuum S je tedy řídké v K, tj. je kontinuem kondenzace kontinua K – spor.

D ů k a z implikace non(I) $\Rightarrow$ non(II). Obsahuje-li K nějaké kontinuum kondenzace C, je $C \subset \overline{R}$ podle věty 9.5, takže $\dim \overline{R} \geq \dim C \geq 1$. □

K důkazu následující věty budeme potřebovat toto užitečné tvrzení:

Lemma 9.2. *Je-li P dědičně lokálně souvislé kontinuum a leží-li body $a \neq b$ v nějaké oblasti $G \subset P$, existuje oblouk $ab \subset G$.*

D ů k a z . Pro každé $x \in G$ existuje $\varepsilon_x > 0$ tak, že uzávěr v P okolí $U(x, \varepsilon_x)$ je částí G; označíme-li

$$\Omega(x) := \operatorname{komp}_x U(x, \varepsilon_x)\,, \tag{6}$$

jsou $\Omega(x)$ oblasti, jejichž uzávěry v P jsou kontinua obsažená v G. Protože oblasti $\Omega(x)$ pokrývají G, existuje podle lemmatu 5.4 (dokonce ireducibilní) řetěz

$$\Omega(x_1), \ldots, \Omega(x_s) \tag{7}$$

tak, že $a \in \Omega(x_1)$, $b \in \Omega(x_s)$. Množina

$$H := \bigcup_{k=1}^{s} \overline{\Omega(x_k)} \tag{8}$$

je pak kontinuum obsažené v G a obsahující body a, b; Protože P je dědičně lokálně souvislé, je H lokálně souvislé. Podle věty 5.5 lze proto body a, b spojit obloukem v $H \subset G$.

Věta 9.7. 1. *Existují-li v kontinuu P dva body $a \neq b$ tak, že $\operatorname{ord}_a P = \operatorname{ord}_b P = 1$ a že $\operatorname{ord}_x P = 2$ pro všechny ostatní body $x \in P$, je P oblouk ab.*

2. *Platí-li pro všechny body x neprázdného kontinua P rovnost $\operatorname{ord}_x P = 2$, je P topologická kružnice.*

D ů k a z . Poznamenejme především, že kontinuum splňující předpoklady buď prvního, nebo druhého tvrzení věty je dědičně lokálně souvislé (např. podle 3. části věty 9.3).

Ad 1. Podle věty 6.5 stačí dokázat, že P je ireducibilní mezi body a, b. Kdyby to nebyla pravda, existovalo by (podle věty 6.2) kontinuum $K \subsetneq P$ ireducibilní mezi body a, b, tedy oblouk ab. Je-li $c \in P - K$, existuje (podle věty 5.5) oblouk $L = ac \subset P$. Orientujme tento oblouk od bodu a k bodu c a nechť d je poslední bod oblouku L ležící v K. Kdyby bylo $d = a$, vycházely by z bodu a dva oblouky K a L, jejichž jediným společným bodem je a, a bylo by tedy $\operatorname{ord}_a P \geq 2$ – spor.

Je tedy $d \neq a$. Kdyby bylo $d = b$, vycházely by z bodu b dva oblouky bc a K s jediným společným bodem b, a by bylo $\operatorname{ord}_b P \geq 2$ – spor.

Zbývá tedy případ $a \neq d \neq b$, kdy však z bodu d vycházejí tři oblouky s jediným společným bodem d, a to oblouky da, db, dc; platila by proto nerovnost $\operatorname{ord}_d P \geq 3$ – spor.

Každá poloha bodu $d \in K$ vede tedy ke sporu; ireducibilita kontinua P je tím dokázána.

Ad 2. Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady druhé části věty, a buďte c, d dva různé body z P; podle Moorovy věty 4.5 stačí dokázat, že množina $P^* := P - (c \cup d)$ je nesouvislá.

Předpokládejme opak (takže P^* je oblast); podle věty 5.5 existuje oblouk $C = cd \subset P$. Protože rovnost $C = P$ by vedla k rovnosti $\operatorname{ord}_c P = 1$, je $C \neq P$. Zvolme $a \in C - (c \cup d)$ a $b \in P - C$. Protože P^* je oblast dědičně lokálně souvislého kontinua, existuje podle lemmatu 9.4 oblouk $D = ab \subset P^*$. Orientujme D od bodu a k bodu b a nechť z je poslední bod z D ležící v C. Je pak $z \neq b$ (protože $b \notin C$) a $c \neq z \neq d$ (protože $z \in D \subset P^*$). Protože oblouky $zb \subset D$, $zc \subset C$, $zd \subset C$ mají jediný společný bod z, je $\operatorname{ord}_z P \geq 3$ – spor.

Tím je věta 9.7 dokázána.

10. Dodatky

V této kapitole uvedu několik pojmů a tvrzení, která s pojmem křivky (a obecněji kontinua nebo souvislé množiny) souvisí, ale do textu Kontinua z konce padesátých let se již nedostala. (Tento text byl využíván v topologickém semináři v rozsahu $2+2$ a více látky již nebylo možné do takto omezeného času zařadit.) Navíc mnohdy půjde o zcela jiný přístup k látce, který vyžaduje odlišné metody a řadu nepříliš známých pomocných tvrzení. Všechny věty budou proto uvedeny bez důkazu, jen pro informaci čtenáře; u každé z nich bude uvedena literatura, v níž lze důkaz najít. Omlouvám se, že výběr látky bude hodně nesoustavný.

Pojem souvislé množiny, bez něhož si lze jen těžko představit nejen topologii, ale např. i matematickou analýzu, patří podle mého názoru k nejrafinovanějším a nejneprůhlednějším pojmům běžně známé vysokoškolské matematiky. Je proto užitečné seznámit se s jednou z nejpozoruhodnějších souvislých množin; sestrojili ji začátkem dvacátých let dvacátého století dva světoznámí polští matematici. [38])

Příklad 10.1. Označme $A := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Je-li x bod 1. druhu Cantorova diskontinua Δ [39]), nechť $P(x)$ znamená množinu všech bodů úsečky $\langle (x,0); A\rangle$, jejichž druhá souřadnice je iracionální; je-li x bod 2. druhu, nechť je $P(x)$ množina všech bodů úsečky $\langle (x,0); A\rangle$, jejichž druhá souřadnice je racionální. Položme

$$P := \bigcup_{x \in \Delta} P(x).$$

Množina P je *souvislá* a má dvě pozoruhodné vlastnosti:

1) Je-li $P = M \cup N$, kde M, N jsou souvislé množiny, je jedna z množin M, N buď jednobodová, nebo prázdná. (Srov. s nerozložitelnými kontinuy.)

2) Množina $P - (1/2, 1/2)$ je totálně nesouvislá. [40])

* * *

S řády rozvětvení souvisí tato přirozená otázka: *Existují křivky K, pro něž existuje $n \in \mathfrak{C}$ tak, že* $\operatorname{ord}_x K = n$ *pro všechna $x \in K$?* [41])

Dva příklady již známe: Všechny body každé topologické kružnice mají řád rozvětvení 2, všechny body Sierpińského koberce mají řád rozvětvení $\mathfrak{c}$. Uryson uvádí další dva příklady Cantorových křivek: Jedna z nich obsahuje jen body s řádem rozvětvení $\aleph$, druhá jen body s řádem rozvětvení ω. (Viz [4], str. 635 – 662.)

Uryson dále dokazuje dvě podstatná tvrzení:

Věta 10.1. *Je-li P Cantorova křivka splňující rovnost* $\operatorname{ord}_x = n$ *pro všechna $x \in P$, je n jedno z čísel* $2, \omega, \aleph, \mathfrak{c}$. [42])

Věta 10.2. *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a mají-li všechny body Cantorovy křivky P řád rozvětvení $\geq n$, existuje v P i bod s řádem rozvětvení $\geq 2n-2$.* [42])

Poznámka 10.1. Větu 10.2 lze ekvivalentně formulovat takto: *Je-li $n \in \mathbb{N}$ a mají-li všechny body Cantorovy křivky P řád rozvětvení $< 2n-2$, existuje v P bod s řádem rozvětvení $< n$.*

Řád rozvětvení každého bodu každé křivky je ≥ 1, ale pro $n = 1$ věta 10.2 neříká nic; protože křivky obsahující jen krajní body podle věty 10.1 neexistují, je nejjednodušším příkladem křivky P, pro niž je $\sup\{\operatorname{ord}_x P;\ x \in P\}$ minimální, oblouk. Pro $n = 2$ je $n = 2n-2$, a jediným příkladem typu křivky, jejíž všechny body mají řád rozvětvení 2, je topologická kružnice. Je-li $n = 3$, je $2n-2 = 4$ a existuje jednoduchý příklad křivky, jejíž každý bod má řád rozvětvení buď 3, nebo 4 – viz část 9 příkladu 8.1. Uryson (v [4], str. 662 – 673) konstruuje i pro každé přirozené číslo $n > 3$ příklad křivky P, jejíž každý

[38]) Viz článek B. Knastera a K. Kuratowského ve Fundamenta Mathematicae 2, 1921, str.241. Doporučuji čtenářům přečíst si tam poutavý důkaz, že množina P z následujícího příkladu má uvedené vlastnosti.

[39]) Za body 1. druhu považujeme i body 0 a 1.

[40]) Proto se bod A někdy nazývá *bodem výbuchu* množiny P; odstraní-li se ze souvislé množiny P tento jediný bod, zbudou jen „atomy“.

[41]) tj. křivky „s konstantním řádem rozvětvení“

[42]) Viz [4], str. 648.

bod má řád rozvětvení buď n, nebo $2n-2$; poznamenejme však, že jak konstrukce, tak i příslušný důkaz nepatří k nejjednodušším.

Poznámka 10.2. Podle věty 9.1 existuje pro každou racionální křivku P rozklad $P = A \cup B$, kde A je spočetná množina a $\dim B = 0$. [43])

Uryson [44]) uvádí příklad Cantorovy křivky P s těmito vlastnostmi:

1. Pro každé $x \in P$ je buď $\operatorname{ord}_x P = 2$, nebo $\operatorname{ord}_x P = \omega$;
2. množina $R := \{x \in P;\ \operatorname{ord}_x P = \omega\}$ je spočetná;
3. množina $\overline{R}$ je dokonalá a má dimenzi 0;
4. v P neexistuje žádné kontinuum kondenzace.

Sestrojíme ji takto: Nechť P_0 je sjednocení půlkružnice

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\,,\ y \geq 0 \tag{1}$$

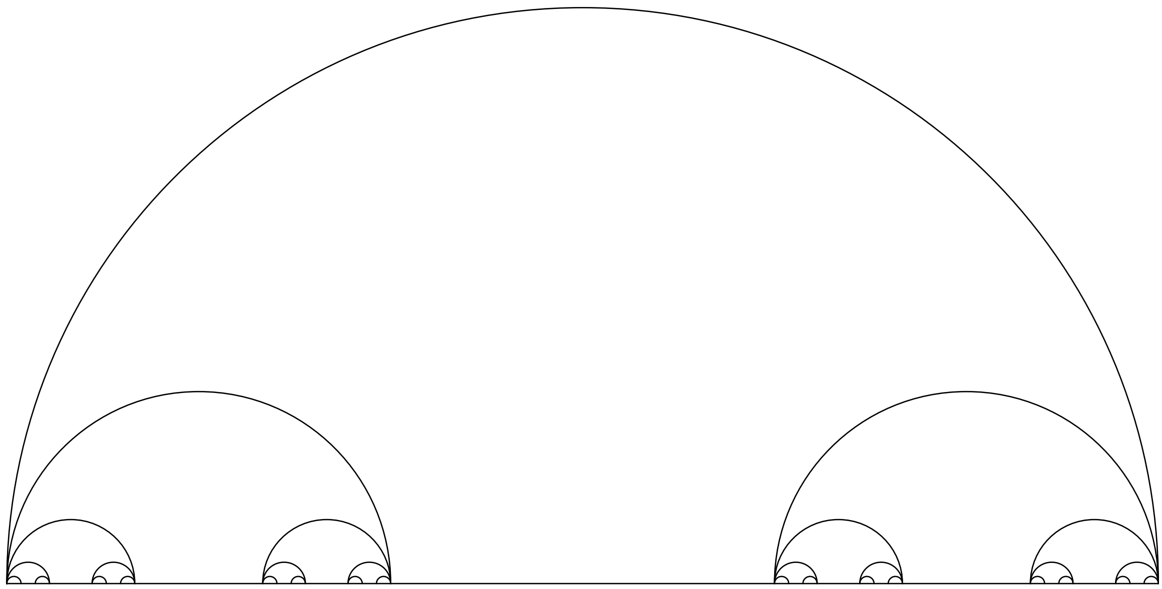
s úsečkou s krajními body $(0,0)$, $(1,0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme P_n sjednocení všech půlkružnic ležících v polorovině $y \geq 0$, jejichž krajní body jsou body

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} \quad \text{a} \quad 2\sum_{k=1}^{n} \frac{i_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}\,, \tag{2}$$

kde každé z čísel i_k nabývá hodnot 0 a 1. Kontinuum

$$P := \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n \tag{3}$$

má pak uvedené vlastnosti: řád jeho rozvětvení v každém bodě prvního druhu Cantorova diskontinua (včetně bodů 0 a 1) je roven ω, zatímco všechny ostatní body z P jsou obyčejné. (Na obr. 25 jsou zakresleny množiny P_n s $n = 0, \ldots, 4$.)



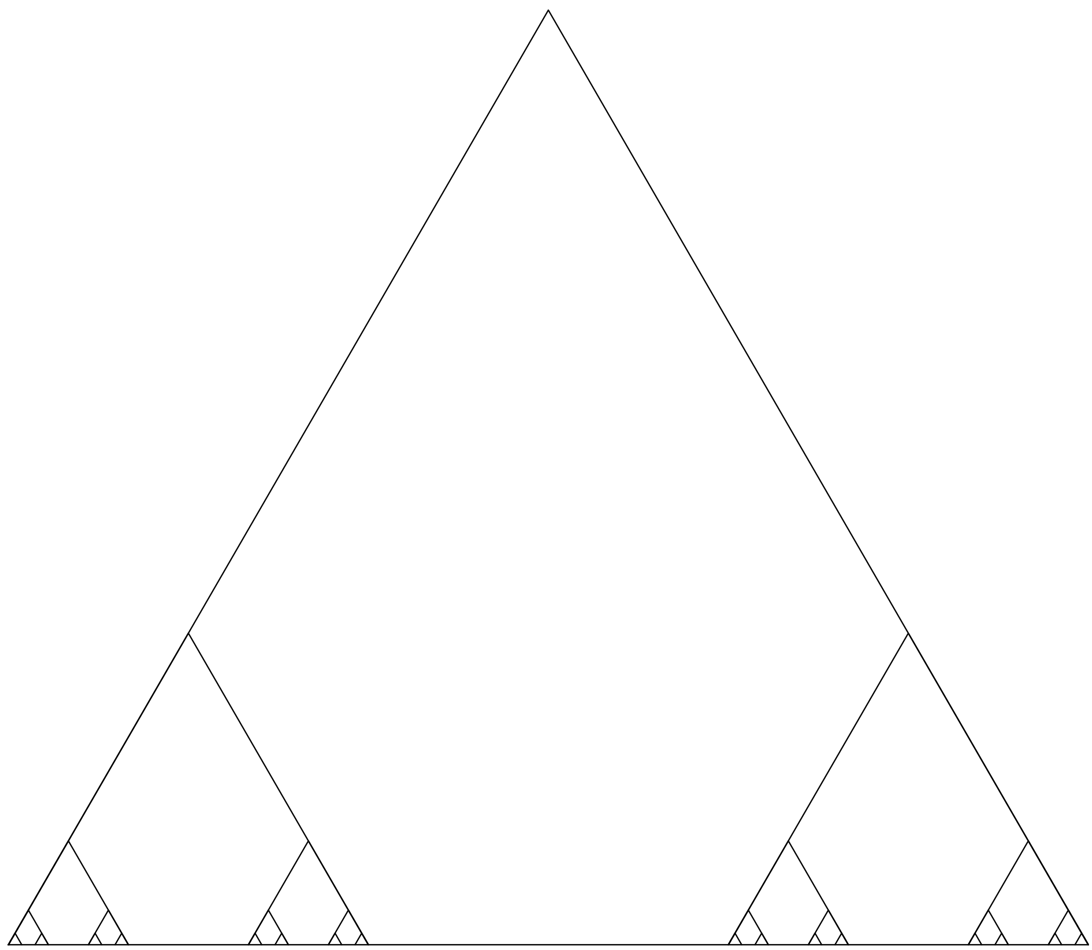
Obr. 25. Schéma kontinua P z poznámky 10.2

[43]) Ve větě 9.1 se mluví obecněji o separabilních racionálních prostorech, v nichž by množina B mohla být prázdná; pro křivky podobná situace nemůže nastat, protože žádná spočetná množina není křivkou.

[44]) Viz [4], str. 597 – 598.

Modifikujeme-li předcházející konstrukci tím, že půlkružnice nahradíme rovnostrannými trojúhelníky, získáme křivku P^*, v níž má každý bod řád rozvětvení buď 2, nebo 3; řád tři mají přitom vrcholy všech trojúhelníků kromě trojúhelníku největšího a všechny body $(x, 0)$, kde $x \in (0, 1)$ je bod prvního druhu Cantorova diskontinua. (Viz obr. 26.)

Poznámka 10.3. Podle věty 8.3 je každý bod x kompaktního prostoru P, v němž je řád rozvětvení $\geq\aleph$, obsažen v nějakém vlastním kontinuu $K \subset P$, v jehož každém bodě je řád rozvětvení také $\geq\aleph$.



Obr. 26. Schéma kontinua P^* z poznámky 10.2

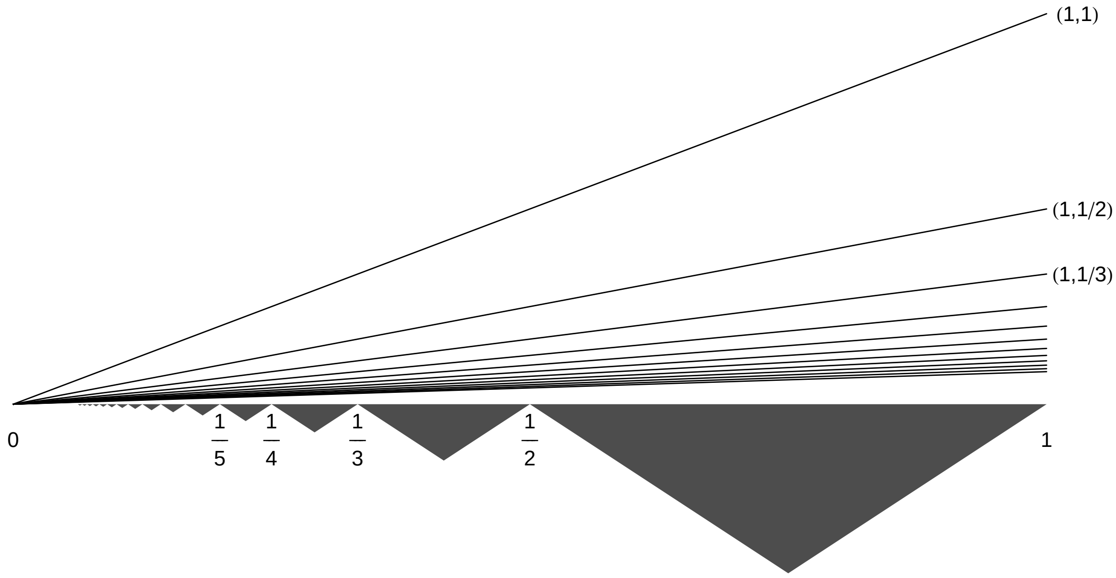
Uryson podává v [4], str. 541 – 542 příklad kontinua P, které obsahuje právě jeden bod a s řádem rozvětvení $\aleph$; bod a leží ve vlastním kontinuu $K \subset P$, pro něž platí: $a \neq x \in K \Rightarrow \operatorname{ord}_x P = \mathfrak{c}$. Konstrukci provádí Uryson takto:

L_0 nechť je úsečka $\langle 0, 1\rangle$ na ose x a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť L_n znamená úsečku s krajními body $a := (0, 0)$ a $(1, 1/n)$. T_n buď rovnostranný trojúhelník (včetně vnitřku) obsažený v dolní polorovině $y \leq 0$, jehož jednou stranou je úsečka s krajními body $(1/(n+1), 0)$, $(1/n, 0)$. Kontinua K a P jsou definována rovnostmi

$$K := L_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\,, \quad P := K \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\,. \tag{4}$$

(Viz obr. 27, kde jsou z technických důvodů měřítka na osách x, y zhruba v poměru 2 : 1, takže rovnostranné trojúhelníky T_n jsou deformovány na trojúhelníky rovnoramenné.)

Je $\operatorname{ord}_a P \geq\aleph$, protože hranice každého okolí bodu a má společný aspoň jeden bod s každou úsečkou L_n; není však větší než $\aleph$, protože hranice čtverce o středu a a délce strany $2/n$ protíná P jen ve spočetně



Obr. 27. Schéma kontinua (4) popsaného na předchozí stránce

mnoha bodech (ležících na úsečkách L_n, $n \geq 0$, ležících v polorovině $y \geq 0$). Řád rozvětvení v ostatních bodech úsečky L_0 je $\mathfrak{c}$, stejně jako ve všech bodech všech trojúhelníků T_n; řády rozvětvení v ostatních bodech kontinua P jsou jistě zřejmé.

Uryson pak poznamenává, že trojúhelníky mající dimenzi 2 lze nahradit vhodnými křivkami tak, aby P byla křivka. Lze to provést např. takto: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$(5) \qquad s(n) := \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{1}{n}, 0\Big) + \Big(\frac{1}{n+1}, 0\Big)\Big) = \Big(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, 0\Big), \quad r(n) := \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{2n(n+1)};$$

$s(n)$ je tedy střed úsečky s krajními body $(1/n, 0)$ a $(1/(n+1), 0))$, $s(n) - (r(n), 0) = (1/(n+1), 0)$, $s(n) + (r(n), 0) = (1/n, 0)$.

Utvořme analogii $K(n)$ křivky P z poznámky 4.12 (obr. 11), a to tak, že společný krajní bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ úseček z P nahradíme bodem $s(n)$ a body x Cantorova diskontinua Δ body

$$(6) \qquad y(n, x) := s(n) + r(n) \cdot \big(\cos(\pi x), -\sin(\pi x)\big).$$[42]

Označme $L(n, x)$ úsečku s krajními body $s(n)$ a $y(n, x)$, kde $x \in \Delta$, a položme

$$(7) \qquad K(n) := \bigcup_{x \in \Delta} L(n, x), \quad K := L_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n).$$

K je pak kontinuum, které má všechny žádané vlastnosti, ale na rozdíl od původního Urysonova kontinua má dimenzi 1.

Všechna kontinua $K(n)$ jsou (v geometrickém smyslu) podobná. Na obr. 28a je ve větším měřítku nakresleno schéma kontinua $K(1)$; na obr. 28b je schéma kontinua K.

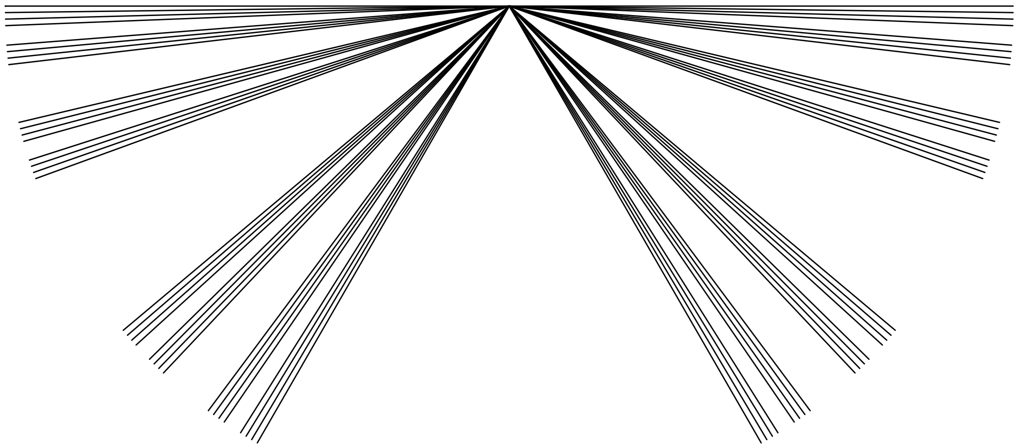
Poznámka 10.4. Sestrojit křivku (8), obsahující jen jeden bod s řádem rozvětvení $\aleph$, dalo dost práce. Snadné však je sestrojit křivku, která obsahuje jen jeden bod s řádem rozvětvení ω, zatímco ostatní její body jsou obyčejné (viz obr. 29): Znamená-li C_n kružnici popsanou rovnicí

$$(8) \qquad (x - \tfrac{1}{n})^2 + y^2 = \tfrac{1}{n^2};$$

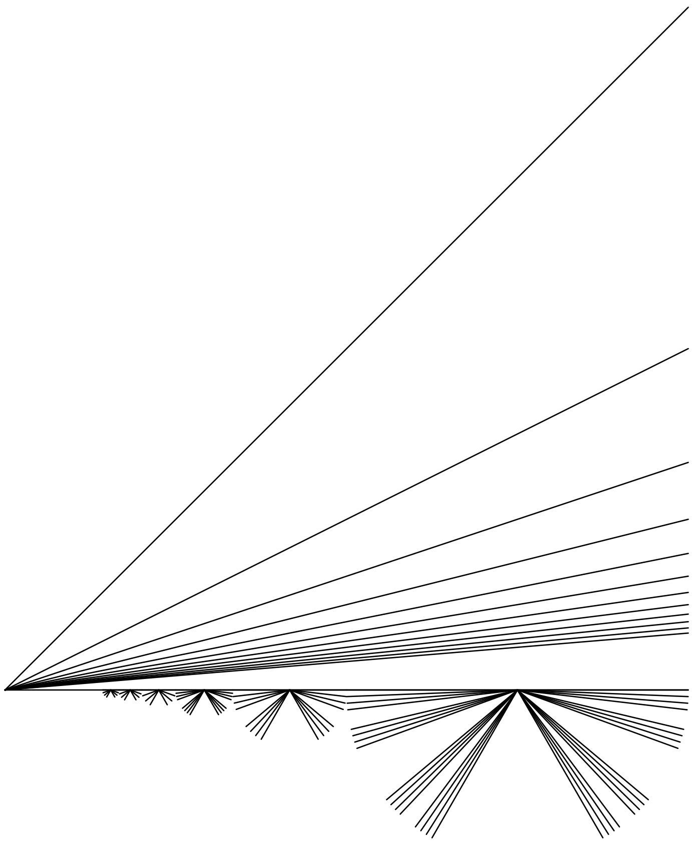
má uvedenou vlastnost křivka

$$(9) \qquad C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

[42]) Body $x(n)$ leží na půlkružnici o středu $s(n)$ a poloměru $r(n)$ ležící v dolní polorovině $y \leq 0$ a jsou na ní rozloženy podobně jako je Cantorovo diskontinuum rozloženo v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.



Obr. 28a. Schéma křivky $K(1)$

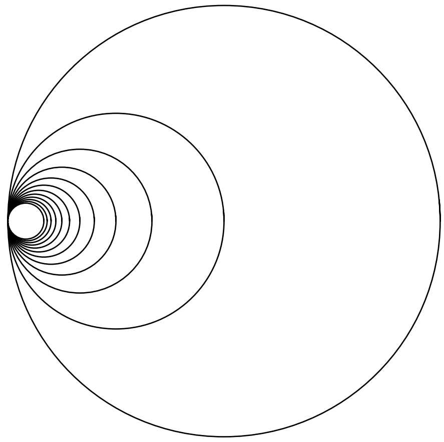


Obr. 28b. Schéma křivky (8)

Ve [4], str. 605 – 607, najdeme i zajímavé tvrzení vztahující se k podobným situacím:

Věta 10.4. *Je-li a izolovaný bod množiny všech bodů rozvětvení Cantorovy křivky P, existuje spočetný systém $\mathfrak{S}$ kontinuí P_n s těmito vlastnostmi:*

1. *každé P_n je buď oblouk, nebo topologická kružnice;*
2. *pro každé n je $a \in P_n$, ale množiny $P_n - a$ jsou disjunktní;*
3. *označíme-li P^* sjednocení všech $P_n \in \mathfrak{S}$, je $a \in \operatorname{Int} P^*$;*



Obr. 29. Schéma křivky C z poznámky 10.4

4. *je-li* $\mathfrak{S}$ *nekonečný systém, je* diam $P_n \to 0$.

Poznámka 10.5. Křivka z poznámky 8.3 (obr. 23b) ukazuje, že množina všech krajních bodů křivky může být „ve smyslu kategorií" bohatší než množina všech ostatních bodů této křivky. Obráceně existují křivky, které nemají žádný krajní bod; nejjednodušším příkladem je topologická kružnice. Pro křivky, které mají právě jeden krajní bod, platí toto tvrzení [45]):

Věta 10.5. *Není-li množina K všech krajních bodů křivky P ani prázdná, ani dvoubodová, existuje v P aspoň jeden bod rozvětvení.*

Je zřejmé, že ani pro prázdnou, ani pro dvoubodovou množinu K tvrzení věty neplatí: topologická kružnice nemá ani krajní body, ani body rozvětvení, oblouk má dva krajní body, ale žádný bod rozvětvení.

Poznámka 10.6. Podle Sierpińského věty 4.2 nelze žádné kontinuum rozložit na spočetně mnoho disjunktních uzavřených množin, z nichž aspoň dvě jsou neprázdné. V poznámce 4.3 jsme sestrojili křivku, která je sjednocením nespočetně mnoha disjunktních vlastních kontinuí; snadno ověříme, že řád rozvětvení této křivky je v každém jejím bodě roven $\mathfrak{c}$. Není to tak úplně náhoda, protože platí toto obecné tvrzení [46]):

Věta 10.6. *Je-li kontinuum P sjednocením nějakého nespočetného systému disjunktních vlastních kontinuí, obsahuje množina*

$$\{x \in P;\ \mathrm{ord}_x P = \mathfrak{c}\} \tag{10}$$

nějaké vlastní kontinuum.

Poznámka 10.7. Velmi názorná se zdá být následující věta; její důkaz pro obecné oblouky však není nikterak jednoduchý. [47])

Věta 10.7. *Je-li P sjednocením n oblouků $pa_1, \dots, pa_n$, pro něž jsou množiny $pa_k - p$ disjunktní, je* $\mathrm{ord}_p P = n$.

K. Menger ukázal, že toto tvrzení lze někdy i obrátit: [48])

Věta 10.8. (Menger.) *Je-li p bod lokálně souvislého kontinua P a je-li $\mathrm{ord}_p P \geq n \in \mathbb{N}$, existují v P oblouky $pa_1, \dots, pa_n$, pro něž jsou množiny $pa_k - p$, $k = 1, \dots, n$, disjunktní.*

Poznámka 10.8. Jsou-li pa_k úsečky, je důkaz tvrzení věty 10.7 triviální; v obecném případě důkaz naráží hlavně na to, že oblouk, který má jednoduchou „vnitřní strukturu" (je homeomorfní s intervalem $\langle 0, 1\rangle$, lze v něm zavést uspořádání, každý jeho bod různý od jeho krajních bodů jej rozděluje na dvě

[45]) Viz [4], str. 604.
[46]) Viz [4], str. 545 – 547.
[47]) Viz [2], str. 203.
[48]) Viz Fundamenta Mathematicae 10 (1927), str. 98, nebo [3], kap. VI,1. Tato slavná věta má v německém originále název n-Beinsatz, tedy věta o „n-nožce".

souvislé části, atd.) může být z jiného hlediska velmi složitý; rovinný oblouk L může mít nejen nekonečnou délku, ale např. i kladnou dvojrozměrnou Lebesgueovu míru $\mu(L)$. [49])

V následujícím příkladu popíšeme, jak se pro každé číslo $r \in (0,1)$ zkonstruuje oblouk L obsažený v jednotkovém čtverci Q tak, že $\mu(L) = r$. (Je-li tedy $r \in (1/2,1)$, „zabírá“ takový oblouk L z hlediska míry, která je zobecněním elementárněgeometrického pojmu „obsah“ rovinného útvaru, větší část jednotkového čtverce než jeho doplněk. Připomeňme, že každý oblouk v Q je řídký v Q, zatímco jeho doplněk je v Q hustý.)

Příklad 10.2. Popišme nejdříve operaci, kterou budeme v dalším aplikovat na čtverce různých rozměrů. Nechť $X = \langle a,b\rangle^2$ a nechť je dáno nějaké číslo $q \in (0, b-a)$. Každý z obdélníků

$$X_1 := \langle a,b\rangle \times \left(\tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}q\right),\ X_2 := \left(\tfrac{1}{2}(a+b) - \tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}(a+b) + \tfrac{1}{2}q\right) \times \langle a,b\rangle, \tag{11}$$

má míru $q(b-a)$, jejich sjednocení míru $2q(b-a) - q^2$. [50]) Množina $X - (X_1 \cup X_2)$ je sjednocením čtyř shodných čtverců $Q_0, \dots, Q_3$, jejichž celková míra je rovna $(b-a)^2 - 2q(b-a) + q^2 = (b-a-q)^2$ (takže každý ze čtverců Q_i má míru rovnou čtvrtině tohoto čísla).

Jsou-li dána čísla $a < b$ a $m \in (0, (b-a)^2)$, má kvadratická rovnice

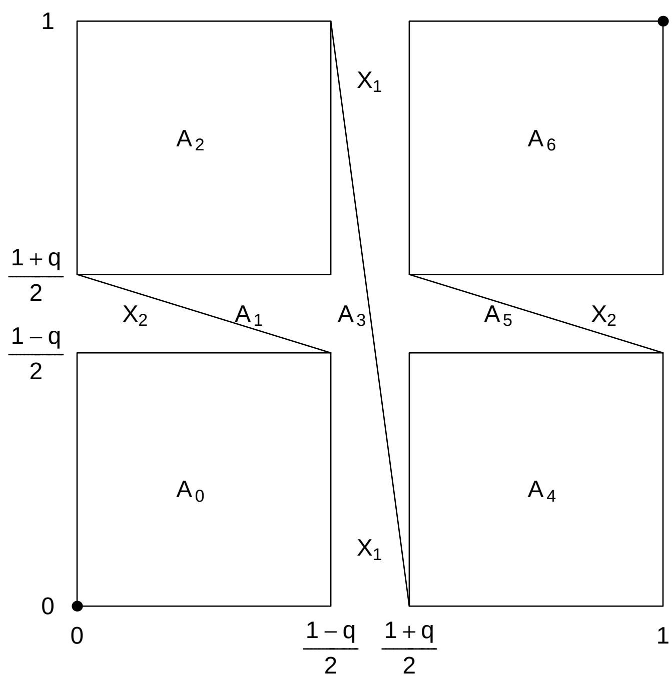
$$\mu(X_1 \cup X_2) = 2q(b-a) - q^2 = m \tag{12}$$

v intervalu $(0, b-a)$ právě jedno řešení

$$q = (b-a) - \sqrt{(b-a)^2 - m}. \tag{13}$$

Množinu $X_1 \cup X_2$ s tímto q nazveme *kříž v X o obsahu m* a označíme $K(X,m)$. Míra komplementární množiny, neboli součet obsahů čtverců Q_i, je pak rovna $(b-a)^2 - m = (b-a-q)^2$. Z toho plyne, že délka strany čtverce Q_i je rovna $\frac{1}{2}\sqrt{(b-a)^2 - m} = \frac{1}{2}(b-a-q)$ a

$$\operatorname{diam} Q_i = \sqrt{\frac{(b-a)^2 - m}{2}}. \tag{14}$$



Obr. 30a. 1. krok konstrukce oblouku L

[49]) S Lebesgueovou mírou se čtenář může seznámit např. v knihách V. Jarník: Integrální počet 2, Academia, Praha 1984, W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru, Academia, Praha 1977 nebo R. Sikorski, Academia, Praha 1973.

[50]) Od součtu $\mu(X_1) + \mu(X_2)$ jsme odečetli míru q^2 průniku $X_1 \cap X_2$.

Položme nyní $a = 0$, $b = 1$, zvolme pevně nějaké kladné číslo $r < 1$ a popišme, jak lze sestrojit oblouk $L \subset Q := \langle 0,1\rangle^2$ s mírou $\mu(L) = r$.

1. krok: Položme $m = 1 - r$ a utvořme kříž $K(Q, m/2)$. Množina $Q - K(Q, m/2)$ se skládá ze čtyř (uzavřených) čtverců; levý dolní nechť je $Q(0)$, levý horní $Q(2)$, pravý dolní $Q(4)$, pravý horní $Q(6)$. $Q(2i+1)$ nechť je pro $i = 0, 1, 2$ úsečka spojující pravý horní vrchol čtverce $Q(2i)$ s levým dolním vrcholem čtverce $Q(2i+2)$. (Viz obr. 30a odpovídající $r = 1/2$, $m/2 = 1/4$, $q = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \doteq 0.134$.) Míra kříže $K(Q, m/2)$ je $m/2$, takže $\mu(Q - K(Q, m/2)) = 1 - m/2$. Protože úsečky mají míru 0, je míra množiny $L_1 := Q(0) \cup \ldots \cup Q(6)$ je rovna míře sjednocení čtverců $Q(2i)$. Každý z těchto čtverců má míru $(1 - m/2)/4 = (1 + r)/8 < 1/4$.[51])

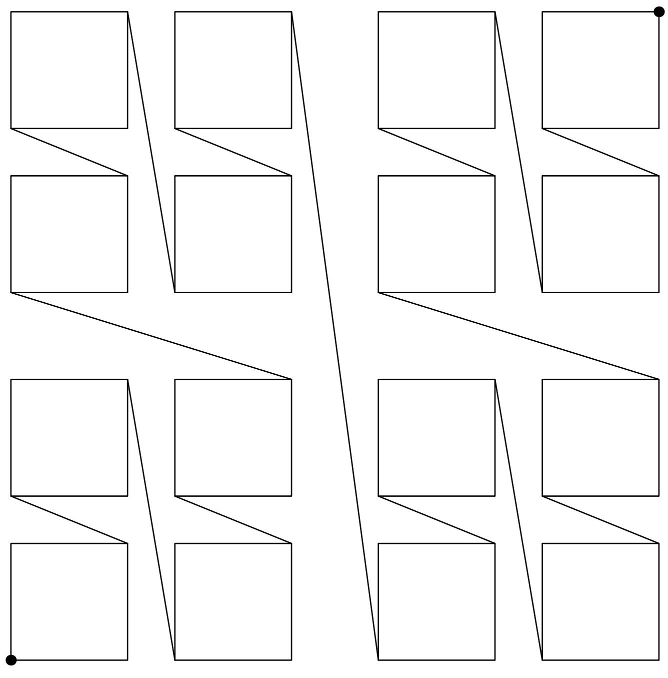
Je zřejmé, že $Q(0), \ldots, Q(6)$ je regulární řetěz (viz definici 5.3) kontinuí, který spojuje body $(0,0)$, $(1,1)$.

2. krok: Každá z množin $Q(2i) - K(Q(2i), m/16)$, $0 \le i \le 3$, se skládá ze čtyř čtverců $Q(2i, 2j)$, kde $0 \le j \le 3$, očíslovaných analogicky jako v případě čtverců $Q(2i)$; analogicky jako v prvním kroku konstrukce spojíme pravé horní vrcholy čtverců $Q(2i, 2j)$ s levými dolními vrcholy čtverců $Q(2i, 2j+2)$ úsečkami $Q(2i, 2j+1)$. Jsou-li $c(2i+1) \in A(2i), d(2i+1) \in A(2i+2)$ krajní body úsečky $Q(2i+1)$, označme

$$c(2i+1, j) := c(2i+1) + j\,\frac{d(2i+1) - c(2i+1)}{7} \quad \text{pro } j = 0, \ldots, 7 \tag{15}$$

a $Q(2i+1, j)$, $0 \le j \le 6$, nechť je úsečka s krajními body $c(2i+1, j), c(2i+1, j+1)$. Tím je každá z úseček $Q(2i+1)$ rozdělena na 7 stejně dlouhých úseček a kontinua $Q(i, j)$, $0 \le i \le 6$, $0 \le j \le 6$ tvoří při lexikografickém uspořádání dvojic (i, j) regulární řetěz spojující body $(0,0)$, $(1,1)$. Označíme-li L_2 sjednocení všech množin $Q(i, j)$, je zřejmě $L_2 \subset L_1$.

Každý z křížů $K(Q(2i), m/16)$ má míru $m/16$, jejich sjednocení míru $m/4$, sjednocení těchto 4 křížů s křížem $K(Q, m/2)$ míru $m/2 + m/4 = 3m/4$ a sjednocení všech kontinuí $Q(i, j)$ míru $1 - 3m/4 = (1 + 3r)/4$. Délka strany každého čtverce $Q(2i, 2j)$ je rovna $(1 + 3r)/4^3 < 1/2^2$.[21]) (Viz obr. 30b.)



Obr. 30b. 2. krok konstrukce oblouku L

[51]) K odhadu délky stran čtverců $Q(i)$ nepotřebujeme znát jejich přesnou velikost; čtverce jsou 4, jsou disjunktní a obsažené ve čtverci Q míry 1. Jejich celková míra je tedy < 1, míra každého z nich $< 1/4$, délka jejich stran $< \sqrt{1/4} = 1/2$. Podobně snadno lze v dalším odhadnout délku stran čtverců $Q(2i_1, \ldots, 2i_n)$.

V n-tém kroku sestrojíme tímto postupem 7^n kontinuí

$$Q(i_1, \dots, i_n), \ (i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1, \dots, 6\}^n, \tag{16}$$

která při lexikografickém uspořádání n-tic $(i_1, \dots, i_n)$ tvoří regulární řetěz spojující body $(0, 0)$, $(1, 1)$. Jsou-li všechna čísla i_k sudá, je $Q(i_1, \dots, i_n)$ čtverec, v ostatních případech jde o úsečky. Abychom kontinua (17) získali, bylo nutné z Q odstranit

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = \tfrac{1}{3}(4^n - 1) \tag{17}$$

křížů o celkové míře

$$\frac{m}{2} + \dots + \frac{m}{2^n} = m(1 - 2^{-n}); \tag{18}$$

sjednocení L_n všech množin (16) má tedy míru

$$1 - m(1 - 2^{-n}) = r + \frac{1 - r}{2^n}. \tag{19}$$

Míra každého čtverce $Q(2i_1, \dots, 1i_n)$ je rovna číslu (20) dělenému číslem 4^n; délka jeho strany je menší než $1/2^n$.[51])

$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost regulárních řetězů kontinuí spojujících body $(0, 0)$, $(1, 1)$. Průnik

$$L := \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \tag{20}$$

má míru rovnou limitě výrazů (19) pro $n \to \infty$; je tedy $\mu(L) = r$.

K tomu, abychom nahlédli, že L je oblouk, stačí provést podobnou úvahu jako v důkazu věty 5.5. Homeomorfní zobrazení $h : \langle 0, 1\rangle \to_{\text{na}} L$ lze však snadno získat i takto: Rozdělme interval $J := \langle 0, 1\rangle$ na 7 stejně dlouhých intervalů $J(i_1)$, $0 \leq i_1 \leq 6$, a číslujme tyto intervaly „zleva doprava", takže tvoří regulární řetěz spojující body 0, 1. Každý interval $J(i_1)$ rozdělme na 7 stejně dlouhých intervalů $J(i_1, i_2)$, $0 \leq i_2 \leq 6$, a opět číslujme „zleva doprava"; při lexikografickém uspořádání dvojic (i_1, i_2) tvoří pak intervaly $J(i_1, i_2)$ regulární řetěz spojující body 0, 1. V n-tém kroku tímto postupem získáme systém 7^n intervalů $J(i_1, \dots, i_n)$, který při lexikografickém uspořádání tvoří regulární řetěz spojující 0, 1. Pokračujme takto do nekonečna.

Pak jedinému bodu průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J(i_1, \dots, i_n) \tag{21}$$

přiřaďme jediný bod průniku

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q(i_1, \dots, i_n). \tag{22}$$

Snadno nahlédneme, že definice je korektní a že uvedené zobrazení intervalu J na množinu L je homeomorfní.

Poznámka 10.9.. Rozměry křížů z n-tého kroku v 10.2 jsou tím složitější výrazy, čím větší je n. Čím větší je r, tím jsou kříže užší a na obrázcích nejsou šikmé úsečky dobře rozeznatelné. K ilustraci pátého kroku podobné konstrukce jsme proto zvolili za šířku n-tého kříže „jednoduché" číslo $2^{2n-1}/10^n$.

Stejně jako při konstrukci popsané nahoře se ze čtverce $Q = \langle 0, 1\rangle^2$ vynechá kříž K, z každého ze zbylých čtverců $Q(2i_1)$, $0 \leq i_1 \leq 3$, kříž $K(i_1)$, atd. Konstrukce se však liší rozměry vynechaných křížů: Kříž K je sjednocením dvou obdélníků o rozměrech $\frac{2}{10} \times 1$, takže

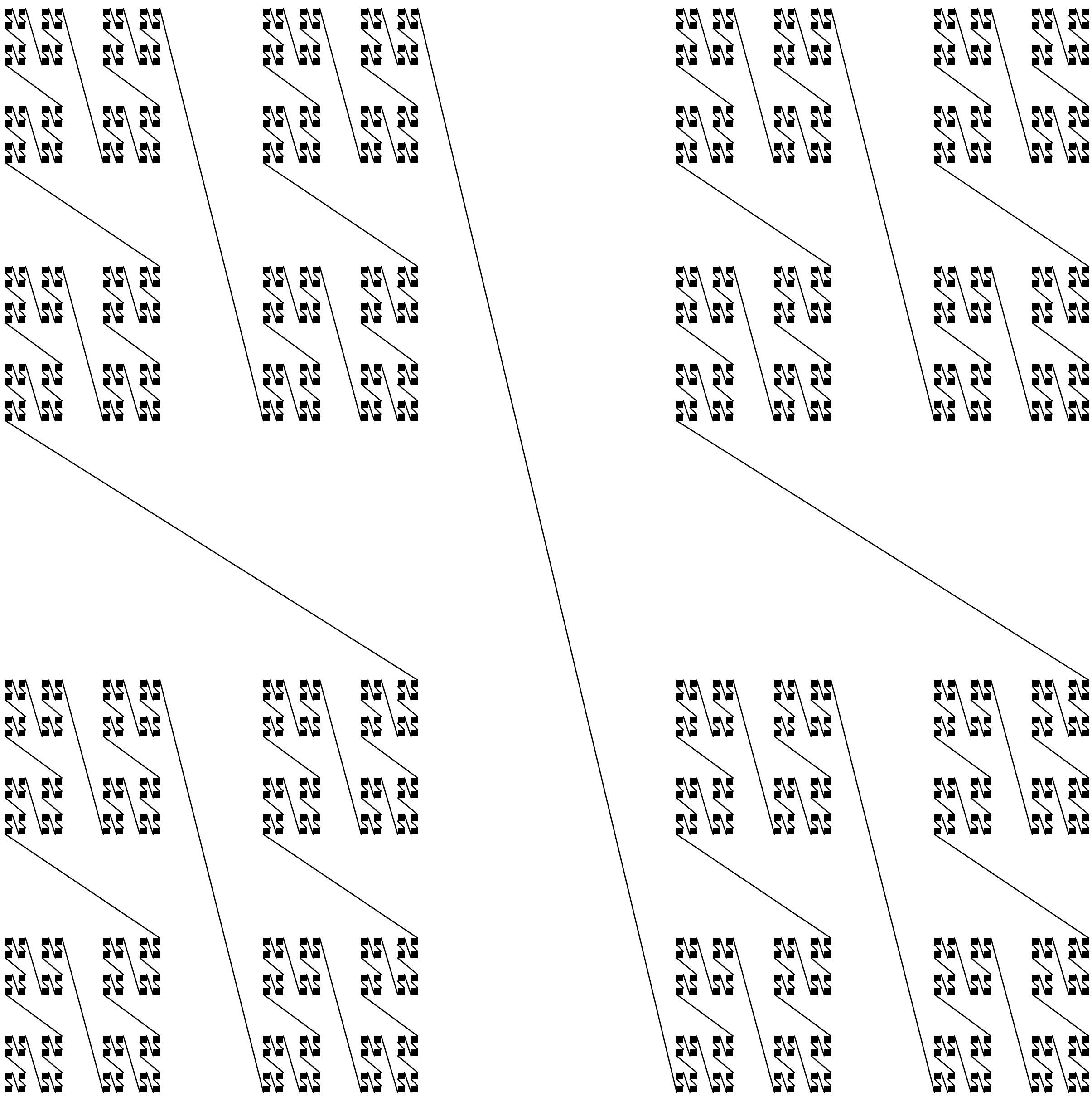
$$\mu(K) = 2 \cdot \left(\frac{2}{10} \cdot 1\right) - \left(\frac{2}{10}\right)^2 = \frac{9}{25} \tag{23}$$

a délka strany každého čtverce $Q(2i_1)$ je rovna polovině z $1 - 2/10$, tedy $4/10$.

Každý kříž $K(i_1)$ je sjednocením dvou obdélníků o rozměrech $2^3/10^2 \times (4/10)^1$, takže

$$\mu(K(i_1)) = 2 \cdot \frac{2^3}{10^2} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^1 - \left(\frac{2^3}{10^2}\right)^2 = \frac{36}{625}. \tag{24}$$

Abychom získali míru sjednocení všech křížů $K(i_1)$, je třeba číslo (24) vynásobit čtyřmi.



Obr. 30c. Pátý krok modifikované konstrukce

Obecně: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojíme kříže $K(i_1, \dots, i_n)$ tak, že

$$\mu(K(i_1, \dots, i_n)) = 2 \cdot \frac{2^{2n-1}}{10^n} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} - \left(\frac{2^{2n-1}}{10^n}\right)^2 = \frac{9 \cdot 4^{n-1}}{25^n}. \tag{25}$$

Abychom získali míru sjednocení všech křížů $K(i_1, \dots, i_n)$, je třeba (25) vynásobit číslem 4^{n-1}:

$$4^{n-1} \cdot \mu(K(i_1, \dots, i_n)) = \frac{9 \cdot 16^{n-1}}{25^n}. \tag{26}$$

Tato čísla tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem 9/25 a kvocientem 16/25; její součet je tedy

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{1}{1 - 16/25} = 1. \tag{27}$$

Ze čtverce Q jsme vynechali množinu míry 1, a zbylý oblouk má proto míru 0. Právě uvedená modifikace konstrukce je podobná jako v příkladu 10.2, ale jednodušší numerické vztahy a možnost ukázat na obrázku prvních pět kroků změnily podstatnou okolnost: *jednodušeji zkonstruovaný oblouk nemá kladnou míru.*

* * *

V poslední části Dodatků zkonstruujeme rovinné kontinuum, jehož doplněk má celkem čtyři komponenty a je hranicí tří z nich. I když toto kontinuum bude ležet v eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$, odůvodnění jednotlivých kroků konstrukce se zjednoduší, budeme-li pracovat s rovinou rozšířenou o „bod nekonečno“ s vhodně zavedenou metrikou.

Buď ∞ jakýkoli bod, který nepatří do $\mathbb{R}^2$ a označme

$$\mathbb{S} := \{(x, y);\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \cup \infty; \tag{28}$$

buď $A := (0, 0, 1)$ „severní pól“ jednotkové sféry

$$\tilde{\mathbb{S}} := \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3;\, \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}. \tag{29}$$

Úsečka spojující bod $(x, y, 0)$ roviny xy s bodem A sféry (29) má kromě bodu A s touto sférou společný ještě další bod, jehož souřadnice (jak snadno zjistíme elementárními prostředky analytické geometrie) jsou dány rovnostmi

$$\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1},\ \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1},\ \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \tag{30}$$

Označme Φ zobrazení, které bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ přiřazuje bod (ξ, η, ζ) podle (30), a bodu ∞ přiřadí bod A. *Vzdálenost dvou bodů* a, b z $\mathbb{S}$ definujme rovností

$$\rho^*(a, b) := \rho_3(\Phi(a), \Phi(b)), \tag{31}$$

kde ρ_3 je kartézská metrika v $\mathbb{R}^3$. „*Rozšířená rovina*“ $\mathbb{S}$ s metrikou ρ^* je pak izometrická se sférou $\tilde{\mathbb{S}}$, a v důsledku toho je *kompaktní*.

Poznamenejme, že kartézská metrika ρ_2 je v rovině $\mathbb{R}^2$ *ekvivalentní* s metrikou ρ^* (v tom smyslu, že pro $z_n \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^2$ platí ekvivalence $\rho_2(z_n, z) \to 0 \Leftrightarrow \rho^*(z_n, z) \to 0$ a pro $z_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ je podmínka $\rho^*(z_n, \infty) \to 0$ ekvivalentní s podmínkou $\|z_n\|$ $(= \sqrt{x_n^2 + y_n^2}) \to +\infty$. (Posloupnost čísel $z_n = (-1)^n n$ nemá v $\mathbb{R}$ limitu, ale posloupnost bodů $(z_n, 0)$ konverguje při metrice ρ^* k ∞.)

Hlavní výhodou přechodu od $\mathbb{R}^2$ k $\mathbb{S}$ je možnost aplikace tohoto velmi užitečného tvrzení:

Věta 10.9. (Janiszewski.) *Nechť množiny $A \subset \mathbb{S}$, $B \subset \mathbb{S}$ jsou buď obě uzavřené, nebo obě otevřené. Neroztíná-li žádná z nich rovinu $\mathbb{S}$ a je-li jejich průnik souvislý, jejich sjednocení $A \cup B$ neroztíná $\mathbb{S}$.* [53])

V topologii roviny a v jejích aplikacích např. v komplexní analýze [54]) hrají důležitou úlohu tato dvě tvrzení:

Věta 10.10. *Je-li $L \subset \mathbb{S}$ oblouk, je $\mathbb{S} - L$ oblast, jejíž hranicí je L. Analogické tvrzení platí, píšeme-li $\mathbb{R}^2$ místo $\mathbb{S}$.*

Věta 10.11. *Je-li $T \subset \mathbb{S}$ topologická kružnice, je $\mathbb{S} - T$ sjednocením dvou disjunktních oblastí, jejichž společnou hranicí je T. Analogické tvrzení platí, píšeme-li $\mathbb{R}^2$ místo $\mathbb{S}$.*

[53]) Důkaz viz [2], str. 355, tvrzení 7, nebo třeba moje kniha Analýza v komplexním oboru, Academia, Praha 1983, str. 135, Věta 5,3,4.

[54]) kde se ovšem ∞ nepřidává v eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$, ale k (otevřené) Gaussově rovině, která je s $\mathbb{R}^2$ izometricky izomorfní

Důkazy právě uvedených dvou vět nejsou právě jednoduché; obě jsou dokázány např. v [8], str. 221, jako tvrzení 26.5.3 a 26.5.4. Obě věty jsou triviálními důsledky následující věty o rozšíření homeomorfismů, jejíž obvyklý důkaz (viz např. [2], str. 381) je však (bohužel) na nich založen.

Věta 10.12. *Je-li $M \subset \mathbb{S}$ buď oblouk nebo topologická kružnice a je-li $h : M \to \mathbb{S}$ homeomorfní zobrazení, existuje homeomorfní zobrazení $H : \mathbb{S} \to_{\text{na}} \mathbb{S}$ tak, že $H(z) = h(z)$ pro každé $z \in M$. Analogické tvrzení platí, píšeme-li $\mathbb{R}^2$ místo $\mathbb{S}$.*

Důkaz věty 10.10 pomocí věty 10.12 je opravdu jednoduchý: Nechť h je homeomorfní zobrazení oblouku L na interval $\langle 0, 1\rangle$ a $H : \mathbb{S} \to_{\text{na}} \mathbb{S}$ nechť je jeho homeomorfní rozšíření. Protože $\Omega := \mathbb{S} - \langle 0, 1\rangle$ je zřejmě oblast, jejíž hranicí je $\langle 0, 1\rangle$, a protože při homeomorfním zobrazení H_{-1} přechází oblast v oblast a hranice v hranici, je $\mathbb{S} - L$ oblast s hranicí L.

Podobně se na základě věty 10.12 dokáže i věta 10.11; interval $\langle 0, 1\rangle$ nahradíme jednotkovou kružnicí.

Poznámka 10.10. Ve větě 10.10 je L kontinuum, které je hranicí jediné oblasti; ve větě 10.11 je T kontinuum, které je společnou hranicí dvou disjunktních oblastí. Je proto přirozenou otázkou, zdali i pro každé $n > 2$ existuje kontinuum, které je společnou hranicí n disjunktních oblastí. Ukážeme, že odpověď na tuto otázku je kladná: *sestrojíme kontinuum $K \subset \mathbb{R}^2$, které je hranicí tří disjunktních oblastí.* [55]) Kuratowski v [2], str. 404, odst. 11 uvádí, že *společná hranice tří disjunktních (neprázdných) oblastí je buď nerozložitelné kontinuum, nebo sjednocení dvou nerozložitelných kontinuí.* Nelze proto očekávat, že konstrukce bude snadná.

V literatuře najdeme „hezké vyprávění“, jak úkol splnit „zavodňováním ostrova“: [56])

Ostrov, na němž jsou tři jezera, potřebujeme vodními nádržemi, které vzniknou rozšířením těchto jezer o kanály, které z nich vycházejí, „co nejlépe“ zavodnit vodami všech tří jezer. Vody se nesmí smíchat, příslušné vodní nádrže se nesmí protínat ani dotýkat. Potřebné práce rozložíme na etapy, během nichž budeme kanály postupně prodlužovat a tím příslušné nádrže rozšiřovat: Za první rok vykopeme z každého jezera kanál tak, aby každé dosud suché místo ostrova mělo od každé ze tří nádrží vzdálenost menší než 1 km, za dalšího půl roku prodloužíme každý z kanálů tak, aby každé dosud suché místo ostrova mělo od každé z nádrží vzdálenost menší než půl kilometru, za dalšího čtvrt roku prodloužíme každý z kanálů tak, aby každé dosud suché místo ostrova mělo od každé z nádrží vzdálenost menší než čtvrt kilometru, atd. do nekonečna. Za dva roky bude mít každé zbylé suché místo ostrova od každé ze tří nádrží vzdálenost 0 km, takže „ať máme jakkoli krátké ruce, můžeme suchá místa zalévat vodou z kteréhokoli ze tří jezer“.

Je patrné, že toto názorné vyprávění má „malou vadu“: nehledě na to, že nevíme, co se rozumí „jezerem“ a „kanálem“ *nedokazuje se, že popisovanou myšlenkovou konstrukci lze opravdu realizovat.* V dalším se pokusíme celou úvahu zpřesnit a jednotlivé kroky odůvodnit; budeme k tomu potřebovat nejen Janiszewského větu, ale i několik nových pojmů a pomocných tvrzení.

Definice 10.2. Říkáme, že **oblouk** $L = ab \subset \mathbb{S}$ **vychází z bodu** a **do** $\Omega \subset \mathbb{S}$, je-li $a \in H(\Omega)$ a $L - a \subset \Omega$. Říkáme, že **bod** $a \in H(\Omega)$ **je dosažitelný z** Ω, existuje-li oblouk L vycházející z bodu a do Ω. Říkáme, že **bod** a **je z** Ω **dosažitelný lineárně**, existuje-li úsečka vycházející z bodu a do Ω. Je-li bod a dosažitelný z Ω, ale není dosažitelný lineárně, budeme říkat, že je **dosažitelný z** Ω **nelineárně**.

Následující příklady 10.3 ukáží, že každý bod hranice oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nemusí být z Ω dosažitelný. Platí však toto jednoduché tvrzení:

Věta 10.13. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{S}$ oblast, která má omezenou hranici, je množina všech bodů z $H(\Omega)$ dosažitelných z Ω lineárně, hustá v $H(\Omega)$.*

D ů k a z . Pro každé $a \in H(\Omega)$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje bod $b \in \Omega \cap U(a, \varepsilon)$. Bod c úsečky $\langle a; b\rangle$ nejbližší bodu b je zřejmě lineárně dosažitelný z Ω.

Příklady 10.3. 1. Je-li A sjednocení grafu funkce $\sin(1/x)$, $0 < |x| \le 1$, s úsečkou B s krajními body $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, je $\Omega := \mathbb{S} - A$ oblast, jejíž hranicí je A. Body a, b jsou z Ω dosažitelné lineárně, ale žádný bod *otevřené* úsečky s krajními body a, b není z Ω dosažitelný.

2. Počátek $p = (0, 0)$ je nelineárně dosažitelný z oblasti $\Omega := U((2, 0), 2) - \overline{U((1, 0), 1)}$.

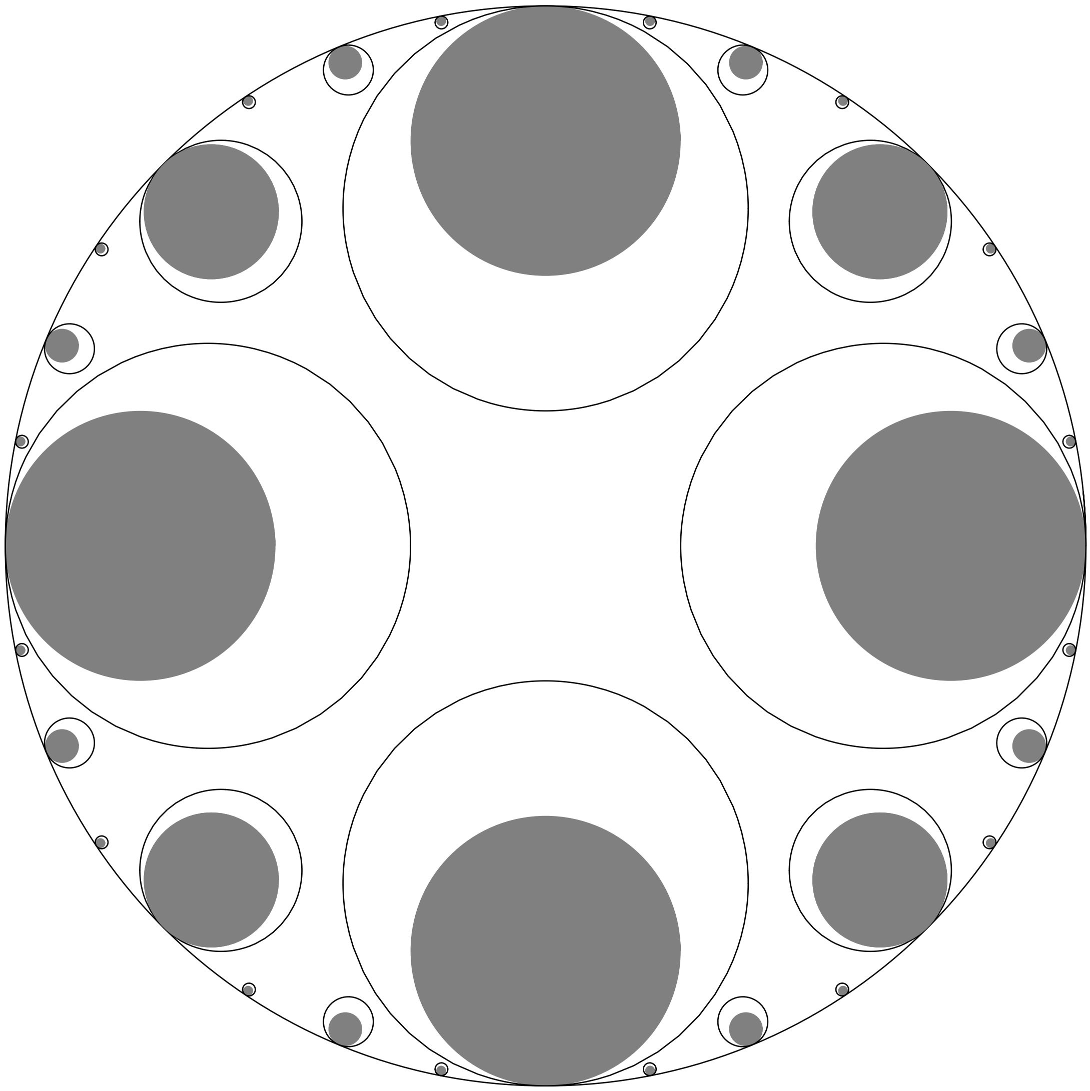
3. Podle věty 10.13 tvoří body lineárně dosažitelné z oblasti Ω (s omezenou hranicí) hustou část její hranice; i množina všech bodů nelineárně dosažitelných z Ω však může být „podstatnou částí“ $H(\Omega)$:

[55]) Čtenář po prostudování navržené konstrukce snadno nahlédne, že podobně lze postupovat i pro každé $n > 3$, dokonce i pro $n = \infty$.

[56]) Viz např. [6], str. 217 – 218; vyprávění je upraveno tak, aby všechny tři oblasti byly omezené.

Předcházející příklad lze modifikovat tak, aby množina všech bodů jednotkové kružnice C nelineárně dosažitelných z oblasti $\Omega \subset U := U(p, 1)$, kde $p := (0, 0)$, byla hustá v C:

Abychom zkrátili vyjadřování, nechť v tomto příkladu slovo „kruh“ znamená „uzavřený kruh“; slovy „dotýkající se“ budeme rozumět „dotýkající se zevnitř“.



Obr. 31. Oblast Ω_4. Kruhy $D(n, k)$ (tmavé) a kružnice $C(n, k)$ pro $n = 1, \ldots, 4$.

Pro $k = 1, \ldots, 4$ nechť je $B(1, k)$ kruh o poloměru $\rho_1 := \frac{3}{8}$, dotýkající se kružnice C v bodě

$$b(1, k) := (\cos \alpha(1, k), \sin \alpha(1, k)), \quad \text{kde} \quad \alpha(1, k) := \frac{k\pi}{2}. \tag{32}$$

Označme $C(1, k) := H(B(1, k))$, buď $D(1, 4)$, $k = 1, \ldots, 4$, kruh o poloměru $r_1 := \frac{1}{4}$ dotýkající se kružnice C v bodě (32) a D_1 nechť je sjednocení všech kruhů $D(1, k)$. Dokažme, že

$$\Omega_1 := \Omega - D_1 \tag{33}$$

je oblast. Důkaz na základě Janiszewského věty je snadný: Množiny $\mathbb{S} - U$, $D(1, 1)$ jsou uzavřené a neroztínají $\mathbb{S}$; protože jejich (jednobodový) průnik $b(1, 1)$ je souvislý, neroztíná $\mathbb{S}$ ani množina $(\mathbb{S} - U) \cup D(1, 1)$, tj. její doplněk

$$\Omega_1(1) := \mathbb{S} - ((\mathbb{S} - U) \cup D(1, 1) = U - D(1, 1) \tag{34}$$

je souvislý. Množina (34) je tedy oblast. Provedeme-li analogickou úvahu s ní a s kruhem $D(1,2)$, zjistíme, že i množina $\Omega_1(2) := \Omega_1(1) - D(1,2)$ je oblast. Celkem ve čtyřech krocích tak dokážeme, že oblastí je i množina (33).

Žádný z bodů $b(1,k)$ zřejmě není z Ω dosažitelný lineárně. Protože kružnice $C(1,k))$ je sjednocení dvou oblouků vycházejících z bodu $b(1,k)$ do Ω_1, jsou body $b(1,k)$ z Ω_1 dosažitelné nelineárně. Během následující konstrukce budeme oblast Ω_1 zmenšovat; protože však z U nikdy nevynecháme žádný bod sjednocení B_1 kruhů $B(1,k)$, zůstanou body $b(1,k)$ nelineárně dosažitelné i z menších oblastí, které postupně zkonstruujeme. [57])

Protože množina všech bodů

$$b(2,k) := (\cos\alpha(2,k), \sin\alpha(2,k)), \text{ kde } \alpha(2,k) := \frac{(2k-1)\pi}{2^3} \text{ a kde } k = 1, \dots, 2^2, \tag{35}$$

má od B_1 kladnou vzdálenost, existuje $\rho_2 \in (0, r_1)$ tak, že každý z kruhů $B(2,k)$ o poloměru ρ_2, dotýkající se kružnice C v bodě $b(2,k)$, je disjunktní s B_1. Zvolme pevně číslo $r_2 \in (0, \rho_2)$ a označme $D(2,k)$ kruh o poloměru r_2 dotýkající se kružnice C. Označme D_2 sjednocení D_1 se všemi kruhy $D(2,k)$, B_2 sjednocení B_1 se všemi kruhy $B(2,k)$ a nechť

$$\Omega_2 := \Omega_1 - B_2. \tag{36}$$

Jako nahoře se dokáže, že Ω je oblast a že všechny body $b(1,k)$, $b(2,k)$ jsou z ní nelineárně dosažitelné.

Předpokládejme, že pro některé $n \geq 2$ jsou definována čísla $\rho_n \in (0, r_{n-1})$, $r_n \in (0, \rho_n)$ a množiny B_n, D_n (složené z jistých kruhů dotýkajících se kružnice C v bodech $b(j,k)$, $j = 1, \dots, n$). [58]) Množina všech bodů

$$b(n+1,k) := (\cos\alpha(n+1,k), \sin\alpha(n+1,k)), \text{ kde } \alpha(n+1,k) := \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+2}}, \ k = 1, \dots, 2^{n+1}, \tag{37}$$

má pak kladnou vzdálenost od B_n, a existuje proto $\rho_{n+1} \in (0, r_n)$ tak, že kruhy $B(n+1,k)$ o poloměru ρ_{n+1}, dotýkající se kružnice C v bodech $b(n+1,k)$, jsou disjunktní s B_n. Zvolme pevně číslo $r_{n+1} \in (0, \rho_{n+1})$ a definujme $B(n+1,k)$ resp. $D(n+1,k)$ jako kruh o poloměru ρ_{n+1} resp. r_{n+1} dotýkající se kružnice C a buď B_{n+1} resp. D_{n+1} sjednocení B_n resp. D_n se všemi kruhy $B(n+1,k)$ resp. $D(n+1,k)$. Jako nahoře se dokáže, že

$$\Omega_{n+1} := \Omega_n - D_{n+1} \tag{38}$$

je oblast a že všechny body $b(1,k), \dots, b(n+1,k)$ jsou z ní nelinárně dosažitelné.

Buď konečně

$$D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \quad \Omega := U - D. \tag{39}$$

Tvrdíme, že Ω *je oblast, z níž je každý z bodů* $(\cos(2k\pi/2^n), \sin(2k\pi/2^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 2^n$, *dosažitelný, ale nelineárně.*

Protože Ω je otevřená množina, stačí dokázat, že pro každé dva její body $a \neq b$ existuje kontinuum $M \subset \Omega$ obsahující body a, b. Protože U je konvexní oblast, leží v U i úsečka $\langle a; b\rangle$; parametrizujme ji lineární funkcí $\lambda : \langle 0,1\rangle \to U$ tak, že $\lambda(0) = a$, $\lambda(1) = b$. Protože vzdálenost úsečky $\langle a; b\rangle$ od kružnice C je kladná a protože $\operatorname{Lim} D_n \subset C$, protíná tato úsečka jen konečný počet kruhů $D(n,k)$.

a) Neprotíná-li $\langle a; b\rangle$ žádný kruh $D(n,k)$, položíme $M := \langle a; b\rangle$.

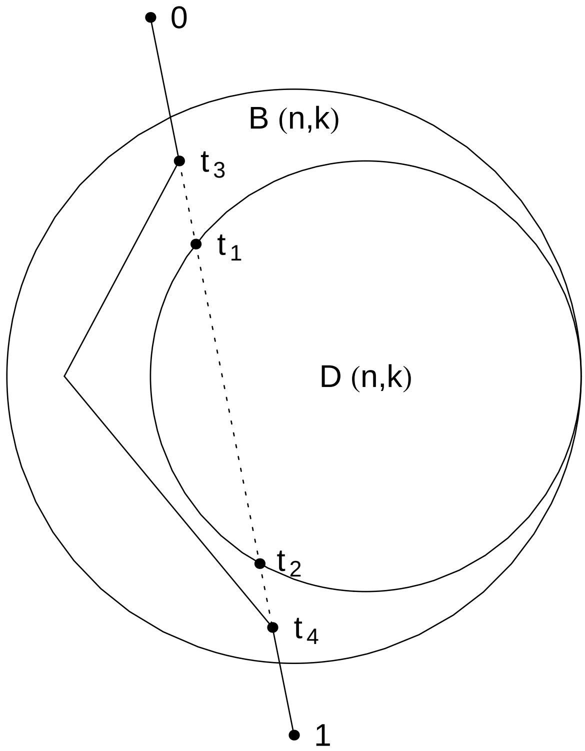
b) Nechť $\langle a; b\rangle$ protíná nějaký kruh $D(n,k)$; protože body a, b leží v Ω, neleží v $D(n,k)$, a existují proto čísla t_1, t_2 tak, že $0 < t_1 < t_2 < 1$, že množina $\lambda((0, t_1\rangle \cup \lambda\langle t_2, 1)$ je disjunktní s $D(n,k)$ a že body $\lambda(t_1)$, $\lambda(t_2)$ leží v $D(n,k)$. [59]) Vzhledem k tomu, jak je definován kruh $B(n,k)$, je zřejmé, že pro $t_3 \in (0, t_1)$, $t_4 \in (t_2, 1)$ dostatečně blízké k t_1 resp. k t_2 leží polouzavřené úsečky $\lambda((t_3, t_1\rangle$ a $\lambda(\langle t_2, t_4)$ v oblasti $\operatorname{Int} B(n,k) - D(n,k)$ a existuje proto spojitá funkce $\mu : \langle t_3, t_4\rangle \to \operatorname{Int} B(n,k) - D(n,k)$ tak, že $\mu(t_3) = la(t_3)$, $\mu(t_4) = \lambda(t_4)$. Nahradíme-li tedy úsečku $\lambda(\langle t_3, t_4\rangle)$ kontinuem $\mu(\langle t_3, t_4\rangle)$, dostaneme kontinuum M_1, které obsahuje body a, b a neprotíná kruh $D(n,k)$.

---

[57]) Úvahu analogickou úvaze z tohoto odstavce nebudeme v dalším krocích již provádět.

[58]) Před indukčním krokem jsme museli udělat dva kroky, protože jak kruhy $B(1,k)$, tak i kruhy $B(2,k)$ jsou čtyři a pak se teprve každým dalším krokem počet kruhů $B(j,k)$ zdvojnásobuje.

[59]) Postupujeme-li po úsečce $\langle a; b\rangle$ od bodu a k bodu b, je $\lambda(t_1)$ první, $\lambda(t_2)$ poslední bod této úsečky, který leží v kruhu $D(n,k)$. Viz obr. 32.



Obr. 32. Konstrukce kontinua M_1 (souvislá čára); odstraněná část úsečky $\langle a; b\rangle$ je vyznačena čárkovaně

c) Protíná-li kontinuum M_1 některý z kruhů $D(n', k')$, postupujeme podobně jako v části b) tohoto důkazu a získáme kontinuum M_2, které neprotíná ani $D(n, k)$, ani $D(n', k')$. Je zřejmé, že po konečném počtu kroků tak získáme kontinuum M s nahoře uvedenými vlastnostmi. To dokazuje, že Ω je oblast.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou příslušné body $b(1, k), \dots, b(n, k)$ dosažitelné z Ω_n po obloucích kružnic $C(1, k), \dots, C(n, k)$ a tyto kružnice leží v $\Omega_{n+1}, \Omega_{n+2}, \dots$, je zřejmé, že všechny body $b(n, k)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou z Ω dosažitelné, ale nelineárně.

4. Doplněk kontinua K z příkladu 4.4, obr. 8, má dvě komponenty. Body jednotkové kružnice jsou z neomezené komponenty (rovné vnějšku jednotkového kruhu) dosažitelné lineárně, ale z omezené komponenty (obsažené v jednotkovém kruhu) dosažitelné nejsou.

5. Kontinuum K z příkladu 4.5 má dvě omezené komponenty. Bod $(-1, 0)$ není dosažitelný z žádné z nich, bod $(1, 0)$ je dosažitelný z každé z nich, ale nelineárně. Všechny ostatní body úsečky s krajními body $(-1, 0)$, $(1, 0)$ jsou dosažitelné lineárně z každé z obou komponent.

6. Je-li Ω doplněk křivky z poznámky 4.12, jsou z Ω lineárně dosažitelné krajní body všech úseček (spojujících body Cantorova diskontinua s bodem $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$). Totéž platí pro vnitřní body úseček, které p spojují s bodem x prvního druhu. Žádný vnitřní bod žádné úsečky spojujících bod p s bodem x druhého druhu z Ω dosažitelný není. [60]) □

Věta 10.14. *Je-li $L \subset \mathbb{S}$ oblouk, je každý bod $a \in L$ dosažitelný z oblasti $\mathbb{S} - L$. Je-li $T \subset \mathbb{S}$ topologická kružnice, je každý bod $a \in T$ dosažitelný z každé komponenty množiny $\mathbb{S} - T$.*

Poznámka 10.11. Věta 10.14 ukazuje, že nejen „vnitřní topologické vlastnosti" rovinných oblouků resp. topologických kružnic jsou stejné jako vlastnosti úseček resp. kružnic, ale že totéž platí i pro jejich „vnější topologické vlastnosti". Toho lze využít k důkazu věty 10.14:

D ů k a z . Je-li $H : \mathbb{S} \to_{\text{na}} \mathbb{S}$ homeomorfní zobrazení, pro něž je $H(L) = \langle 0, 1\rangle$, existuje úsečka Λ s krajním bodem $H(a)$ tak, že $\Lambda \cap \langle 0, 1\rangle = H(a)$; $M := H_{-1}(\Lambda)$ je pak oblouk s krajním bodem a, pro

[60]) V tomto případě je nejen množina všech dosažitelných bodů, ale i množina všech nedosažitelných bodů hustá v $H(\Omega)$.

nějž je $(M - a) \cap L = \emptyset$.

Druhá část věty se dokáže zcela analogicky, jen $\langle 0, 1 \rangle$ nahradíme jednotkovou kružnicí. $\square$

Přikročme nyní k pomocným tvrzením, potřebným pro „zavodňování ostrova".

Lemma 10.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{S}$ je oblast a nechť $L_1 = a_1 b_1, \dots, L_n = a_n b_n$ je libovolný konečný systém disjunktních oblouků, pro něž je $L_k - a_k \subset \Omega$ pro $k = 1, \dots, n$.* [61]) *Pak je*

$$\Omega - \bigcup_{k=1}^{n} L_n \tag{40}$$

oblast.

D ů k a z stačí provést pro $n = 1$, protože obecný případ dokážeme opakováním úvahy, která následuje.

Položme $M_1 = \mathbb{S} - \Omega$, $M_2 = L_1$. Protože obě množiny jsou uzavřené, žádná z nich neroztíná $\mathbb{S}$ a jejich průnik je buď prázdný, nebo jednobodový (v obou případech tedy souvislý), neroztíná $\mathbb{S}$ (podle Janiszewského věty 10.9) ani množina $(\mathbb{S} - \Omega) \cup L_1$, což je totéž, jako když řekneme, že množina

$$\mathbb{S} - ((\mathbb{S} - \Omega) \cup L_1) = \Omega - L_1$$

je souvislá. Protože je zároveň otevřená, je to oblast.

Definice 10.3. Regulární lomenou čárou (zkratka r.l.č.) rozumíme množinu tvaru

$$L = \bigcup_{k=1}^{n} L_k \,, \tag{41}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a kde $L_k = \langle a_{k-1}; a_k \rangle \subset \mathbb{R}^2$ jsou úsečky splňující tyto podmínky:

1) každá úsečka L_k je rovnoběžná s některou souřadnicovou osou;

2) je-li $n > 1$, je $L_k \cap L_{k+1} = a_k$ pro $k = 1, \dots, n - 1$;

3) je-li $n > 2$ a jsou-li i, j dva indexy, pro něž je $|j - i| > 1$, je $L_i \cap L_j = \emptyset$.

Nebude-li výslovně řečeno něco jiného, orientujeme L tak, aby a_0 byl její **počáteční bod**, a_n její **koncový bod**, a budeme pak říkat, že L **spojuje** a_0 **s** a_n; je-li navíc $L \subset \Omega$, budeme říkat, je tyto body **spojuje v** Ω. $\square$

Snadno nahlédneme, že *regulární lomená čára je oblouk.*

Lemma 10.2. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, existuje pro každé dva různé body a, b z Ω r.l.č. $L \subset \Omega$, která spojuje a s b.*

D ů k a z . Několikrát budeme v dalším potřebovat toto evidentní tvrzení:

(42) *Je-li K otevřený kruh a je-li $u \in H(K)$, $v \in K$, existuje r.l.č. $\Lambda \subset \overline{K}$ spojující u s v tak, že $\Lambda - a \subset K$.* [62])

Označme M_1 množinu všech bodů $x \neq a$, pro něž existuje r.l.č. $L_x \subset \Omega$, která spojuje a s x, a buď $M := M_1 \cup a$. Protože M není prázdná množina, bude lemma dokázáno, dokážeme-li, že množina M je otevřená i uzavžená v Ω.

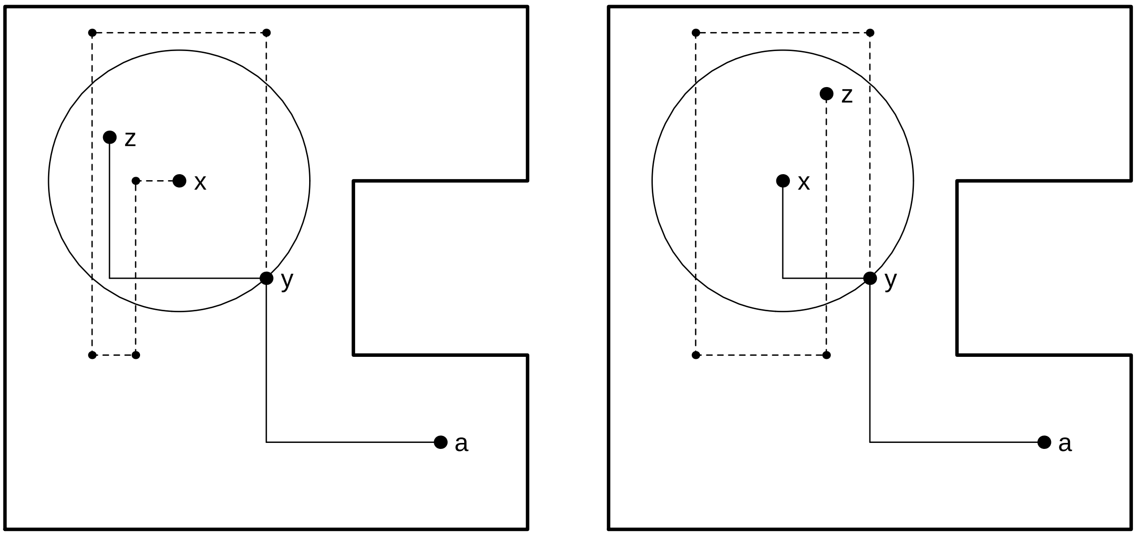
Je-li $\delta > 0$ tak malé, že $U := U(a, \delta) \subset \Omega$, existuje pro každý bod $x \in U$ různý od a r.l.č. $L_x \subset U$ spojující a s x. Z toho plyne, že $U \subset M$.

Je-li $a \neq x \subset M$, existuje r.l.č. $L_x \subset \Omega$ spojující a s x a $\delta > 0$ tak malé, že $\overline{U(x, \delta)} \subset \Omega - a$. Pak L_x protíná hranici kruhu $U(x, \delta)$ a existuje první bod $y \in L_x$ ležící v $H(U(x, \delta))$; buď L_y část L_x spojující a s y. Nechť $z \in U(x, \delta)$ a nechť Λ je r.l.č. spojující y se z, přičemž $\Lambda - y \subset U(x, \delta)$ (srov. s (42)). $L_y \cup \Lambda$ je pak r.l.č. spojující a se z, takže $z \in M$. Tím je důkaz otevřenosti množiny M dokončen.

Nechť $a \neq x \in \overline{M} \cap \Omega$ a nechť $\delta > 0$ je tak malé, že $\overline{U(x, \delta)} \subset \Omega$. Zvolme pevně nějaké $z \in U(x, \delta) \cap M$ a nějakou r.l.č. L_z spojující a se z; buď y její první bod ležící na hranici kruhu $U(x, \delta)$ a $L_y \subset L_z$ nechť je r.l.č. spojující a s y. Podle (42) existuje r.l.č. Λ spojující y s x tak, že $\Lambda - y \subset U(x, \delta)$. $L_y \cup \Lambda$ je pak r.l.č. spojující a s x v Ω; bod x leží tedy v M. Tím je dokázáno, že množina M je uzavřená v Ω, a zároveň je tím dokončen důkaz lemmatu 10.2.

[61]) Každý oblouk L_k tedy buď leží v Ω celý, nebo celý až na krajní bod a_k, který pak leží v $H(\Omega)$.

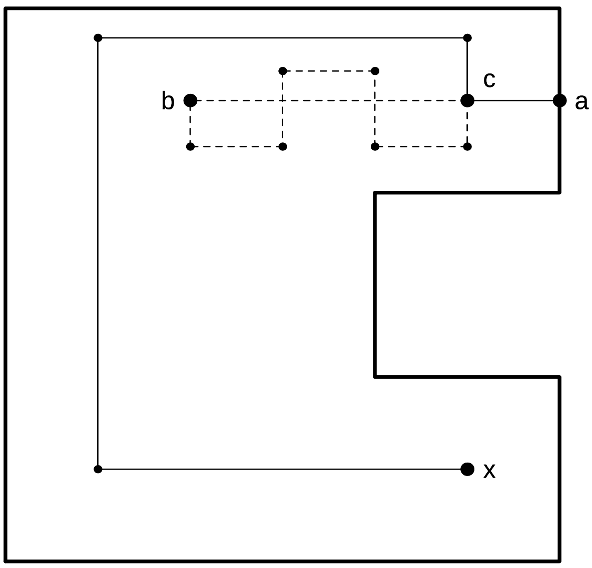
[62]) Λ lze vždy zvolit tak, aby to byla úsečka nebo sjednocení dvou úseček.



Obr. 33. K důkazu lemmatu 10.2: Vlevo otevřenost, vpravo uzavřenost v Ω množiny M;
vynechané části lomených čar jsou vyznačeny čárkovaně

Lemma 10.3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, nechť $a \in H(\Omega)$ a nechť existuje úsečka $L_b = \langle a; b\rangle$ rovnoběžná s některou ze souřadnicových os tak, že $L_b - a \subset \Omega$. Pak pro každé $x \in \Omega$ existuje r.l.č. L_x, která spojuje a s x a pro niž je $L_x - a \subset \Omega$.*

D ů k a z . Podle lemmatu 10.2 existuje r.l.č. L_{xb} spojující x s b v Ω. Orientujme úsečku L_b tak, že a je jejím prvním bodem, buď c její první bod ležící v L_{xb} a nechť L_c je část úsečky L_b mezi a a c. Orientujme r.l.č. L_{xb} tak, že jejím prvním bodem je x, a nechť L_{xc} je část L_{xb} mezi x a c. Jak snadno nahlédneme, je $L_c \cup L_{xc}$ hledaná r.l.č.



Obr. 34. K důkazu lemmatu 10.3;
vynechané části lomených čar jsou vyznačeny čárkovaně

Lemma 10.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, nechť $K \subset \Omega$ je neprázdná konečná množina a nechť existuje* *úsečka Λ vycházející z bodu $a \in H(\Omega)$ do Ω a rovnoběžná s některou souřadnicovou osou. Pak existuje r.l.č. L vycházející z bodu a do Ω tak, že $K \subset L$.*

D ů k a z . Protože úsečku L lze zkrátit, lze předpokládat, že je disjunktní s $K = \{c_1, \dots, c_n\}$ (kde $n \in \mathbb{N}$ a c_i jsou navzájem různé body).

Podle lemmatu 10.3 existuje r.l.č. L_1 vycházející z bodu a do Ω a spojující a s c_1. Je-li $n = 1$, jsme hotovi; je-li $n > 1$, pokračujme: Protože podle lemmatu 10.1 je $\Omega_1 := \Omega - L_1$ oblast a protože zřejmě existuje úsečka vycházející z bodu c_1 do Ω_1 a rovnoběžná s některou souřadnicovou osou, existuje r.l.č. L_2 vycházející z bodu c_1 do Ω_1 a spojující c_1 s c_2. $L_1 \cup L_2$ je r.l.č. vycházející z bodu a do Ω, obsahující bod c_1 a spojující a s c_2.

Je-li $n = 2$, jsme hotovi; jinak pokračujme analogicky jako dosud. Po konečném počtu kroků získáme žádanou r.l.č.

Definice 10.4. Otevřeným (resp. **uzavřeným**) δ-**čtvercem o středu** $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ budeme nazývat množinu

$$Q(x,\delta) := (x_1 - \delta, x_1 + \delta) \times (x_2 - \delta, x_2 + \delta) \ \ (\text{resp. } R(x,\delta) := \langle x_1 - \delta, x_1 + \delta\rangle \times \langle x_2 - \delta, x_2 + \delta\rangle). \tag{43}$$

Otevřeným (resp. **uzavřeným**) δ-**kanálem s osou** L nazveme sjednocení $ok(L,\delta)$ (resp. $uk(L,\delta)$) všech otevřených (resp. uzavřených) δ-čtverců o středech v L. **Kanálem s osou** L nazveme množinu, která je δ-kanálem s osou L pro nějaké $\delta > 0$. **Šířkou** uvedených kanálů nazveme číslo 2δ.

Poznámka 10.4. Otevřený (uzavřený) kanál, jehož osou je úsečka, je otevřený (uzavřený) interval. Z toho ihned plyne, že *pro každou r.l.č. L a každé $\delta > 0$ je otevřený kanál s osou L oblast, uzavřený kanál s osou L kontinuum.* Kromě toho zřejmě platí:

$$ok(L,\delta) \subset U(L, \sqrt{2}\,\delta) \ \ \big(\text{resp. } uk(L,\delta) \subset \overline{U(L,\sqrt{2}\,\delta)}\big). \tag{44}$$

Důležité bude při „zavodňování ostrova“ toto tvrzení:

Lemma 10.5. *Je-li L r.l.č., existuje $\Delta > 0$ tak, že pro žádné $\delta \in (0,\Delta)$ neroztíná $uk(L,\delta)$ rovinu $\mathbb{S}$.*

D ů k a z . Nechť L je jako v definici r.l.č., tj. nechť platí (41) spolu s podmínkami a), b), c). Podmínky c) zaručuje, že úsečky L_i, L_j mají pro každou dvojici indexů i,j, pro něž je $|i-j| > 1$, kladnou vzdálenost Δ_{ij}. Nechť číslo $\Delta > 0$ je menší než polovina minima všech těchto Δ_{ij} a nechť $\delta \in (0,\Delta)$. Vzhledem k (44) jsou pak kanály $uk(L_i,\delta)$, $uk(L_j,\delta)$ (kde $|i-j| > 1$) disjunktní. Žádný kanál, jehož osou je úsečka, neroztímá $\mathbb{S}$ a . průnikem δ-kanálů s osami L_k, L_{k+1} je δ-čtverec o středu a_k, tedy souvislá množina.

Postupujme podle Janiszewského věty 10.1: Kanály $uk(L_1,\delta)$, $uk(L_2,\delta)$ neroztínají $\mathbb{S}$ a jejich průnik je souvislý; proto ani jejich sjednocení $uk(L_1,\delta) \cup uk(L_2,\delta) = uk(L_1 \cup L_2, \delta)$ neroztíná $\mathbb{S}$. Je-li $n > 2$, uvažme, že průnik naposled napsaného kanálu s kanálem $uk(L_3,\delta)$ je uzavřený δ-čtverec o středu a_2. Podle Janiszewského věty tedy ani $uk(L_1 \cup L_2 \cup L_3$ neroztíná $\mathbb{S}$, atd. Po konečném počtu kroků bude tvrzení lemmatu dokázáno.

Definice 10.5. Regulárním kanálem nazveme kanál, který neroztíná $\mathbb{S}$. [63])

Lemma 10.6. *Pro každou omezenou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $K \subset M$ tak, že*

$$x \in M \ \Rightarrow\ \rho\,(x,K) < \varepsilon\,. \tag{45}$$

D ů k a z . Množina $N := \overline{M}$ je kompaktní, takže ze systému $\{U(x,\frac{1}{2}\varepsilon)\}_{x\in N}$, který pokrývá N, lze (podle Borelovy věty) vybrat konečný podsystém $U(x_1,\frac{1}{2}\varepsilon), \dots, U(x_m,\frac{1}{2}\varepsilon)$, který množinu N také pokrývá. Zvolíme-li pro každé $k = 1,\dots,m$ bod $y_k \in M \cap U(x_k,\frac{1}{2}\varepsilon)$, je zřejmě $U(x_k,\frac{1}{2}\varepsilon) \subset U(y_k,\varepsilon)$, takže množina $K := \{y_1,\dots,y_m\}$ má žádanou vlastnost.

Nyní již budeme moci dokázat toto tvrzení:

Věta 10.15. *V $\mathbb{R}^2$ existují omezené neprázdné disjunktní oblasti Ω_1, Ω_2, Ω_3 tak, že*

$$H(\Omega_1) = H(\Omega_2) = H(\Omega_3)\,. \tag{46}$$

---

[63]) Je-li tedy L r.l.č., je regulárním kanálem s osou L každý kanál s touto osou a dostatečně malou šířkou.

D ů k a z . Označme

$$A := \langle 0, \sqrt{2}\,\rangle \times \langle 0, \sqrt{2}\,\rangle, \tag{47}$$

nechť $A(0,1)$, $A(0,2)$, $A(0,3)$ jsou disjunktní uzavřené čtverce obsažené v $\operatorname{Int} A$ a nechť $a(0,i)$ je pro každé $i = 1,2,3$ střed některé (libovolné, ale pevně zvolené) strany čtverce $A(0,i)$. Snadno zjistíme, že

$$G := \operatorname{Int} A - (A(0,1) \cup A(0,2) \cup A(0,3)). \tag{48}$$

je oblast o průměru 2.

Nechť $K(1,1) \subset G$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti G vzdálenost ≤ 1 (srov. s lemmatem 10.6). Podle lemmatu 10.4 existuje r.l.č. $L(1,1)$ vycházející z bodu $a(0,1)$ do G, pro niž je $K(1,1) \subset L(1,1)$; její krajní bod různý od $a(0,1)$ označme $a(1,1)$. Podle lemmatu 10.5 existuje regulární kanál $uk(1,1)$ s osou $L(1,1)$ a šířkou $2\delta(1,1)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(0,2) \cup A(0,3)$. Protože průnik tohoto kanálu se čtvercem $A(0,1)$ je souvislý, je podle Janiszewského věty

$$G(1,1) := G - uk(1,1) \tag{49}$$

oblast; množina

$$A(1,1) := A(0,1) \cup uk(1,1) \tag{50}$$

je kompaktní a disjunktní s $A(0,2) \cup A(0,3)$.

Nechť $K(1,2) \subset G(1,1)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(1,1)$ vzdálenost ≤ 1, nechť $L(1,2)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(0,2)$ do $G(1,1)$ a obsahující množinu $K(1,2)$; její krajní bod různý od $a(0,2)$ označme $a(1,2)$. Nechť $uk(1,2)$ je regulární kanál s osou $L(1,2)$ a šířkou $2\delta(1,2)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(0,3) \cup A(1,1)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(1,2) := G(1,1) - uk(1,2) \tag{51}$$

oblast; množina

$$A(1,2) := A(0,2) \cup uk(1,2) \tag{52}$$

je kompaktní a disjunktní s $A(0,3) \cup A(1,2)$.

Nechť $K(1,3) \subset G(1,2)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(1,2)$ vzdálenost ≤ 1, nechť $L(1,3)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(0,3)$ do $G(1,2)$ a obsahující $K(1,3)$; její krajní bod různý od $a(0,3)$ označme $a(1,3)$. Nechť $uk(1,3)$ je regulární kanál s osou $L(1,3)$ a šířkou $2\delta(1,3)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(1,1) \cup A(1,2)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(1,3) := G(1,2) - uk(1,3) \tag{53}$$

oblast; množina

$$A(1,3) := A(0,3) \cup uk(1,3) \tag{54}$$

je kompaktní a disjunktní s $A(1,1) \cup A(1,2)$.

Je-li $1 \leq i \leq 3$ a označíme-li $ok(1,i)$ kanál $ok(L(1,i), \delta(1,i))$, jsou

$$\Omega(1,i) := \operatorname{Int} A(0,i) \cup ok(1,i) \tag{55}$$

disjunktní oblasti. Každý bod z $\overline{G(1,3)}$ má od každé z nich vzdálenost ≤ 1.

Místo formální indukce provedeme podrobně ještě další krok konstrukce – zejména proto, aby se plně vysvětlila užitá označení: [64])

[64]) Obr. 36 ilustruje situaci po třetím kroku konstrukce. Každá z množin $A(1,i)$ se skládá ze čtverce a silněji vyznačeného kanálu, $A(2,i)$ vznikne z $A(1,i)$ přidáním kanálu vyznačeného středně silnou čarou, $A(3,i)$ vznikne z $A(2,i)$ přidáním kanálu vyznačeného slabou čarou. Rozdělíme-li velký čtverec na 4, 16, 64 shodných čtverců, má každý bod z $G(1,3)$, $G(2,3)$, $G(3,3)$ vzdálenost nejvýše 1, 1/2, 1/4 od množin $A(1,i)$, $A(2,i)$, $A(3,i)$, protože každá z těchto množin má společné body s každým z uvedených 4, 16, 64 čtverců.

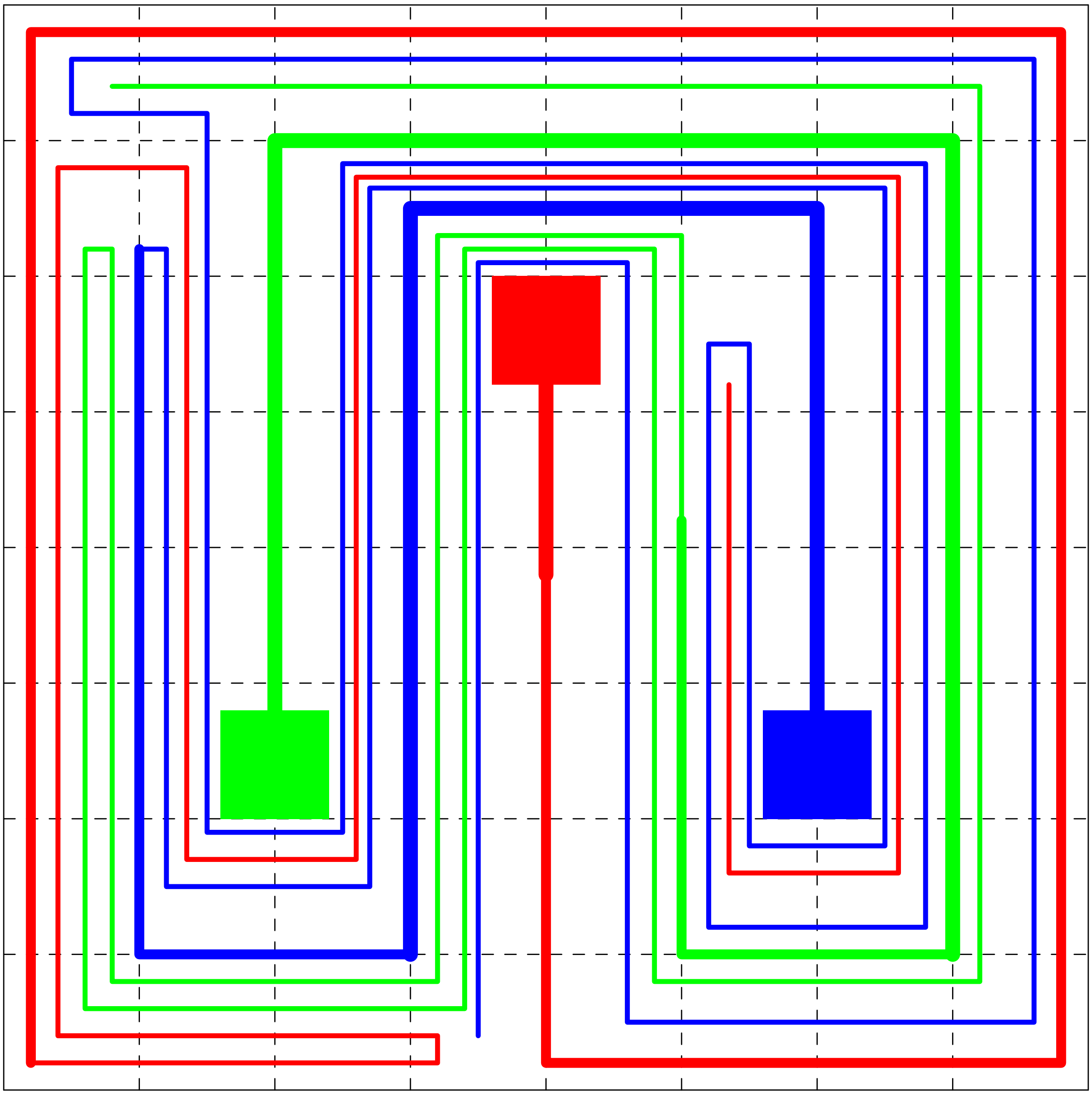
Nechť $K(2,1) \subset G(1,3)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(1,3)$ vzdálenost $\leq 2^{-1}$. Nechť $L(2,1)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(1,1)$ do $G(1,3)$ a obsahující množinu $K(2,1)$; její krajní bod různý od $a(1,1)$ označme $a(2,1)$. Označme krátce $uk(2,1)$ regulární kanál $uk(L(2,1), \delta(2,1))$, kde $\delta(2,1) < \delta(1,1)$ je tak malé, že kanál je disjunktní s $A(1,2) \cup A(1,3)$. Protože průnik tohoto kanálu s $A(1,1)$ je souvislý, je podle Janiszewského věty

$$G(2,1) := G(1,3) - uk(2,1) \tag{56}$$

oblast; množina

$$A(2,1) := A(1,1) \cup uk(2,1) \tag{57}$$

kontinuum disjunktní s $A(1,2) \cup A(1,3)$.



Obr. 35. K důkazu věty 10.15

Nechť $K(2,2) \subset G(2,1)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(2,1)$ vzdálenost $\leq 2^{-1}$, nechť $L(2,2)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(1,2)$ do $G(2,1)$ a obsahující množinu $K(2,2)$; její krajní bod různý od $a(1,2)$ označme $a(2,2)$. Nechť $uk(2,2)$ je regulární kanál s osou $L(1,2)$ a šířkou $2\delta(2,2) < 2\delta(1,2)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(1,3) \cup A(2,1)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(2,2) := G(2,1) - uk(2,2) \tag{58}$$

oblast; množina

$$A(2,2) := A(1,2) \cup uk(2,2) \tag{59}$$

kontinuum disjunktní s $A(1,3) \cup A(2,1)$.

Nechť $K(2,3) \subset G(2,2)$ je konečná množina, od níž má každý bod oblasti $G(2,2)$ vzdálenost $\leq 2^{-1}$, nechť $L(2,3)$ je r.l.č. vycházející z bodu $a(2,3)$ do $G(2,2)$ a obsahující $K(2,3)$; její krajní bod různý od $a(2,3)$ označme $a(3,3)$. Nechť $uk(2,3)$ je regulární kanál s osou $L(2,3)$ a šířkou $2\delta(2,3) < 2\delta(1,3)$ tak malou, že kanál je disjunktní s $A(2,1) \cup A(2,2)$. Podle Janiszewského věty je

$$G(2,3) := G(2,2) - uk(2,3) \tag{60}$$

oblast; množina

$$A(2,3) := A(1,3) \cup uk(2,3) \tag{61}$$

kontinuum disjunktní s $A(2,1) \cup A(2,2)$.

Je-li $1 \leq i \leq 3$ a označíme-li $ok(2,i)$ kanál $ok(L(2,i), \delta(2,i))$, jsou

$$\Omega(2,i) := \operatorname{Int} A(0,i) \cup ok(1,i) \cup ok(2,i) \tag{62}$$

disjunktní oblasti. Každý bod z $\overline{G(2,3)}$ má od každé z nich vzdálenost $\leq 2^{-1}$.

Postupujeme-li takto dále, dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $i = 1,2,3$ disjunktní oblasti $\Omega(n,i)$ a oblasti $G(n,i)$, pro něž platí: Posloupnosti $\{\Omega(n,i)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou (pro $i = 1,2,3$) rostoucí, posloupnost

$$G \supset G(1,1) \supset G(1,2) \supset G(1,3) \supset \ldots \supset G(n,1) \supset G(n,2) \supset G(n,3) \supset \ldots \tag{63}$$

klesající, přičemž každý bod z $\overline{G(n,3)}$ má od každé z oblastí $\Omega(n,i)$ vzdálenost $\leq 2^{-(n-1)}$. Položme

$$\Omega_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega(n,i) \text{ pro } i = 1,2,3 \tag{64}$$

a buď Γ průnik uzávěrů množin (63). Pak je Γ kontinuum, jehož každý bod má od každé z oblastí Ω_i vzdálenost 0, přičemž $\Gamma \cap \Omega_i = \emptyset$. Kontinuum Γ je tedy společnou hranicí všech tří oblastí Ω_i.