9. Racionální a regulární křivky

Uveďme nejdříve bez důkazu[36]) toto tvrzení:

Lemma 9.1. *Je-li $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, kde každá z množin vpravo je uzavřená (v P), přičemž pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\dim P_n = 0$, platí implikace*

$$p \in P_0\,,\ \dim_p P_0 = 0 \Rightarrow \dim_p P = 0\,. \tag{1}$$

Důsledek 1. *Je-li $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$, kde každá z množin vpravo má dimenzi 0 a je typu F_σ (v P), má i P dimenzi 0.*

Důsledek 2. *Je-li $P = A \cup B$, kde $\dim A = \dim B = 0$ a kde obě množiny jsou zároveň typu F_σ a G_δ, je i $\dim P = 0$.*

Důsledek 3. *Je-li $p \in P$ a $\dim(P - p) = 0$, je i $\dim P = 0$.*

Věta 9.1. *K tomu, aby prostor P se spočetnou bází byl racionální, je nutné a stačí, aby existovala spočetná množina $A \subset P$ tak, že $\dim(P - A) \leq 0$.*

D ů k a z . 1. Je-li P racionální prostor se spočetnou bází, existuje v něm báze složená z množin U_n, jejichž hranice jsou spočetné. Položíme-li $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(U_n)$, snadno nahlédneme, že $\dim(P - A) \leq 0$.

2. Je-li $P = A \cup B$, kde A je spočetná množina a $B = P - A$ má dimenzi 0, je pro každé $p \in P$ také (podle důsledku 3 lemmatu 9.1) $\dim_p(p \cup B) = 0$. Existují tedy libovolně malá okolí $U(p)$, jejichž hranice neprotíná B a je tedy částí spočetné množiny A.

Příklad 9.1. Typickou racionální křivkou je uzávěr P grafu funkce $\sin(1/x)$, $x \in (0, 1\rangle$. Je-li A_1 libovolná spočetná množina hustá v úsečce $\langle(0, -1); (0, 1)\rangle$, A_2 libovolná spočetná množina hustá v množině $\{(x, y);\ x \in (0, 1),\ y = \sin(1, x)\}$ a znamená-li $Q_n(p)$ otevřený čtverec o středu v bodě $p \in A := A_1 \cup A_2$ a délce strany $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, je hranice v P každého z těchto čtverců spočetná množina. Sjednocení S všech hranic je také spočetné, množina $P - S$ má dimenzi 0.

Věta 9.2. *Je-li $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, kde P_n jsou uzavřené racionální množiny, je i prostor P racionální. Speciálně: Kontinuum, které je sjednocením spočetně mnoha racionálních křivek, je racionální křivka.*

D ů k a z . Položme $C_1 := P_1$ a $C_n := P_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ pro každé $n > 1$. Pak jsou množiny C_n disjunktní, racionální a typu F_σ, přičemž $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Podle věty 9.1 existují spočetné množiny A_n a množiny B_n dimenze ≤ 0 tak, že $C_n = A_n \cup B_n$ (pro každé $n \in \mathbb{N}$). Položme $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; množina A je pak spočetná. Protože $B_n = B \cap C_n$, kde C_n je typu F_σ v P, je B_n typu F_σ v B. Podle důsledku 1 lemmatu 9.1 je $\dim B \leq 0$. Odtud podle věty 9.1 plyne, že prostor $P = A \cup B$ je racionální.

Poznámka 9.1. *Pro regulární křivky tvrzení analogické větě* 9.2 neplatí, *a to ani když jde o sjednocení dvou křivek.*

Příklad 9.2. Jsou-li P_1, P_2 křivky z příkladu 4.6, je $\operatorname{ord}_p P_1 \leq 3$ pro každé $p \in P_i$, $i = 1, 2$, ale $\operatorname{ord}_p P = \aleph$ pro každý bod $p \in \langle(0, 0); (1, 0)\rangle$, protože hranice každého dost malého okolí každého takového bodu protíná nekonečně mnoho úseček $\langle(0, 1/2^n); (1, 1/2^n)\rangle$. $\square$

Doplňme tento příklad obecným tvrzením:

Věta 9.3. 1. *Je-li K kontinuum konvergence prostoru P, je $\operatorname{ord}_p P \geq \aleph$ pro každé $p \in K$.*

2. *V žádném regulárním prostoru neexistuje žádné kontinuum konvergence.*

3. *Každé regulární kontinuum je dědičně lokálně souvislé.*

D ů k a z . 1. Je-li K kontinuum konvergence prostoru P, existují disjunktní kontinua K_n tak, že $K = \operatorname{Lim} K_n$, přičemž navíc je $K_n \cap K = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $p \in K$; protože K je vlastní kontinuum, existuje $U(p)$ tak, že $K - \overline{U(p)} \neq \emptyset$. Protože skoro všechna kontinua K_n mají pak společné body jak s $U(p)$, tak i s $K - \overline{U(p)}$, mají společné body i s $H(U(p))$. Protože K_n jsou disjunktní, obsahuje $H(U(p))$ nekonečně mnoho bodů.

Tvrzení 2 věty 9.3 je totožné s tvrzením 1.

[36]) Důkaz lze najít např. v [1], str. 171 – 173.

3. Podle věty 4.9 je kontinuum dědičně lokálně souvislé, právě když neobsahuje žádné kontinuum konvergence; podle tvrzení 2 tuto vlastnost má každé regulární kontinuum.

Poznámka 9.2. *Dědičně lokálně souvislé kontinuum nemusí být regulární, ale – jak ukázal Whyburn – je racionální.* [37])

Příklad 9.3. Iregulární dědičně lokálně souvislé kontinuum sestrojíme např. takto:
Označme S úsečku $\langle 0,1\rangle \times 0$ na ose x. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme A_n jako sjednocením půlkružnic

$$\left(x - \frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4^n}\,,\ y \geq 0\,,\ 1 \leq k \leq 2^{n-1} \tag{2}$$

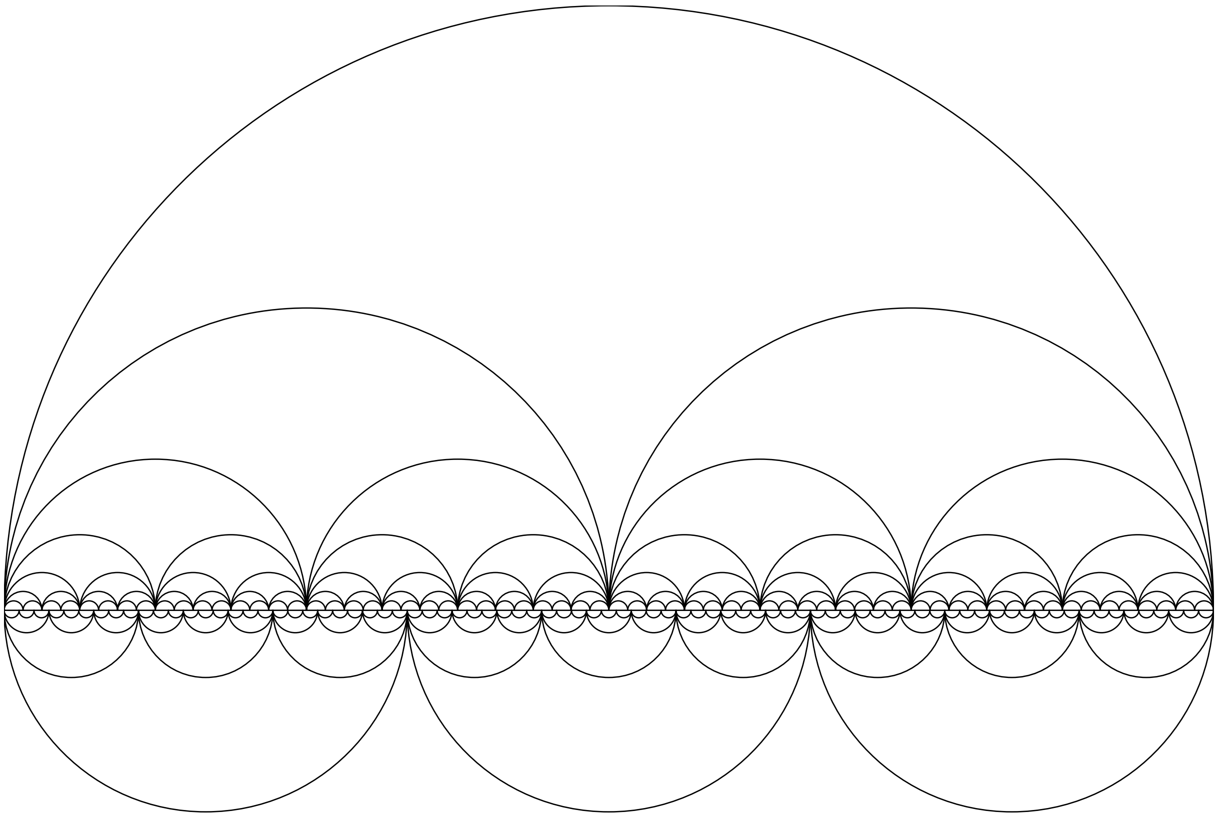
a pro každé $m \geq 0$ buď B_m sjednocením půlkružnic

$$\left(x - \frac{2k-1}{2\cdot 3^m}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4\cdot 9^m}\,,\ y \leq 0\,,\ 1 \leq k \leq 3^m\,. \tag{3}$$

Každé A_n a každé B_m je pak kontinuum a totéž platí i pro sjednocení

$$K := S \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m\,. \tag{4}$$

Na obr. 24 jsou kromě úsečky S nakreslena kontinua $A_1, \ldots, A_7$ a kontinua $B_1, \ldots, B_4$.



Obr. 24. Schéma kontinua z příkladu 9.3

Snadno nahlédneme, že hranice každého okolí každého bodu $(x,0) \in S$, kde x je dyadicky (resp. triadicky) racionální, protíná nekonečně mnoho kontinuí B_m (resp. A_n); není-li $x \in (0,1)$ ani dyadicky,

[37]) Viz Whyburn, [5], kap. V.

ani triadicky racionální, protíná hranice každého okolí bodu nekonečně mnoho kontinuí A_n a nekonečně mnoho kontinuí B_m. Každý bod $(x, 0) \in S$ má tedy řád rozvětvení rovný $\aleph$. $\square$

Není náhoda, že regulární body p křivek P_1, P_2 z příkladu 4.6*, které nejsou regulárními body jejich sjednocení $P_1 \cup P_2$, leží v průniku $P_1 \cap P_2$:*

Věta 9.4. *Jsou-li K_1, K_2 regulární křivky, je-li $p \in K_1 \cup K_2$ a $\mathrm{ord}_p(K_1 \cup K_2) = \aleph$, je $p \in K_1 \cap K_2$. Je-li $K_1 \cap K_2$ neprázdná totálně nesouvislá množina, je $K_1 \cup K_2$ regulární křivka.*

D ů k a z . 1. Je-li $p \in K_1 - K_2$ (resp. $p \in K_2 - K_1$), jsou všechna dost malá okolí bodu p disjunktní s K_2 (resp. s K_1). Z toho ihned plyne, že $\mathrm{ord}_p(K_1 \cup K_2)$ se rovná $\mathrm{ord}_p K_1$ (resp. $\mathrm{ord}_p K_1$), což je podle předpokladu $\leq \omega$.

2. Je-li $p \in K_1 \cup K_2$ a $\mathrm{ord}_p(K_1 \cup K_2) = \aleph$, existuje podle 2. části věty 8.3 vlastní kontinuum C obsahující bod p a složené výhradně z iregulárních bodů. Podle toho, co jsme dokázali v 1. části tohoto důkazu, je $C \subset K_1 \cap K_2$, takže množina $K_1 \cap K_2$ není totálně nesouvislá.

Věta 9.5. *Je-li C kontinuum kondenzace kontinua K, je množina*

$$R := \{x \in C\,;\ \mathrm{ord}_x K > 2\} \tag{5}$$

všech bodů rozvětvení kontinua K ležících v C hustá v C.

D ů k a z . Nechť C je kontinuum kondenzace kontinua K. Protože podle Janiszewského věty 4.1 existuje pro každý bod $x \in C$ a každé jeho okolí $U(x)$ různé od C vlastní kontinuum $C' \subset C \cap \overline{U(x)}$ a protože každé takové kontinuum C' je spolu s C řídké v K, *stačí ukázat, že C obsahuje aspoň jeden bod rozvětvení kontinua K.*

Zvolme v C nějaké dva body $p \neq q$; protože podle věty 6.2 existuje kontinuum $C'' \subset C$ ireducibilní mezi p, q a i toto kontinuum je řídké v K, *lze předpokládat, že C je ireducibilní mezi body p, q.*

Logicky jsou možné tyto dva případy:

a) Některý bod $x \in C$ je obsažen v nějakém kontinuu konvergence prostoru K; podle 1. tvrzení věty 9.3 je pak $\mathrm{ord}_x K \geq \aleph$ a jsme hotovi.

b) Žádný bod $x \in C$ neleží na žádném kontinuu konvergence prostoru K, tedy ani na žádném kontinuu konvergence kontinua C. Jinými slovy: Ireducibilní kontinuum C neobsahuje žádné kontinuum konvergence; podle věty 6.9 je to tedy oblouk, přičemž p, q jsou zřejmě jeho krajní body.

Zvolme libovolně bod $x \in C - \{p, q\}$. Jsou opět dvě možnosti: ba) $\mathrm{ord}_x K > 2$ a jsme hotovi, nebo bb) $\mathrm{ord}_x K = 2$. V tomto druhém případě existuje okolí U bodu x tak, že $\overline{U}$ neobsahuje žádný z bodů p, q a že $H(U)$ je dvoubodová množina, jejíž body označíme a, b. Protože oblouky py, qy obsažené v C mají společné body jak s U, tak s $K - \overline{U}$, protíná každý z nich i $H(U)$; je tedy $H(U) = \{a, b\} \subset C$.

Protože kontinuum C je řídké v K, *není $U \subset C$*, takže existuje bod $y \in U - C$. Označíme-li $D := \mathrm{komp}_y(U - C)$, protíná $\overline{D}$ (podle Janiszewského věty 4.1) množinu $H(U - C)$. Protože

$$H(U - C) = \overline{U - C} - (U - C) \subset (\overline{U} - U) \cup C = H(U) \cup C = C,$$

protíná množina $\overline{D}$ oblouk C. Zvolme v množině $\overline{D} \cap C$ bod z; pro každé dostatečně malé okolí V bodu z je množina $\overline{V}$ disjunktní s množinou $\{p, q, y\}$. Protože každá ze souvislých množin $pz \subset C$, $qz \subset C$, D obsahuje jak body z V, tak i body z $K - \overline{V}$, je průnik každé z nich s $H(V)$ neprázdný. Průniky jsou po řadě částí disjunktních množin $pz - z \subset C$, $qz - z \subset C$, $D \subset U - C$, a jsou tedy nejen neprázdné, ale i disjunktní. Z toho ihned plyne, že $\mathrm{ord}_z K \geq 3$.

Věta 9.6. *Je-li K kontinuum, jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

I. *K neobsahuje žádné kontinuum kondenzace.*

II. *Uzávěr $\overline{R}$ množiny R všech bodů rozvětvení kontinua K je buď prázdný, nebo má dimenzi* 0.

D ů k a z implikace I $\Rightarrow$ II. Neobsahuje-li K žádné kontinuum kondenzace, neobsahuje žádné kontinuum konvergence, a podle věty 4.9 je dědičně lokálně souvislé. Kdyby neplatilo tvrzení II, platila by nerovnost $\dim \overline{R} > 0$; podle věty 8.4 by kompaktní množina $\overline{R}$ nebyla totálně nesouvislá a obsahovala by tedy jakési vlastní kontinuum S, o němž lze (podle věty 6.2) předpokládat, že je ireducibilní. Podle věty 6.5 je pak S oblouk .

Je-li $x \in S$ a je-li $U(x)$ libovolné jeho okolí, jsou logicky možné tyto dva případy: a) $U(x) - S \neq \emptyset$, b) $U(x) \subset S$. Kdyby však nastala situace b), bylo by $\operatorname{ord}_y R = \operatorname{ord}_y S \leq 2$ pro každé $y \in U(x)$, takže $U(x)$ by neobsahovalo žádné body rozvětvení, což je ve sporu s podmínkou $x \in \overline{R}$.

Tím jsme dokázali, že pro každé $x \in S$ a pro každé jeho okolí $U(x)$ je $U(x) - S \neq \emptyset$; kontinuum S je tedy řídké v K, tj. je kontinuem kondenzace kontinua K – spor.

D ů k a z implikace non(I) $\Rightarrow$ non(II). Obsahuje-li K nějaké kontinuum kondenzace C, je $C \subset \overline{R}$ podle věty 9.5, takže $\dim \overline{R} \geq \dim C \geq 1$. $\square$

K důkazu následující věty budeme potřebovat toto užitečné tvrzení:

Lemma 9.2. *Je-li P dědičně lokálně souvislé kontinuum a leží-li body $a \neq b$ v nějaké oblasti $G \subset P$, existuje oblouk $ab \subset G$.*

D ů k a z . Pro každé $x \in G$ existuje $\varepsilon_x > 0$ tak, že uzávěr v P okolí $U(x, \varepsilon_x)$ je částí G; označíme-li

$$\Omega(x) := \operatorname{komp}_x U(x, \varepsilon_x), \tag{6}$$

jsou $\Omega(x)$ oblasti, jejichž uzávěry v P jsou kontinua obsažená v G. Protože oblasti $\Omega(x)$ pokrývají G, existuje podle lemmatu 5.4 (dokonce ireducibilní) řetěz

$$\Omega(x_1), \ldots, \Omega(x_s) \tag{7}$$

tak, že $a \in \Omega(x_1)$, $b \in \Omega(x_s)$. Množina

$$H := \bigcup_{k=1}^{s} \overline{\Omega(x_k)} \tag{8}$$

je pak kontinuum obsažené v G a obsahující body a, b; Protože P je dědičně lokálně souvislé, je H lokálně souvislé. Podle věty 5.5 lze proto body a, b spojit obloukem v $H \subset G$.

Věta 9.7. 1. *Existují-li v kontinuu P dva body $a \neq b$ tak, že $\operatorname{ord}_a P = \operatorname{ord}_b P = 1$ a že $\operatorname{ord}_x P = 2$ pro všechny ostatní body $x \in P$, je P oblouk ab.*

2. *Platí-li pro všechny body x neprázdného kontinua P rovnost $\operatorname{ord}_x P = 2$, je P topologická kružnice.*

D ů k a z . Poznamenejme především, že kontinuum splňující předpoklady buď prvního, nebo druhého tvrzení věty je dědičně lokálně souvislé (např. podle 3. části věty 9.3).

Ad 1. Podle věty 6.5 stačí dokázat, že P je ireducibilní mezi body a, b. Kdyby to nebyla pravda, existovalo by (podle věty 6.2) kontinuum $K \subsetneq P$ ireducibilní mezi body a, b, tedy oblouk ab. Je-li $c \in P - K$, existuje (podle věty 5.5) oblouk $L = ac \subset P$. Orientujme tento oblouk od bodu a k bodu c a nechť d je poslední bod oblouku L ležící v K. Kdyby bylo $d = a$, vycházely by z bodu a dva oblouky K a L, jejichž jediným společným bodem je a, a bylo by tedy $\operatorname{ord}_a P \geq 2$ – spor.

Je tedy $d \neq a$. Kdyby bylo $d = b$, vycházely by z bodu b dva oblouky bc a K s jediným společným bodem b, a by bylo $\operatorname{ord}_b P \geq 2$ – spor.

Zbývá tedy případ $a \neq d \neq b$, kdy však z bodu d vycházejí tři oblouky s jediným společným bodem d, a to oblouky da, db, dc; platila by proto nerovnost $\operatorname{ord}_d P \geq 3$ – spor.

Každá poloha bodu $d \in K$ vede tedy ke sporu; ireducibilita kontinua P je tím dokázána.

Ad 2. Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady druhé části věty, a buďte c, d dva různé body z P; podle Moorovy věty 4.5 stačí dokázat, že množina $P^* := P - (c \cup d)$ je nesouvislá.

Předpokládejme opak (takže P^* je oblast); podle věty 5.5 existuje oblouk $C = cd \subset P$. Protože rovnost $C = P$ by vedla k rovnosti $\operatorname{ord}_c P = 1$, je $C \neq P$. Zvolme $a \in C - (c \cup d)$ a $b \in P - C$. Protože P^* je oblast dědičně lokálně souvislého kontinua, existuje podle lemmatu 9.4 oblouk $D = ab \subset P^*$. Orientujme D od bodu a k bodu b a nechť z je poslední bod z D ležící v C. Je pak $z \neq b$ (protože $b \notin C$) a $c \neq z \neq d$ (protože $z \in D \subset P^*$). Protože oblouky $zb \subset D$, $zc \subset C$, $zd \subset C$ mají jediný společný bod z, je $\operatorname{ord}_z P \geq 3$ – spor.

Tím je věta 9.7 dokázána.