3. Lokálně souvislé prostory

Definice 3.1. Říkáme, že prostor P je **lokálně souvislý v bodě** $p \in P$, je-li $p \in \operatorname{Int}(\operatorname{komp}_p U(p))$ pro každé okolí $U(p)$ bodu p. Prostor P se nazývá **lokálně souvislý**, je-li lokálně souvislý v každém bodě $p \in P$.

Poznámka 3.1. Pojem lokální souvislosti v bodě a lokální souvislosti je zřejmě topologický. $\square$

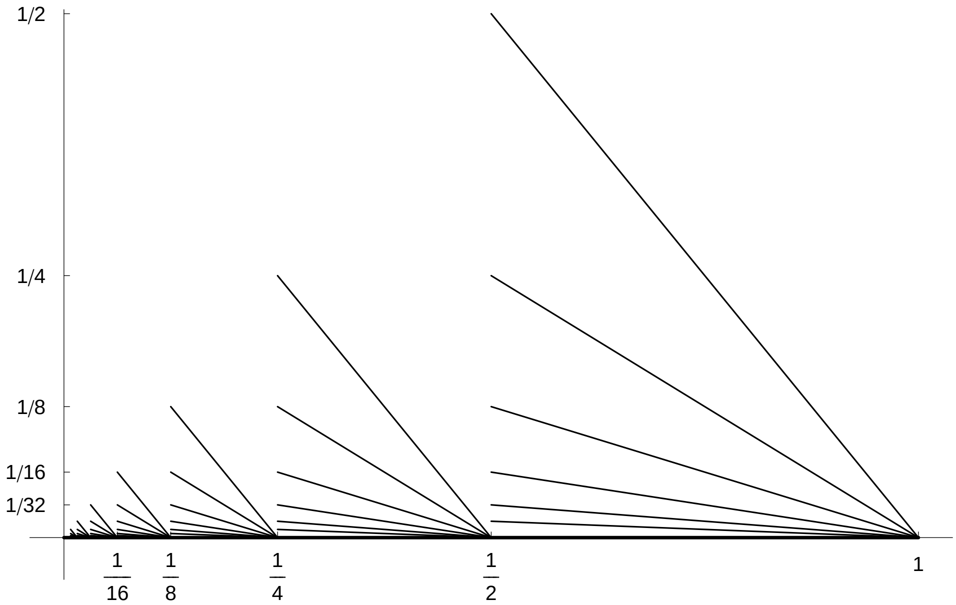
Ekvivalentní formulace definice 3.1: Prostor P je lokálně souvislý v bodě $p \in P$, právě když platí některá z těchto podmínek:

1. Pro každé okolí $U(p)$ existuje okolí $U_1(p) \subset \operatorname{komp}_p U(p)$.
2. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ a souvislá množina $M \subset U(p,\varepsilon)$ tak, že $U(p,\delta) \subset M$.
3. Existují libovolně malé [1]) souvislé podmnožiny prostoru P, které obsahují bod p uvnitř.
4. Existují libovolně malé souvislé uzavřené podmnožiny prostoru P, které obsahují p uvnitř. [2])

Poznámka 3.2. Jak ukazuje následující příklad, *neplatí toto tvrzení*: Je-li prostor P lokálně souvislý v bodě $p \in P$, existují libovolně malá souvislá okolí bodu p.

Příklad 3.1. Nechť $P \subset \mathbb{R}^2$ se skládá z úsečky spojující body $(0,0)$ a $(1,0)$ a z úseček spojujících bod $(2^{-n},0)$ s body $(2^{-(n+1)}, 2^{-(n+k)})$, kde $k = 1,2,3,\dots,\ n = 0,1,2,\dots$.

Prostor P je pak lokálně souvislý v bodě $(0,0)$, ale každé souvislé okolí tohoto bodu obsahuje celou úsečku $\langle 0,1\rangle$ osy x.



Obr. 3. K příkladu 3.1

Poznámka 3.3. Lokální souvislost prostoru P v bodě p je *lokální vlastnost*, tj. závisí jen na libovolně malých okolích bodu p. Odtud ihned plyne, že *otevřená podmnožina lokálně souvislého prostoru je lokálně souvislá.*

Věta 3.1. *Komponenty lokálně souvislého prostoru P jsou otevřené*[3]) *množiny; jsou to tedy oblasti prostoru P.*

D ů k a z . Je-li $p \in K$, kde K je komponenta prostoru P, je P okolím bodu p, a existuje tedy okolí $V(p) \subset \operatorname{komp}_p P = K$.

[1]) tj. s libovolně malým průměrem

[2]) Jsou to např. množiny tvaru $\operatorname{komp}_p \overline{U(p)}$.

[3]) tedy obojetné, sr. s pozn. 2.3, část 4

Poznámka 3.4. Platí toto tvrzení: *Je-li P lokálně souvislý prostor, existují ke každému bodu $p \in P$ libovolně malá souvislá okolí $U(p)$.* [4])

Jsou to např. množiny

$$\operatorname{komp}_p U(p, 1/n), \ n = 1, 2, \dots ,$$

otevřené podle věty 3.1.

Věta 3.2. 1. *Je-li $P = A \cup B$ a jsou-li množiny A, B lokálně souvislé v bodě $p \in A \cap B$, je i prostor P lokálně souvislý v bodě p.*

2. *Je-li $P = A \cup B$, kde množiny A, B jsou uzavřené a lokálně souvislé, je i prostor P lokálně souvislý.*

D ů k a z . 1. Je-li U okolí bodu $p \in P$, jsou množiny $U_1 = U \cap A$, $U_2 = U \cap B$ okolími bodu p v množinách A, B. Protože množiny A, B jsou lokálně souvislé v bodě p, existují okolí V_1 a V_2 bodu p v A a B tak, že $V_i \subset \operatorname{komp}_p U_i$ pro $i = 1, 2$. K okolím V_i existují množiny W_i otevřené v P tak, že $V_1 = W_1 \cap A$, $V_2 = W_2 \cap B$. Množina $W := W_1 \cap W_2$ je pak okolím bodu p v P, přičemž

$$W = W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_2 \cap (A \cup B) \subset V_1 \cup V_2 \subset \operatorname{komp}_p U_1 \cup \operatorname{komp}_p U_2 \subset \operatorname{komp}_p U .$$

2. Je-li $p \in P$, je buď $p \in A \cap B$ a prostor P je lokálně souvislý v bodě p podle části 1 této věty, nebo má p kladnou vzdálenost od jedné z množin A, B. Je-li např. $\rho(p, B) > 0$, je prostor P lokálně souvislý v bodě p proto, že v bodě p je lokálně souvislá množina A; množina B nemá na tuto okolnost žádný vliv.

Poznámka 3.5. Následující příklad ukazuje, že ve druhé části věty 13 *nelze* vynechat předpoklad, že množiny A, B jsou uzavřené.

Příklad 3.2. A nechť je úsečka spojující (v $\mathbb{R}^2$) body $(0, -1)$, $(0, 1)$ a B nechť je graf funkce $\sin(1/x)$, $0 < x \leq 1$; prostor $P = A \cup B$ není lokálně souvislý v žádném bodě z A, ačkoli A i B jsou lokálně souvislé podmnožiny prostoru P. (Viz obr. 3.2.)

Věta 3.3. (Whyburn.) *Je-li P souvislý lokálně souvislý prostor, je množina $S(a, b) \cup a \cup b$ pro každé dva body $a \in P$, $b \in P$ kompaktní.*

D ů k a z . 1. Ukažme, že množina $S = S(a, b) \cup a \cup b$ je uzavřená: Zvolme libovolný bod $p \in P - S$ a nechť $K := \operatorname{komp}_a(P - p)$. Protože $P - p$ je lokálně souvislý prostor, je K obojetná v $P - p$, tedy také lokálně souvislá. Kdyby bylo $b \notin K$, bylo by $P - p = K \cup (P - p - K)$, kde obě množiny vpravo jsou obojetné a disjunktní, tedy oddělené; z podmínek $a \in K$, $b \in P - p - K$ by plynulo, že bod p roztíná P mezi body a, b, což je spor. Je tedy $b \in K$.

Protože množina K je lokálně souvislá a protože $p \notin K$, existuje ke každému $x \in K$ souvislé okolí $U(x) \subset K$ [5]) tak, že uzávěr v P tohoto okolí splňuje podmínku $\overline{U(x)} \subset P - p$. Snadno nahlédneme, že množina všech $x \in K$, pro něž existuje řetěz $U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_s)$ takovýchto okolí spojující body a, x, je obojetná v K, tedy (vzhledem k souvislosti množiny K) rovná K.

Protože $b \in K$, existuje takový řetěz $U(a) = U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_s) = U(b)$ speciálně i pro bod b.

$$A := \bigcup_{i=0}^{s} \overline{U(x_i)} \tag{1}$$

je pak souvislá uzavřená množina obsažená v $P - p$ a obsahující oba body a, b. Protože $\rho(p, A) > 0$, existuje okolí $U(p)$ disjunktní s A. Žádný bod $x \in U(p)$ neroztíná P mezi body a, b, takže neleží v S. Okolí $U(p)$ je disjunktní s S, tedy obsažené v $P - S$. Protože bod $p \in P - S$ byl libovolný, je množina $P - S$ otevřená, množina S uzavřená.

2. Kompaktnost množiny S bude dokázána, dokážeme-li implikaci

$$N \subset S, \ S \cap \operatorname{der} N = \emptyset \ \Rightarrow \ N \textit{ je konečná.} \tag{2}$$

Nemá-li však množina $N \subset S$ v S (tedy ani v P, neboť S je uzavřená množina) žádný hromadný bod, existuje ke každému $x \in P$ souvislé okolí $U(x)$ tak, že množina $U(x) \cap N$ je konečná. Podobně jako v 1. části důkazu existuje řetěz $U(x_0), \dots, U(x_s)$ takovýchto okolí, který spojuje body a, b. Protože množina

$$B := \bigcup_{i=0}^{s} U(x_i) \tag{3}$$

---

[4]) Srov. s poznámkou 3.2!

[5]) Protože množina K je otevřená v $P - p$, tedy i v P, jsou okolí v K zároveň okolími v P.

obsahuje body a, b a je souvislá, obsahuje množinu $S(a, b)$, tedy i S, a tím spíše tedy je $N \subset B$. Protože každá z množin $U(x_i) \cap N$ je konečná, platí totéž o množině $B \cap N = N$. Tím je implikace (2), a tedy kompaktnost množiny S dokázána.

Věta 3.4. *Je-li P souvislý a lokálně souvislý prostor a je-li*

$$P = S(a, b) \cup a \cup b, \tag{4}$$

je P oblouk ab.

D ů k a z . Platí-li (4), je prostor P podle věty 3.3 kompaktní (tedy separabilní); protože je podle předpokladu i souvislý, je to podle věty 2.11 oblouk.