Zápočtová práce k předmětu

PRM042 Matematika na počítači

LS 2002 / 2003

Jaroslava Schovancová

9. září 2003

Obsah

Úvod

Zadání

Vyšetřete průbehy 20 funkcí pomocí programu Maple. Nechť jsou vyšetřované funkce něčím zajímavé.

Řešení

Při přemýšlení, jaké funkce budu vyšetřovat, aby byly něčím zajímavé, jsem se nechala inspirovat sbírkou příkladů [1]. Vybrala jsem si takové funkce, které na první pohled vypadají složitěji, a zároveň mají pěkné grafy. Ráda bych poděkovala své sestře Anně za pomoc při čtení této sbírky. Průběhy funkcí byly věšetřeny pomocí programu Maple V Release 5.

Dokumentace k souboru s výpočty obsahuje tři kapitoly a dvě přílohy.

V první kapitole Teoretické základy shrnuji teorii potřebnou k vyšetření průběhu funkce.

Ve druhé kapitole Procedury se pokusím objasnit princip procedur, kterými vyšetřuji průběhy funkcí.

Ve třetí kapitole Vyšetřování průběhu funkcí shrnuji výsledky, jakých jsem se dobrala.

Kapitola 1

Teoretické základy

Při VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE je potřeba udělat několik následujících kroků:

1. D_f, obor spojitosti
2. průsečíky se souřadnými osami
3. symetrie (sudost, lichost, periodicita)
4. limity - i jednostranné - v krajních bodech D_f
5. $f'(x)$, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy
6. $f''(x)$, intervaly konvexity a konkávity, inflexní body, H_f
7. f'_+, f'_- v bodech, kde neexistují f'
8. asymptoty v $\pm\infty$
9. graf funkce

Při vyšetřování průběhu funkcí jsem využila několik vět a definic. Definice a věty zde uvádím, důkazy vět jsou zazanamenány např. v [2], případně v [3].

1.1 Definiční obor, obor spojitosti

DEFINICE 1.1 Dány množiny M, N. Pak P je ZOBRAZENÍ (FUNKCE) množiny M do množiny N, jestliže platí

(i) $\forall\, x \in M\, \exists\, y \in N : [x, y] \in P$;

(ii) $\forall\, x \in M\, \forall\, y_1, y_2 \in N : [x, y_1] \in P \& [x, y_2] \in P \Rightarrow y_1 = y_2$;

(iii) $\forall\, [x, y] \in P \Rightarrow x \in M \,\&\, y \in N$.

DEFINICE 1.2 M nazýváme DEFINIČNÍM OBOREM ZOBRAZENÍ P.

DEFINICE 1.3 Množina $P(M) \subset N$, nazýváme OBOREM HODNOT ZOBRAZENÍ P.

DEFINICE 1.4 Řekneme, že funkce f je SPOJITÁ v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

DEFINICE 1.5 Funkce f je SPOJITÁ NA $(a; b)$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a; b)$.

VĚTA 1.1 (SPOJITÝ OBRAZ INTERVALU.) Spojitý obraz intervalu je interval (nebo 1 bod).

1.2 Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

DEFINICE 1.6 LICHÁ funkce: $\forall\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \,\&\, f(-x) = -f(x)$

DEFINICE 1.7 SUDÁ funkce: $\forall\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \,\&\, f(-x) = f(x)$

DEFINICE 1.8 Funkce f je PERIODICKÁ , jestliže $p \in \mathbb{R}$,$\forall\, x \in D_f \Rightarrow x + p \in D_f \,\&\, f(x) = f(x+p)$.

1.3 Limity

DEFINICE 1.9 OKOLÍ BODU: Nechť $A \in \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$, potom ϵ- okolím bodu A rozumíme množinu $\mathcal{U}^\epsilon(a) = (a - \epsilon; a + \epsilon)$.

Jednostranná okolí viz [2], případně v [3].

DEFINICE 1.10 PRSTENCOVÝM (REDUKOVANÝM) OKOLÍ BODU $a \in \mathbb{R}^*$ rozumíme množinu $\mathcal{P}^\epsilon_{(a)} = \mathcal{U}^\epsilon(a) \setminus \{a\}$.

DEFINICE 1.11 LIMITA FUNKCE. Nechť $a \in \mathbb{R}$, nehť f je reálná funkce, která je definována alespoň na nějakém redukovaném okolí bodu a. Potom řekneme, že f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže je splněn axióm $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in P^\delta_{(a)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}^\epsilon(a)$.

Jednostranné limity viz [2], případně v [3].

1.4 První derivace

DEFINICE 1.12 Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Pak řekneme, že f má v a DERIVACI $f'(a)$, jestliže existuje limita:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Jednostranné derivace viz [2], případně v [3].

VĚTA 1.2 (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE (LOKÁLNÍHO) EXTRÉMU.) Nechť $a \in \mathbb{R}$ je vnitřní bod intervalu $\mathcal{I}$. Nechť funkce f má v bodě a (lokální) extrém. Potom $f'(a)$ buď neexistuje, nebo je 0.

VĚTA 1.3 (O VZTAHU DERIVACE A MONOTONIE.) Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval (nedegenerovaný, tj. není to jeden bod) a nechť f je spojitá na $\mathcal{I}$. Nechť $\exists\, f'(a)$ v každém vnitřním bodu $a \in \mathcal{I}$.

Potom platí:

(i) Je-li $f' > 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je rostoucí NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

(ii) Je-li $f' \geq 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je neklesající NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

(iii) Je-li $f' < 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je klesající NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

(iv) Je-li $f' \leq 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je nerostoucí NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

1.5 Druhá derivace

DEFINICE 1.13 Nechť $\exists\, f^{(n)}(x)$ vlastní pro $x \in \mathcal{P}^{\delta}_{(a)}$, $a \in \mathbb{R}$. Potom $(n+1)$-NÍ DERIVACÍ f v bodě a budeme rozumět $\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h)-f^{(n)}(a)}{h}$.

DEFINICE 1.14 Nechť $\exists\, f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $T_a = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2, y = f(a) + f'(a)(x-a)\}$ („TEČNA“).

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží NAD TEČNOU T_a, jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$.

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží POD TEČNOU T_a, jestliže $f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$.

DEFINICE 1.15 Řekneme, že a je INFLEXNÍ BOD funkce f (f má v a inflexi), jestliže $\exists\, \delta > 0$ tak, že $[x, f(x)]$ leží nad T_a $\forall\, x \in (a-\delta; a)$

& $[x, f(x)]$ leží pod T_a $\forall\, x \in (a, a+\delta)$ nebo naopak.

DEFINICE 1.16 Řekneme, že funkce f je KONVEXNÍ na otevřeném intervalu $(a;b)$, jestliže $\forall\, x < y < z$, $x, y \in (a;b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

DEFINICE 1.17 Řekneme, že funkce f je KONKÁVNÍ na otevřeném intervalu $(a;b)$, jestliže $\forall\, x < y < z$, $x, y \in (a;b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Pro ryzí konvexitu nebo konkávitu funkce viz [2], případně v [3].

VĚTA 1.4 (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE INFLEXE.) Nechť $\exists\, f''(a) \neq 0$. Pak f nemá inflexi v bodě a.

VĚTA 1.5 (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE INFLEXE.) Nechť f má spojitou první derivaci na $(a;b)$. Nechť $\exists\, y \in (a;b)$ takové, že $f''(x) > 0$ $\forall\, x \in (a, y)$ & $f''(x) < 0$ $\forall\, x \in (y;b)$.

Potom y je bodem inflexe funkce f.

VĚTA 1.6 (O VZTAHU KONVEXITY A DRUHÉ DERIVACE.) Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' > 0$ na $(a;b)$, pak f je ryze konvexní na $(a;b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' \geq 0$ na $(a;b)$, pak f je konvexní na $(a;b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' < 0$ na $(a;b)$, pak f je ryze konkávní na $(a;b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' \leq 0$ na $(a;b)$, pak f je ryze konkávní na $(a;b)$.

1.6 Limity první derivace

VĚTA 1.7 (O LIMITĚ DERIVACÍ.) Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$, nechť existuje limita: $\lim_{x \to a_+} f'_+(a) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $f'_+(a) = A$.

1.7 Asymptoty funkce v $\pm\infty$

DEFINICE 1.18 Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je ASYMPTOTOU FUNKCE f v $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ $(\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0)$.

VĚTA 1.8 (O TVARU ASYMPTOTY.) Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b$ právě, když $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ (vlastní limitu) & $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ (vlastní limita).

Kapitola 2

Procedury

Nyní budu vyšetřovat funkci FUNKCE na intervalu INTERVALF.

2.1 Definiční obor, obor spojitosti

DEFINIČNÍ OBOR funkce musí uživatel zadat jako proměnnou INTERVALF. Obor spojitosti se zjišťuje pomocí procedury SPOJITOST.

Jako vstupní parametry procedury SPOJITOST používám proměnné FUNKCE a INTERVALF. Procedura SPOJITOST využívá Mapleovské knihovny **discont** a **iscont**.

Nejdříve procedura SPOJITOST pomocí Mapleovské funkce *iscont*(FUNKCE, $x =$ INTERVALF) zjistí, zda je FUNKCE na intervalu INTERVALF spojitá. Pokud je funkce na daném intervalu spojitá, vypíše hlášku a přejde dál. Pokud není funkce na intervalu INTERVALF spojitá, zjistí body nespojitosti a vypíše je (na obrazovku a do seznamu). Následovně se procedura pokusí původní interval INTERVALF „rozsekat“ na intervaly, na kterých spojitá je, a ty vypíše na obrazovku.

2.2 Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky grafu funkce se souřadnými osami x a y vyšetřuje procedura PRUSECIKY. Jako vstupní parametry procedury PRUSECIKY používám proměnnou FUNKCE. Procedura PRUSECIKY využívá Mapleovskou knihovnu **iscont**.

Nejdříve se zjišťuje existence průsečíku s osou x. Víme, že průsečík grafu funkce s osou x má souřadnice $X[x, 0]$. Tedy vyšetřím řešení rovnice $f(x) = 0$ pomocí Mapleovské funkce *solve*(FUNKCE=0, x). Pokud je výsledek prázdná množina, vypíše procedura hlášku o neexistenci průsečíku s osou x. Pokud nějaká řešení existují, vypíšou se všechny body $X[x, 0]$.

Vyšetřování průsečíku funkce s osou y probíhá následovně: nejdříve si zjistím, je-li funkce v okolí počátku $\mathcal{U}(0, 10^{-3})$ spojitá. Pokud je funkce spojitá v okolí počátku, dosadím do funkčního předpisu hodnotu $x = 0$ a vypíšu bod $Y[0, y]$. Pokud je funkce spojitá v okolí počátku, průsečík s osou y neexistuje.

2.3 Sudost, lichost funkce

Je-li funkce sudá nebo lichá na definičním oboru, zjišťuji pomocí procedury SUDALICHA. Jako vstupní parametry procedury SUDALICHA používám proměnné FUNKCE a INTERVALF. Procedura SUDALICHA využívá Mapleovskou knihovnu **iscont**.

Nejdřív zjistím symetrii definičního oboru. Pokud není obor symetrický, nemůže být daná funkce ani lichá, ani sudá. Následovně řídím výpočet dle (DEFINICE 1.6 a 1.7).

2.4 Periodicita funkce

Je-li funkce periodická na definičním oboru, zjišťuji pomocí procedury PERIODICKA. Jako vstupní parametry procedury PERIODICKA používám proměnnou FUNKCE.

Výpočet řídím dle (DEFINICE 1.8). Nejdříve do pomocné proměnné dosadím funkční hodnotu funkce v bodě x, pak do jiné proměnné dosadím funkční hodnotu v bodě $x+p$, potom řeším rovnici $f(x) = f(x+p)$, abych získala hodnotu parametru p, který má význam periody funkce.

2.5 Limity

Limity se počítají pomocí dvou procedur. Procedura LIMITA používá jako vstupní parametry proměnné FUNKCE a INTERVALF. Je-li FUNKCE spojitá na intervalu INTERVALF, rovnou přesměruje výpočet na proceduru VYPISLIMITU. Pokud FUNKCE není spojitá na intervalu INTERVALF, „rozseká“ INTERVALF na intervaly spojitosti a poté přesměruje výpočet na proceduru VYPISLIMITU.

Procedura VYPISLIMITU používá jako vstupní parametry proměnné FUNKCE, bod ve kterém limitu počítám a směr (limita zprava, zleva). Vypočítá limitu pomocí Mapleovské funkce *limit*(FUNKCE, KDE, SMER) a vypíše výsledek.

2.6 První derivace, monotonie, extrémy

Monotonie a extrémy funkce se zjišťují pomocí tří procedur.

Procedura DERIVACE1 používá jako vstupní parametry proměnné FUNKCE a INTERVALF. Tato procedura nejdříve zadanou funkci zderivuje, pak zjistí případné kandidáty na extrémy ($f'(x) = 0$). Pokud kandidáti na extrémy existují, přesměruje výpočet na proceduru ZJISTIEXTREM, jinak vypíše hlášku o monotonii funkce.

Procedura ZJISTIEXTREM používá jako vstupní parametry funkci, kterou vyšetřuji, a krajní body intervalů obklopujících kandidáta na extrém. Tato procedura využívá postačující podmínky existence lokálního extrému. Pokud se v daném bodě mění znaménko první derivace a zároveň je v bodě hodnota první derivace rovna 0, tak vypíše extrém a monotonii v okolních intervalech. Pokud se znaménko derivace nemění, přesměruje výpis na proceduru MONOTONIE.

Procedura MONOTONIE používá jako vstupní parametry hodnotu první derivace na intervalu (a,b) a body a a b. Tato procedura využívá (VĚTY 1.3) a vypíše hlášku o monotonii funkce na intervalu.

2.7 Druhá derivace, konvexita a konkávita, inflexní body

Konvexita, konkávita a inflexní body funkce se zjišťují pomocí tří procedur.

Procedura DERIVACE2 používá jako vstupní parametry proměnné FUNKCE a INTERVALF. Tato procedura nejdříve zadanou funkci dvakát zderivuje, pak zjistí případné kandidáty na inflexní body ($f''(x) = 0$). Pokud kandidáti na inflexní body existují, přesměruje výpočet na proceduru ZJISTIINFLEXI, jinak vypíše hlášku o konvexitě či konkávitě funkce.

Procedura ZJISTIINFLEXI používá jako vstupní parametry funkci, kterou vyšetřuji, a krajní body intervalů obklopujících kandidáta na inflexní bod. Tato procedura využívá (VĚTY 1.6). Pokud se v daném bodě mění znaménko druhé derivace a zároveň je v bodě hodnota druhé derivace rovna 0, tak vypíše inflexní bod a monotonii v okolních intervalech. Pokud se znaménko derivace nemění, přesměruje výpis na proceduru INFLEXE.

Procedura INFLEXE používá jako vstupní parametry hodnotu druhé derivace na intervalu (a, b) a body a a b. Tato procedura využívá (VĚTY 1.6) a vypíše hlášku o konvexitě či konkávitě funkce na intervalu.

2.8 Obor hodnot

Jako vstupní parametry procedury OBORHODNOT používám proměnné FUNKCE, INTERVALF a přesnost, s jakou má Maple určit krajní bod intervalu spojitosti. Procedura OBORHODNOT využívá Mapleovské knihovny **discont** a **iscont**.

Nejdřív zjistím, je li funkce na intervalu INTERVALF spojitá. Pokud je spojitá, použiji větu (VĚTA 1.1) a Mapleovskou funkci *INTERVAL* a vypíšu výsledek. Není-li funkce spojitá na definičním intervalu, „rozsekám“ ji dle intervalů spojitosti a dle věty (VĚTA 1.1) určuji funkční hodnoty na intervalech spojitosti.

2.9 Limity derivací v bodech, kde derivace neexistují

Jako vstupní parametry procedury LIMITYDERIVACI používám proměnné FUNKCE a INTERVALF. Procedura LIMITYDERIVACI využívá Mapleovskou knihovnu **discont**.

Nejdříve určím body nespojitosti první derivace a pak výpočet limity derivace přesměruji na výše zmíněnou proceduru VYPISLIMITU, která vypočítá limity derivací a vypíše hlášky.

2.10 Asymptoty funkce v $\pm\infty$

Procedura ASYMPTOTY používá jako vstupní parametr proměnnou FUNKCE.

Určování asymptot probíhá dle věty (VĚTA 1.8). Procedura vypíše hlášku o (ne)existenci asymptoty funkce v $\pm\infty$.

2.11 Graf funkce

Graf funkce lze vykreslit přímo pomocí Maplovské funkce *plot(...)*.

Kapitola 3

Vyšetřování průběhu funkcí

Zabývala jsem se vyšetřováním průběhu těchto funkcí:

1. $f(x) = \mathrm{arctg}\,\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$
2. $f(x) = \sin(x)^{\mathrm{cotg}\,(x)}$
3. $f(x) = \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{8} + x)^{\mathrm{tg}\,(2x)}$
4. $f(x) = \left(\frac{1+\mathrm{tg}\,(x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^3}}$
5. $f(x) = \frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}$
6. $f(x) = \sin(\cos(\mathrm{tg}\,(x)^3)^2)$
7. $f(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x+2)\cdot\sin(x)}{1-\cos(x+2)\cdot\cos(x)}\right)$
8. $f(x) = \frac{\exp(-x^2)\cdot\arcsin(\exp(-x^2))}{\sqrt{1-\exp(-x^2)}} + \frac{1}{2}\ln(1-\exp(-x^2))$
9. $f(x) = \ln(\cosh(x)) + \frac{1}{2\cosh^2(x)}$
10. $f(x) = \mathrm{arctg}\,(x\tanh(x))$
11. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$
12. $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)^3)^2)$
13. $f(x) = \frac{1}{4\cdot(1+x^4)} + \frac{1}{4}\ln(\frac{x^4}{1+x^4})$
14. $f(x) = \exp(\mathrm{tg}\,(\frac{1}{x}))$
15. $f(x) = \frac{1}{1-\exp\left(\frac{x}{1-x}\right)}$
16. $f(x) = \frac{\ln(1+\exp(x))}{x} - \frac{x}{1-x^2} - x$

17. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{1+x^2}+\sin(3x)\right)} + x$

18. $f(x) = -\frac{x}{1-x^2} + \frac{x}{\sin\left(\frac{5x}{1+x^2}\right)}$

19. $f(x) = \exp(\sqrt{|\sin(3x)|}) + x$

20. $f(x) = \exp(-x^2) \cdot \cos(2x)$

3.1 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$, $D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f, funkce je spojitá na intervalu $(-10; 1)$ a na intervalu $(1; 2)$ a na intervalu $(2; 3)$ a na intervalu $(3; 10)$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: $X_1[2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}; 0]$, $X_2[2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}; 0]$.

Průsečík s osou Y: $Y[0; -\operatorname{arctg}(\frac{11}{6})]$

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá, perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f:

- $x = -5+$: $-\operatorname{arctg}(\frac{73}{168})$
- $x = 10-$: $\operatorname{arctg}(\frac{191}{504})$

Limita v bodech nespojitosti:

- $x = 1-$: $-\frac{\pi}{2}$
- $x = 1+$: $+\frac{\pi}{2}$
- $x = 2-$: $-\frac{\pi}{2}$

- $x = 2+$: $+\frac{\pi}{2}$
- $x = 3-$: $-\frac{\pi}{2}$
- $x = 3+$: $+\frac{\pi}{2}$

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}}{1 + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)^2}$$

Nejsou žádní kandidáti na extrémy. Na všech intervalech spojitosti funkce klesá.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-2)^3} + \frac{2}{(x-1)^3}}{1 + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)^2} - 2\frac{\left(-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}\right)\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)}{\left(1 + \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)^2\right)^2}$$

Inflexní body: Maple vyřešil rovnici velmi obecně, inflexní body se nacházejí v blízkosti bodů X_1 a X_2.

Funkce je konkávní na těchto intervalech: na $(-10; 1)$ a na $(1; 2-\frac{1}{3}\sqrt{3})$ a na $(2; 2+\frac{1}{3}\sqrt{3})$.

Funkce je konvexní na těchto intervalech: na $(2-\frac{1}{3}\sqrt{3}; 2)$ a na $(2+\frac{1}{3}\sqrt{3}; 3)$ a na $(3, 10)$.

Funkce nabývá hodnot $H_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti:

- $x = 1-$: -1
- $x = 1+$: -1
- $x = 2-$: -1
- $x = 2+$: -1
- $x = 3-$: -1
- $x = 3+$: -1

Asymptoty v $\pm\infty$

Asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$.

3.2 $f(x) = \sin(x)^{\mathbf{cotg}\,(x)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \sin(x)^{\mathrm{cotg}\,(x)}, D_f = (0;\pi)$:

Funkce není spojitá v bodech $k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osami: $X \equiv Y[0;0]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena, ale je to 2π-periodická funkce.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: neexistuje.

- $x = 0+$: 0
- $x = \pi-$: ∞

Limita v bodech nespojitosti:

- $x = k\pi + \frac{\pi}{2}+$: 1
- $x = k\pi + \frac{\pi}{2}-$: 1

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \sin^{\mathrm{cotg}\,(x)}(x) \cdot \left(-\frac{\ln(\sin(x))(1+\mathrm{tg}^{\,2}(x))}{\mathrm{tg}^{\,2}(x)} + \frac{\cos(x)}{\mathrm{tg}\,(x)\sin(x)}\right)$$

Nejsou žádní kandidáti na extrémy.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \sin^{\mathrm{cotg}\,(x)}(x) \cdot \left(-\frac{\ln(\sin(x))(1+\mathrm{tg}^{\,2}(x))}{\mathrm{tg}^{\,2}(x)} + \frac{\cos(x)}{\mathrm{tg}\,(x)\sin(x)}\right)^2 +$$

$$+\sin^{\operatorname{cotg}(x)}(x)\cdot\Big(\frac{2\ln(\sin(x))(1+\operatorname{tg}^2(x))^2}{\operatorname{tg}^3(x)}-\frac{2\ln(\sin(x))(1+\operatorname{tg}^2(x))^2}{\operatorname{tg}(x)}-$$
$$\frac{2\cos(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))^2}{\operatorname{tg}^2(x)\sin(x)}-\operatorname{cotg}(x)-\frac{\cos^2(x)}{\operatorname{tg}(x)\sin^2(x)}\Big)$$

Maple nenašel žádné inflexní body, ale z grafu je patrné, že body se souřadnicemi $x \doteq 0,7$ a $x \doteq 1,6$ by jimi mohly být.

Funkce je konkávní na tomto intervalu: na $(\sim 0,6; \sim 1,6)$.

Funkce je konvexní na těchto intervalech: na $(0; \sim 0,6)$ a na $(\sim 1,6; \pi)$.

Funkce nabývá hodnot $H_f = (0; \pi)$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti:

- $x = 0+$: 0
- $x = \pi-$: ∞

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.3 $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)^{\operatorname{tg}(2x)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)^{\operatorname{tg}(2x)}, D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá v bodech $\{k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}+k\pi; \frac{3\pi}{8}+k\pi\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X nebyly nalezeny. Průsečík s osou Y: $Y[0; 1]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f:

- $x = -10+$: $\exp(\mathrm{tg}\ (20)\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1-\mathrm{tg}\ (10)}{1+(\sqrt{(2)}-1)\mathrm{tg}\ (10)}\right))$
- $x = 10-$: $\exp(\ln\Big(\ (\frac{\pi}{8}+10)\ \Big)\mathrm{tg}\ (20))$

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) \ = \ \mathrm{tg}^{\ \mathrm{tg}\ (2x)}(\frac{\pi}{8}+x)\left(2(1+\mathrm{tg}^{\ 2}(2x))\ln(\mathrm{tg}\ (\frac{\pi}{8}+x))+\frac{\mathrm{tg}\ (2x)\left(1+\mathrm{tg}^{\ 2}(\frac{\pi}{8}+x)\right)}{\mathrm{tg}\ (\frac{\pi}{8}+x)}\right)$$

Nebyli nalezeni žádní kandidáti na extrémy.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) \ = \ \ldots\text{(viz soubor s řešením.)}$$

Maple nenašel žádné inflexní body. Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}^+$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.4 $f(x) \ = \ \left(\frac{1+\mathbf{tg}\ (x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^3}}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) \ = \ \left(\frac{1+\mathrm{tg}\ (x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^3}}, D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá v bodech $\{k\pi+\frac{\pi}{2};\pi;k\pi-\frac{\pi}{4}\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečík s osou X: $X[\frac{3\pi}{4}; 0]$ Průsečík s osou Y: nenalezen.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena, ale funkce se jeví jako 2π-periodická.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Nebyli nalezeni žádní kandidáti na extrémy.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Maple nenašel žádné inflexní body. Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}^+ \setminus (0; 1)$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.5 $f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\cos(x) + x\sin(x)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\cos(x) + x\sin(x)}$, $D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky se souřadnými osami: nenalezeny.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) \ = \ \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) \ = \ \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.6 $f(x) \ = \ \sin(\cos(\mathbf{tg}\ (x)^3)^2)$

D_f, obor spojitosti

$f(x) \ = \ \sin(\cos(\mathrm{tg}\ (x)^3)^2), D_f = (0; \pi)$:

Funkce není spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: viz soubor s řešením.

Průsečíky s osou Y: $Y[0, \sin(1)]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena, ale jeví se jako π-periodická funkce.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = (0; \sin(1))$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.7 $f(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x+2)\cdot\sin(x)}{1-\cos(x+2)\cdot\cos(x)}\right)$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x+2)\cdot\sin(x)}{1-\cos(x+2)\cdot\cos(x)}\right)$, $D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: viz soubor s řešením.

Průsečíky s osou Y: $Y[0, \sin(1)]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena, ale jeví se jako π-periodická funkce.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = (-\frac{\pi}{2}; 0, 2)$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.8 $f(x) = \frac{\exp(-x^2)\cdot\arcsin(\exp(-x^2))}{\sqrt{1-\exp(-x^2)}} + \frac{1}{2}\ln\left(1-\exp(-x^2)\right)$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \frac{\exp(-x^2)\cdot\arcsin(\exp(-x^2))}{\sqrt{1-\exp(-x^2)}} + \frac{1}{2}\ln\left(1-\exp(-x^2)\right), D_f = (-10;10)$:

Funkce není spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: nenalezen.

Průsečíky s osou Y: neexistuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = (-\frac{\pi}{2}; 0,2)$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $\pm\infty$ asymptotu $y = 0$.

3.9 $f(x) = \ln(\cosh(x)) + \frac{1}{2\cosh^2(x)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \ln(\cosh(x)) + \frac{1}{2\cosh^2(x)}$, $D_f = (-10; 10)$:

Funkce je spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: nenalezen.

Průsečíky s osou Y: neexistuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda na D_f nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Lokální minimum: $M[0, \frac{1}{2}]$.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce je konvexní na D_f.

Funkce nabývá hodnot $H_f = (\frac{1}{2}; \infty)$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $+\infty$ asymptotu $y = x + \ln(2)$. Funkce má v $+\infty$ asymptotu $y = -x + \ln(2)$.

3.10 $f(x) = \textbf{arctg}\ (x \tanh(x))$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \operatorname{arctg}\ (x \tanh(x)), D_f = (-10; 10)$:

Funkce je spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osami:$X \equiv Y[0, 0]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je sudá. Perioda nalezena, ale....

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) \;=\; \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Lokální minimum: $M[0,0]$.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) \;=\; \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = (-\text{arctg}\,(10\tanh(10)); \text{arctg}\,(10\tanh(10)))$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $\pm\infty$ asymptotu $y \;=\; \frac{\pi}{2}$.

3.11 $f(x) \;=\; \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) \;=\; \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}, D_f = (-10; 10)$:

Funkce je spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: je jich opravdu hodně. Průsečíky s osou Y: $Y[0,?]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je sudá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.12 $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)^3)^2)$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \ln(\ln(\ln(x)^3)^2), D_f = (0; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f. Body nespojitosti: $\{0, 1, \exp(1)\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: $X_1[\exp(\exp(\frac{1}{3})); 0]$ $X_2[\exp(\exp(-\frac{1}{3})); 0]$ Průsečík s osou Y: neexistuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:
$$f'(x) \;=\; \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:
$$f''(x) \;=\; \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$
Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.13 $f(x) \;=\; \frac{1}{4\cdot(1+x^4)} + \frac{1}{4}\ln(\frac{x^4}{1+x^4})$

D_f, obor spojitosti

$f(x) \;=\; \frac{1}{4\cdot(1+x^4)} + \frac{1}{4}\ln(\frac{x^4}{1+x^4})$, $D_f = (-3;3)$:

Funkce není spojitá na D_f. Bod nespojitosti: $\{0\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky se souřadnými osami: neexistují.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je sudá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}^-$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $\pm\infty$ asymptotu $y = 0$.

3.14 $f(x) = \exp(\mathbf{tg}\ (\frac{1}{x}))$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \exp(\operatorname{tg}(\frac{1}{x})), D_f = (-5; 5)$:

Funkce není spojitá na D_f. Body nespojitosti: $\{0; \frac{2}{\pi(2k+1)}\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky se souřadnými osami: neexistují.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je sudá. Perioda nalezena, ale....

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}^+$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $\pm\infty$ asymptotu $y = 1$.

3.15 $f(x) = \frac{1}{1-\exp\left(\frac{x}{1-x}\right)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \frac{1}{1-\exp\left(\frac{x}{1-x}\right)}, D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f. Body nespojitosti: $\{0; 1\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky se souřadnými osami: neexistují.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je sudá. Perioda nalezena, ale....

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \dots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \dots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R} \setminus (0; 1)$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $+\infty$ asymptotu $y = \frac{-1}{-1+\exp(-1)}$. Funkce má v $-\infty$ asymptotu $y = \frac{1}{-1+\exp(1)}$.

3.16 $f(x) = \frac{\ln(1+\exp(x))}{x} - \frac{x}{1-x^2} - x$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \frac{\ln(1+\exp(x))}{x} - \frac{x}{1-x^2} - x, D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f. Body nespojitosti: $\{0; \pm 1\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečík s osou X: existuje. Průsečík s osou Y: neexistuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je lichá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $+\infty$ asymptotu $y = -x + 1$. Funkce má v $-\infty$ asymptotu $y = -x$.

3.17 $f(x) = \frac{1}{\mathbf{tg}\left(\frac{x}{1+x^2}+\sin(3x)\right)} + x$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{1+x^2}+\sin(3x)\right)} + x, D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: existuje; s osou Y: neexistuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je zajímavá, možná i lichá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:
$$f'(x) = \dots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:
$$f''(x) = \dots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.18 $f(x) = -\frac{x}{1-x^2} + \frac{x}{\sin\left(\frac{5x}{1+x^2}\right)}$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x}{\sin\left(\frac{5x}{1+x^2}\right)}$, $D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f. Body nespojitosti: $\{\pm 1, \dots\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečík s osou X: existuje. Průsečík s osou Y: existuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.19 $f(x) = \exp(\sqrt{|\sin(3x)|}) + x$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \exp(\sqrt{|\sin(3x)|}) + x, D_f = (-10; 10)$:

Funkce není spojitá na D_f. Body nespojitosti: $\{k\frac{\pi}{3}, \ldots\}$.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečík s osou X: existuje.Průsečík s osou Y: existuje.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce není ani lichá, ani sudá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f: viz soubor s řešením.

Limita v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) = \ldots \text{(viz soubor s řešením.)}$$

Funkce nabývá hodnot $H_f = \mathbb{R}$.

Limity derivací

Limita derivace v bodech nespojitosti: viz soubor s řešením.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce nemá v $\pm\infty$ asymptotu.

3.20 $f(x) = \exp(-x^2) \cdot \cos(2x)$

D_f, obor spojitosti

$f(x) = \exp(-x^2) \cdot \cos(2x), D_f = (-4; 4)$:

Funkce je spojitá na D_f.

Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky s osou X: $X_{1,2}[\pm\frac{\pi}{4}; 0]$; s osou Y: $Y[0; 1]$.

Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Funkce je sudá. Perioda nenalezena.

Limity

Limita (jednostranná) v krajních bodech D_f:

- $x = -4+$: $\exp(-16)\cos(8)$
- $x = 4-$: $\exp(-16)\cos(8)$

První derivace, monotonie, extrémy

První derivace:

$$f'(x) \;=\; -\,2x\exp(-x^2)\cos(2x) - 2\exp(-x^2)\sin(2x)$$

V bodech $M_{1,2}[\sim \pm 1,15; \sim -0,2]$ jsou lokální minima. V bodě $M_3[0;1]$ je lokální maximum.

Na intervalu $(-4; \sim -1,15)$ a na intervalu $(0; \sim 1,15)$ funkce klesá.

Na intervalu $(\sim -1,15; 0)$ a na intervalu $(\sim +1,15; 4)$ funkce roste.

Druhá derivace, konvexita či konkávita, inflexní body, obor hodnot

Druhá derivace:

$$f''(x) \;=\; -\,6\exp(-x^2)\cos(2x) + 4x^2\exp(-x^2)\cos(2x) + 8x\exp(-x^2)\sin(2x)$$

Na intervalu $(-4; \sim -1,5)$ a na intervalu $(\sim -0,9; \sim 0,9)$ a na intervalu $(\sim 1,5; 4)$ je funkce konkávní.

Na intervalu $(\sim -1,5; \sim -0,9)$ a na intervalu $(\sim 0,9; \sim 1,5)$ je funkce konvexní.

Funkce nabývá hodnot $H_f = (\sim -0.2; 1)$.

Limity derivací

První derivace funkce je spojitá ve všech bode D_f.

Asymptoty v $\pm\infty$

Funkce má v $\pm\infty$ asymptotu $y = 0$.

Příloha A

Zdrojový text

A.1 Definiční obor, obor spojitosti

Spojitost

Procedura pro zjišťování spojitosti: spojitost
Vstupní parametry jsou funkce, kterou vyšetřuji, a interval, na kterém chci funkci vyšetřovat. Výsledek zjištění (je spojitá na I, není spojitá na I) vypíše jako hlášku.

```
> spojitost := proc(funkce, interval)
>
>    description "Tato procedura zjisti, zda je funkce na daném
>    (otevřeném, uzavřeném) intervalu spojitá, případně vypíše body
>    nespojitosti";
>
> readlib(discont):
> ulist:=convert(discont(funkce,x),list):
> BodyNespojitosti:=sort( ulist );
> readlib(iscont):
>    if iscont(funkce,x=interval)=true then
>          print("Funkce f(x)=".funkce." je spojitá na daném intervalu.")
>    else
>          print("Funkce f(x)=".funkce." není spojitá na daném intervalu.");
>          print("Nespojitost v bodech: x[i]=".BodyNespojitosti.".");
>          print("Intervaly spojitosti jsou (tj. funkce je definována
>          na intervalech...):");
>          PocetBoduNespojitosti:=nops(BodyNespojitosti);
>          A:=lhs(interval);
>          B:=rhs(interval);
>         for k from 1 to PocetBoduNespojitosti
>         do
>              k:
>              if k=1 then
>                 c:=op(k,BodyNespojitosti);
>                   if op(k,BodyNespojitosti)>A then
>                      print("(".A.", ".c.")");
>                   fi;
>              else
>                 if k<PocetBoduNespojitosti then
>                   bodM:=op(k-1,BodyNespojitosti);
>                   bodN:=op(k,BodyNespojitosti);
>                   print("(".bodM.", ".bodN.")");
>                 else
```

```
>                     bodM:=op(k-1,BodyNespojitosti);
>                     bodN:=op(k,BodyNespojitosti);
>                     print("(".bodM.", ".bodN.")");
>                     if op(k,BodyNespojitosti)<B then
>                        print("(".bodN.", ".B.")");
>                     fi
>                  fi
>               fi
>          od
>    fi
> end:
```

A.2 Průsečíky se souřadnými osami

Průsečíky se souřadnými osami

Procedura pro zjišťování průsečíků funkce se souřadnými osami:
pruseciky. Vstupní parametry je funkce, kterou vyšetřuji.
Výstupem je hláška o souřadnici průsečíku.

```
> pruseciky := proc(funkce)
>
>    description "Tato procedura zjisti pruseciky funkce s osou X";
>
> # prusecik s X:
> x00:=solve(funkce=0,x);
>    if x00=NULL then
>       print("Průsečík funkce f(x)=".funkce." s osou X neexistuje.");
>    else
>       print("Průsečík(y) funkce f(x)=".funkce." s osou X:");
>       PocetPrusecikusX:=nops( [x00] ):
>        for k from 1 to PocetPrusecikusX
>        do
>            k:
>            bodX:=x00[k]:
>            print("[".bodX.",0]");
>        od;
>    fi;
>
> # prusecik s Y:
>
> readlib(iscont):
>    if iscont(funkce,x=-10^(-3)..+10^(-3))=true then
>       y00:=eval(subs(x=0,funkce));
>       print("Průsečík funkce f(x)=".funkce." s osou Y:");
>          print("[0,".y00."]");
>    else
>       print("Průsečík funkce f(x)=".funkce." s osou Y neexistuje.");
>    fi;
> end:
```

A.3 Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

Sudost, lichost, periodicita

Procedura pro zjišťování sudosti / lichosti a periodicity funkce:
SudaLicha. Vstupní parametry je funkce, kterou vyšetřuji
na intervalu. Výstupem je hláška o sudosti/lichosti.

```
> SudaLicha := proc(funkce, interval)
>
```

```
>    description"Tato procedura zjisti, zda je definiční obor funkce
symetrický a následně zda je funkce lichá/sudá/ani lichá, ani sudá.
Zjišťuje také periodu funkce.";
>
> # zjistuji symetrii definicniho oboru
>    readlib(iscont):
>    readlib(discont):
>
>    if ((iscont(funkce,x=interval)=true) and (lhs(interval)+
>    rhs(interval)=0))=true
>       then symetrie:=true;
>       BodyNespoj:=NULL
>    fi;
>
>    if lhs(interval)+rhs(interval)<>0 then
>       symetrie:=false;
>       BodyNespoj:=NULL
>    else
>       ulist:=convert(discont(funkce,x),list):
>       BodyNespoj:=sort( ulist );
>       Pocet:=nops( BodyNespoj );
>          for k from 1 to Pocet
>             do
>                if k=1 then
>                   if member( op(k,BodyNespoj) , BodyNespoj)=true then
>                      symetrie:=true
>                   else
>                      symetrie:=false
>                   fi
>                fi;
>                l:=-op(k,BodyNespoj);
>                if ((member( l , BodyNespoj)=true) and (symetrie=true)) then
>                   symetrie:=true
>                else
>                   symetrie:=false
>                fi
>             od;
>       fi;
> # zjistuji lichost/sudost funkce
>    if symetrie=false then
>       print("Funkce f(x)=".funkce." není ani sudá, ani lichá, protože není
>       symetrický definiční obor.")
>    else
>       fx:=unapply(funkce,x);
>       LHS:=fx(x);
>       RHS:=subs(x=-x,LHS);
>       if simplify(LHS/RHS)=1 then
>          print("Funkce f(x)=".funkce." je sudá.")
>       else
>          if simplify(LHS/RHS)=-1 then
>             print("Funkce f(x)=".funkce." je lichá.")
>          else
>             print("Funkce f(x)=".funkce." není ani sudá, ani lichá, protože
              nesplňuje podmínku f(x)=f(-x) nebo f(x)=-f(-x).")
>          fi
>       fi
>    fi
> end:
```

Procedura pro zjišťování periodicity funkce: Periodicka
Vstupní parametry je funkce, kterou vyšetřuji.
Výstupem je hláška o periodicitě dané funkce.

```
> Periodicka := proc(funkce)
>
>    description"Tato procedura zjisti, zda je funkce periodická.";
>
```

```
>     fx:=unapply(funkce,x);
>     r1:=fx(x);
>     r2:=subs(x=x+p,r1);
>     LHSx:=solve(r1=r2,x):
>     RHSp:=solve(r1=r2,p);
>     if LHSx<>NULL then
>        Perioda :=LHSx;solve(LHSx=RHSp,p):
>        print("Funkce f(x)=".funkce." má periodu P=".Perioda.".")
>     else
>        print("Perioda nenalezena.")
>     fi
> end:
```

A.4 Limity

Limity, jednostranné limity, limity v krajních bodech definičního oboru

Procedura VypisLimitu pro počítání limit funkce v nekonečnech a v bodech nespojitosti. Vstupní parametry je funkce, kterou vyšetřuji, bod kde, kde limitu počítám, a smer počítání limity, který nabývá hodnot "", left a right. Výstupem je hláška o výsledku limity.

```
> VypisLimitu:= proc(funkce,kde,smer)
>
>     description "Tato procedura vypise limitu a vypocita jeji hodnotu.";
>
> if smer="" then
>     znaklimity:=Limit(funkce,x=kde):
>     vysledeklimity:=limit(funkce,x=kde):
>     vypislimity:=znaklimity=vysledeklimity:
>     print("Limita v ".kde);
>     print(vypislimity)
> else
>     znaklimity:=Limit(funkce,x=kde,smer):
>     vysledeklimity:=limit(funkce,x=kde,smer):
>     vypislimity:=znaklimity=vysledeklimity:
>     if smer=left then
>        print("Limita v ".kde." zleva:")
>     else
>        print("Limita v ".kde." zprava:")
>     fi;
>       print(vypislimity)
> fi
> end:
```

Procedura Limita pro počítání limit funkce.
Vstupní parametry je funkce, kterou vyšetřuji na intervalu.
Výstupem je hláška o limitách.

```
> Limita:= proc(funkce,interval)
>
>     description "Tato procedura vypise limitu a vypocita jeji hodnotu.";
>
> nespojitost:=discont(funkce,x):
> bodynespojitosti:=nops(nespojitost):
>
> if iscont(f,x=interval)=true
> then
>       VypisLimitu(funkce,lhs(interval),"");
>       VypisLimitu(funkce,rhs(interval),"")
> else
>       VypisLimitu(funkce,lhs(interval),"");
>       VypisLimitu(funkce,rhs(interval),"");
```

```
>     for k from 1 to evalf(bodynespojitosti)
>     do
>        print("............................................");
>        k:
>        bod:=nespojitost[k]:
>        print("Bod nespojitosti: x=".bod):
>
>        VypisLimitu(funkce,bod,left);
>
>        VypisLimitu(f,bod,right);
>
>        if k=bodynespojitosti then
>        print("............................................")
>        fi
>     od
> fi
> end:
```

A.5 První derivace, monotonie, extrémy

První derivace, intervaly monotonie, lokální extrémy

Procedura pro zjišťování monotonie: Monotonie
Vstupní parametry jsou dfxi, tedy hodnota 1. derivace na intervalu ohraničeném zleva bodem Li a zprava bodem Pi. Výsledek zjištění (je rostoucí na I, je klesající na I, je konstatní na I, má minimum/maximum v bodě) vypíše jako hlášku.

```
> Monotonie:=proc(dfxi,Li,Pi)
>    description "Tato procedura popise monotonii na intervalu.";
>
>    if evalf(dfxi)<0 then
>       print("Na intervalu (".Li.", ".Pi.") funkce klesá.")
>    else
>       if evalf(dfxi)>0 then
>          print("Na intervalu (".Li.", ".Pi.") funkce roste.")
>       else
>          if evalf(dfxi)=0 then
>             print("Na intervalu (".Li.", ".Pi.") je funkce konstantní.")
>          fi
>       fi
>    fi;
> end:
```

Procedura pro zjišťování extrému: ZjistiExtrem
Vstupní parametry jsou funkce, kterou vyšetřuji, a krajní body intervalů (L1, P1, L2, P2), které obklopují kandidáta na minimum/maximum. Výsledek zjištění (funkce má/nemá minimum/maximum v bodě, na I1 je rostoucí/klesající, na I2 je rostoucí/klesající) vypíše jako hlášku.

```
> ZjistiExtrem := proc(funkce,L1,P1,L2,P2)
>    description "Tato procedura zjisti, zda je v danem bode extrem";
>    Dce1:=diff(funkce,x);
>    c1:=P1-10^(-3);
>    c2:=P1+10^(-3);
>    dfx:=unapply(Dce1,x);
>    dfx1:=dfx(c1);
>    dfx2:=dfx(c2);
>    fx:=unapply(funkce,x);
>    mx:=P1;
>    my:=fx(mx);
>    if signum(dfx1/dfx2)=-1 then
```

```
>       if ((evalf(dfx1)>0) and (evalf(dfx2)<0)) then
>          print("...............................................");
>          print("V bodě [".mx.", ".my."] je lokální maximum.");
>          print("Na intervalu (".L1.", ".P1.") funkce roste.");
>          print("Na intervalu (".L2.", ".P2.") funkce klesá.")
>       fi;
>       if ((evalf(dfx1)<0) and (evalf(dfx2)>0)) then
>          print("...............................................");
>          print("V bodě [".mx.", ".my."] je lokální minimum");
>          print("Na intervalu (".L1.", ".P1.") funkce klesá.");
>          print("Na intervalu (".L2.", ".P2.") funkce roste.")
>       fi
>    else
>          print("...............................................");
>       print("V bodě [".mx.", ".my."] není lokální extrém");
>       Monotonie(dfx1,L1,P1);
>       Monotonie(dfx2,L2,P2);
>    fi
> end:
```

Procedura pro vyšetřování 1. derivace funkce: Derivace1
Vstupní parametry jsou funkce, kterou vyšetřuji, a interval,
na kterém funkci vyšetřuji. Výsledek zjištění o monotonii
a maximech/minimech funkce.

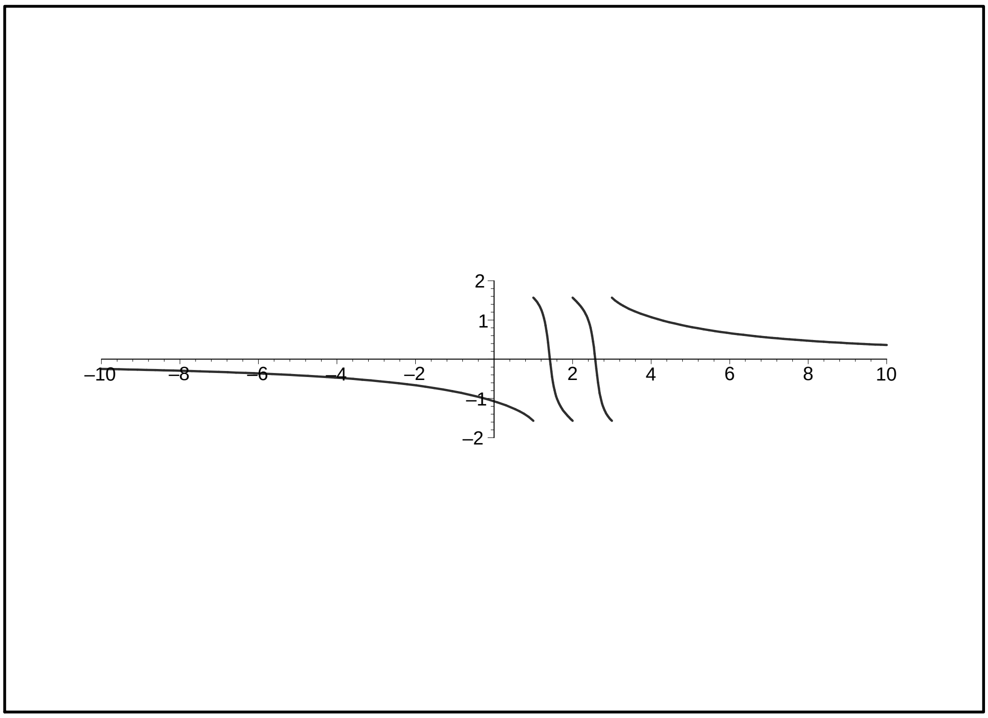
```
> Derivace1 := proc(funkce, interval)
>
>    description "Tato procedura vypočítá 1. derivaci funkce
>    a zjistí intervaly monotonnie, případně i lokální extrémy.";
>
> Dce1:=diff(funkce,x);
> print("Takto vypadá první derivace zadané funkce:");
> print(Dce1);
>
> NuloveBody:=solve(Dce1=0,x);
> if Dce1=0 then
>    NuloveBody:=NULL
> fi;
> #print(NuloveBody);
> if NuloveBody=NULL then
>    print("Na daném intervalu nejsou žádní kandidáti na lokální
>    extrémy.");
>    c:=(lhs(interval)+rhs(interval))/2;
>    dfx:=unapply(Dce1,x);
>    dfx_c:=dfx(c);
>    if dfx_c=0 then
>       print("Funkce f(x)=".funkce." je na daném intervalu konstantní.") fi;
>    if dfx_c<0 then
>       print("Funkce f(x)=".funkce." na daném intervalu klesá.") fi;
>    if dfx_c>0 then
>       print("Funkce f(x)=".funkce." na daném intervalu roste.") fi
> else
>    print("Na daném intervalu jsou tito kandidáti na lokální extrémy:");
>    print(NuloveBody);
>    Kandidati:=sort( [NuloveBody] );
>    Pocet:=nops(Kandidati);
>    dfx:=unapply(Dce1,x);
>     for k from 1 to Pocet
>       do
>         if Pocet=1 then
>          L1:=lhs(interval);
>          P1:=op(k,Kandidati);
>          L2:=P1;
>          P2:=rhs(interval);
```

```
>          ZjistiExtrem(funkce,L1,P1,L2,P2);
>        else # Pocet <> 1
>           if k=1 then
>             L1:=lhs(interval);
>             P1:=op(k,Kandidati);
>             L2:=P1;
>             P2:=op(k+1,Kandidati);
>             ZjistiExtrem(funkce,L1,P1,L2,P2);
>           else #k<>1
>             if k=Pocet then
>                L1:=op(k-1,Kandidati);
>                P1:=op(k,Kandidati);
>                L2:=P1;
>                P2:=rhs(interval);
>                ZjistiExtrem(funkce,L1,P1,L2,P2);
>             else # k>1 & k<Pocet
>                L1:=lhs(interval);
>                P1:=op(k,Kandidati);
>                L2:=P1;
>                P2:=op(k+1,Kandidati);
>                ZjistiExtrem(funkce,L1,P1,L2,P2);
>             fi # k=Pocet
>           fi; # k=1
>        fi # Pocet=1
>      od
>   fi;
> end:
```

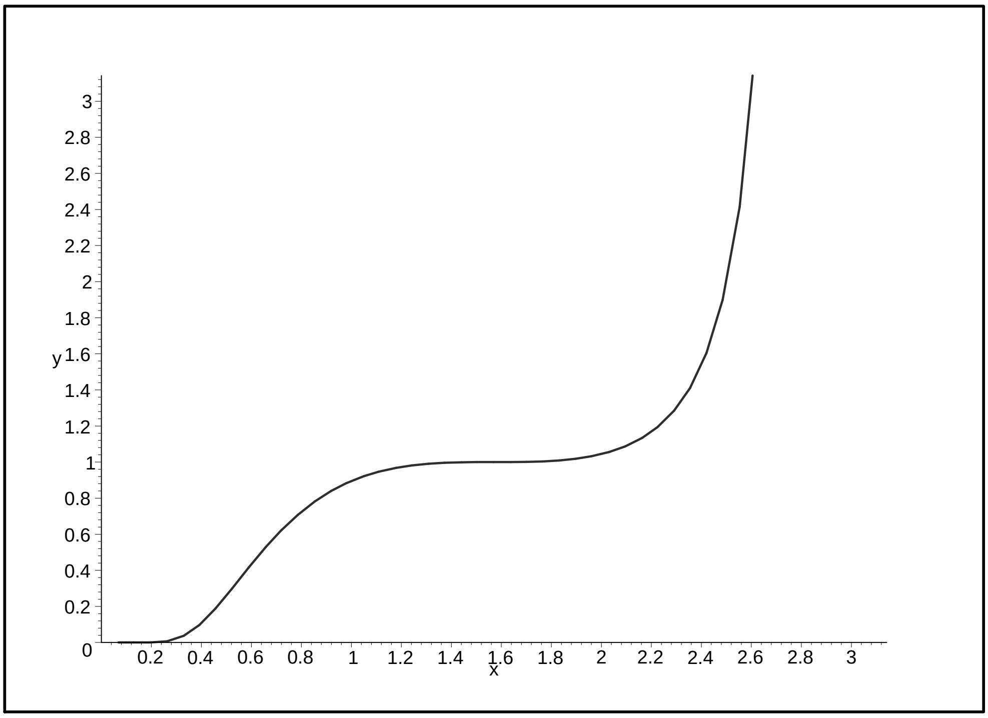
Příloha B

Grafy funkcí

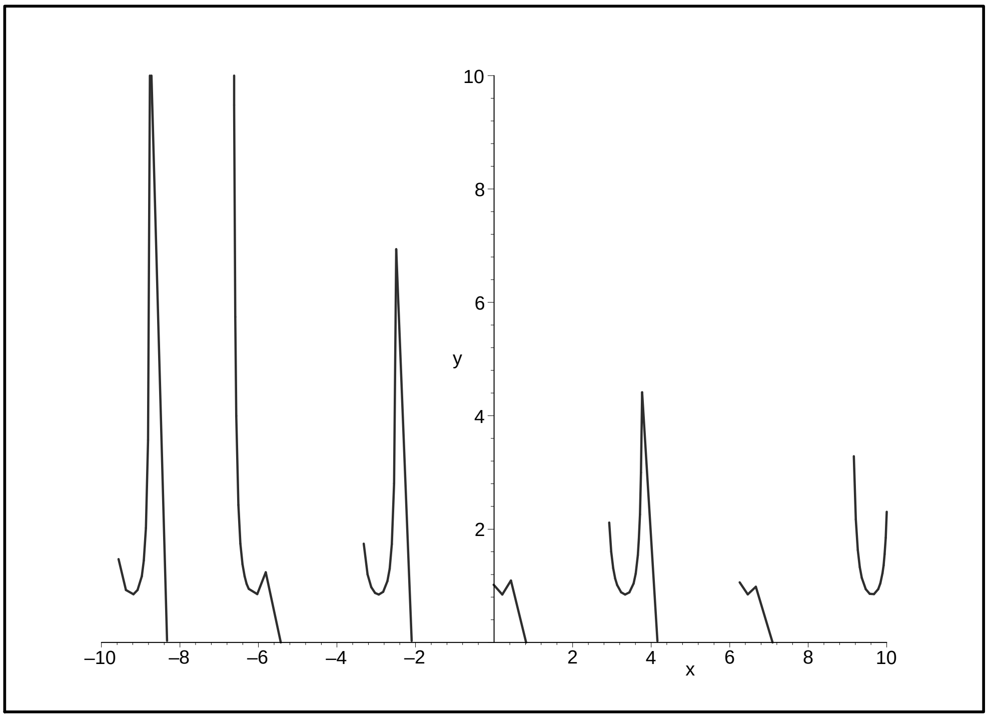
B.1 $f(x) = \mathbf{arctg}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)$



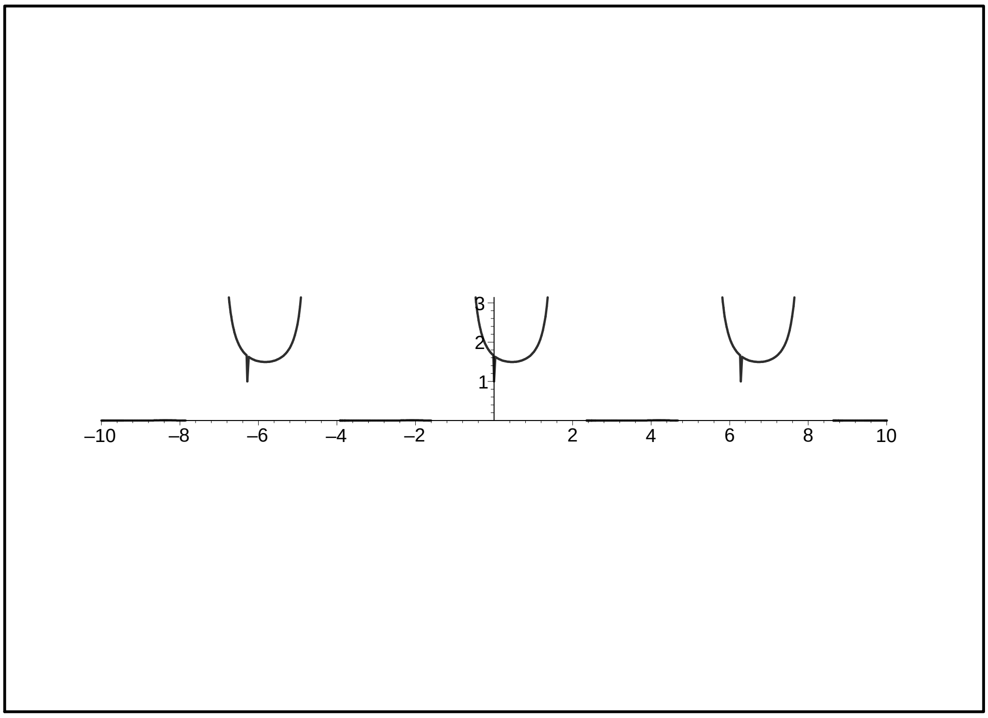
B.2 $f(x) = \sin(x)^{\mathbf{cotg}\ (x)}$



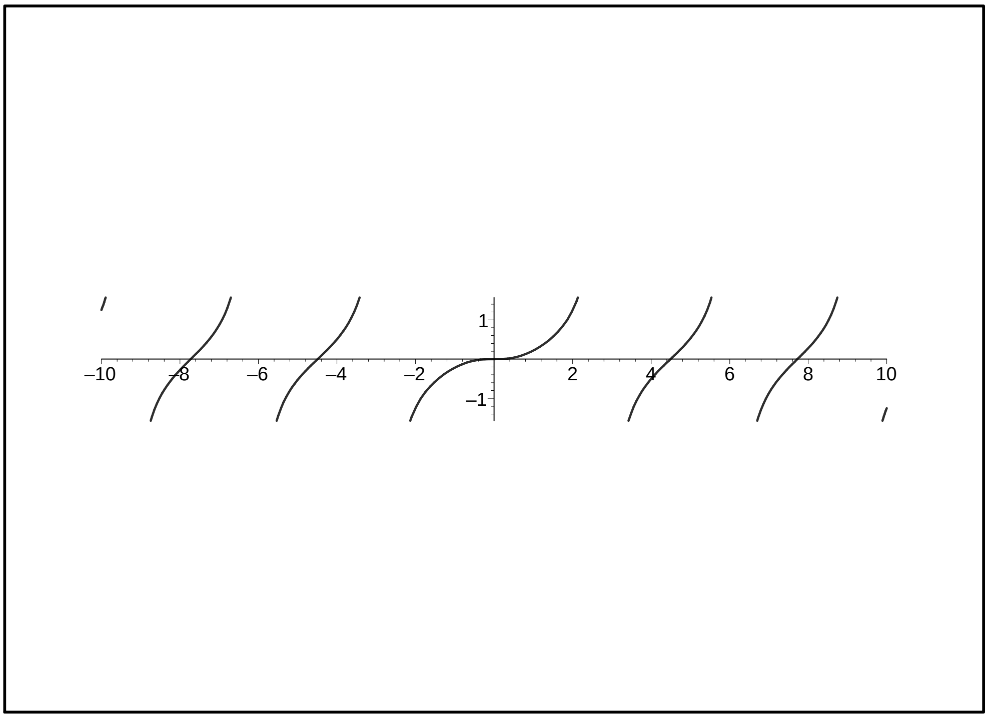
B.3 $f(x) = \mathbf{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)^{\mathbf{tg}\,(2x)}$



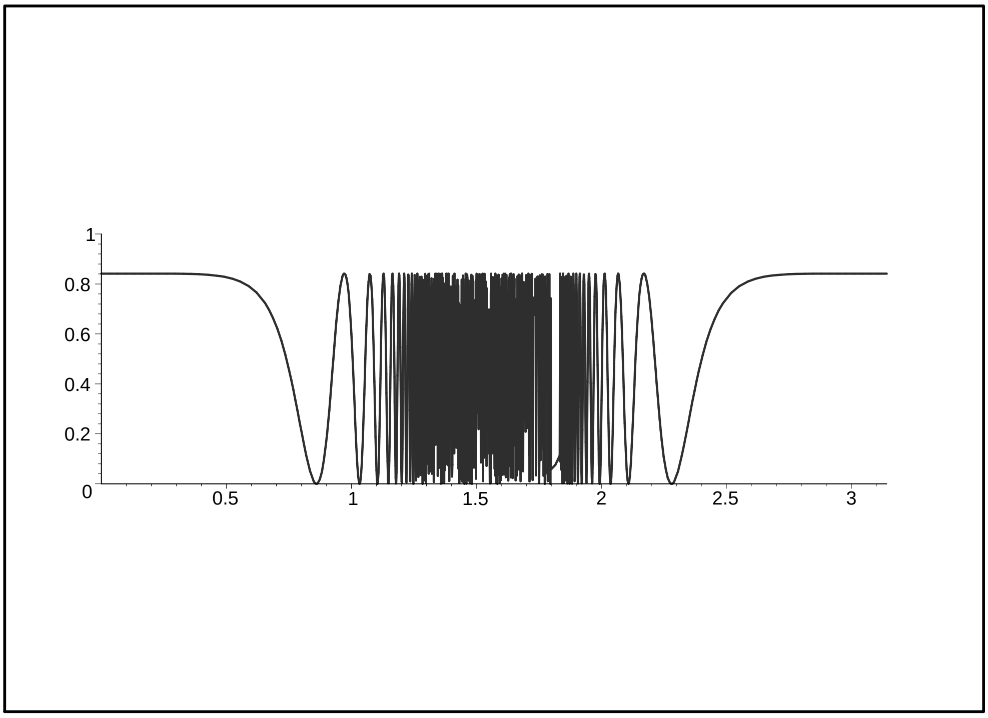
B.4 $f(x) = \left(\frac{1+\mathbf{tg}\ (x)}{1+\sin(x)}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^3}}$



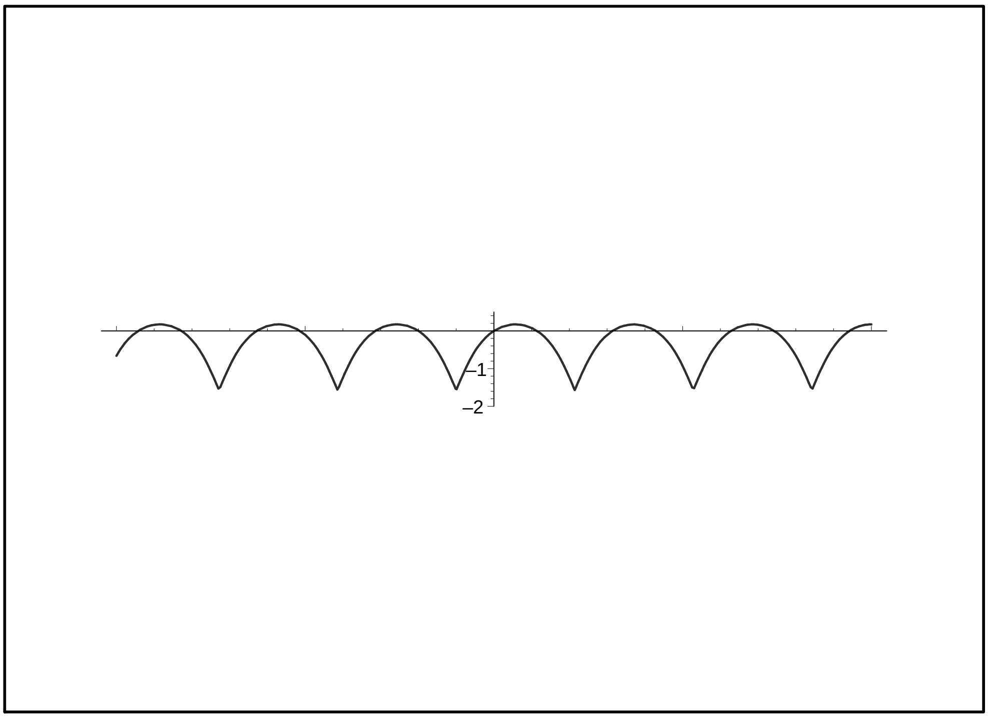
B.5 $f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\cos(x) + x\sin(x)}$



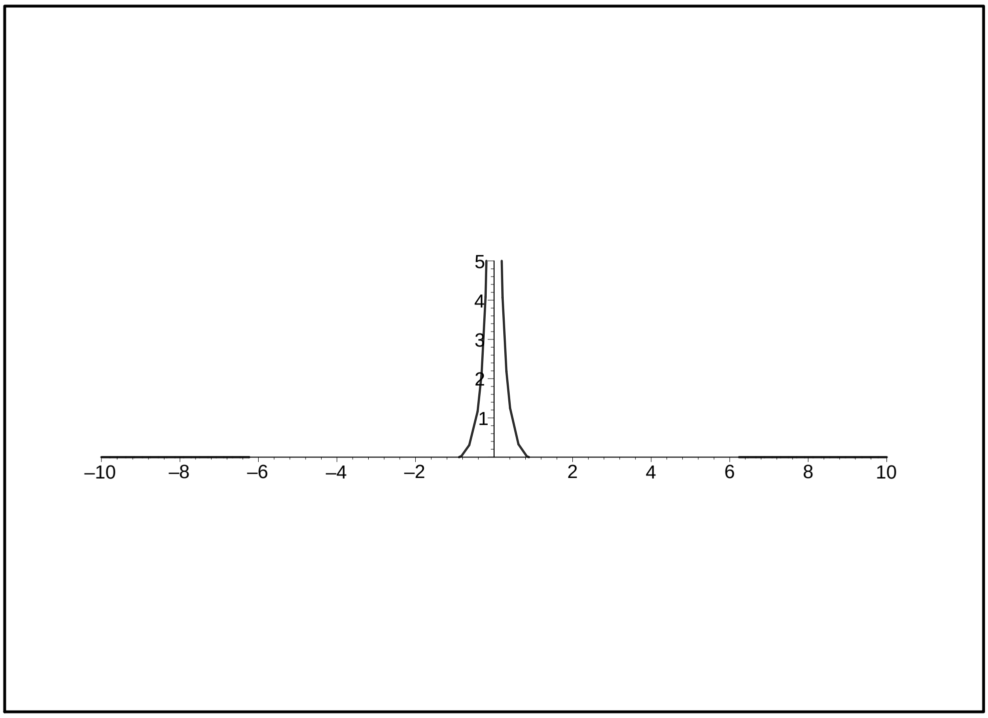
B.6 $f(x) = \sin(\cos(\mathbf{tg}\ (x)^3)^2)$



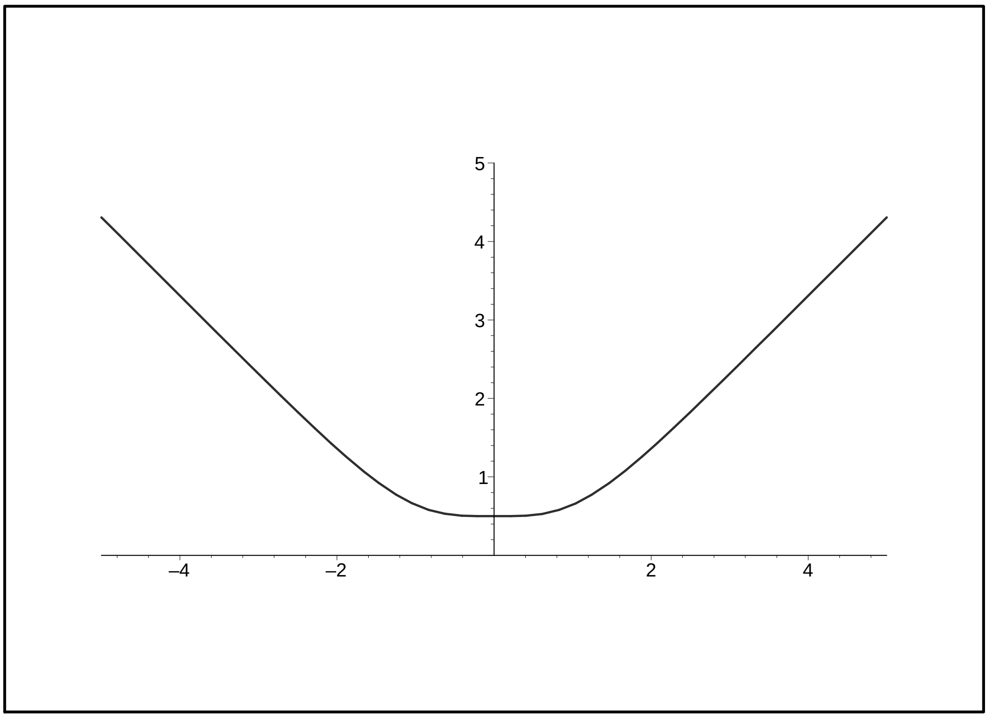
B.7 $f(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x+2)\cdot\sin(x)}{1-\cos(x+2)\cdot\cos(x)}\right)$



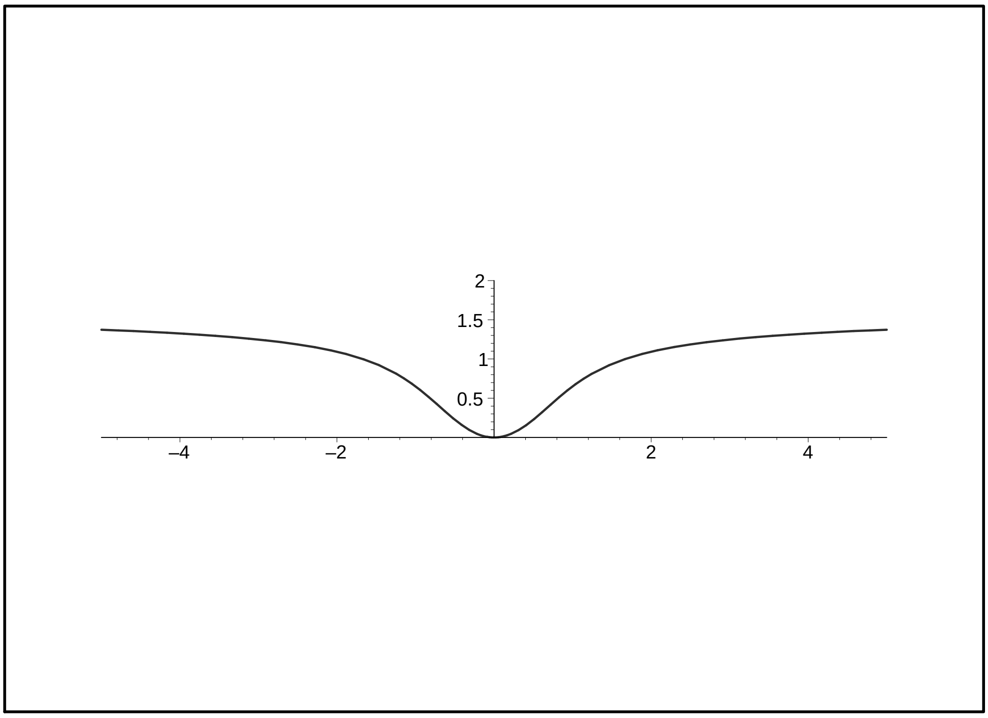
B.8 $\quad f(x) = \frac{\exp(-x^2)\cdot\arcsin(\exp(-x^2))}{\sqrt{1-\exp(-x^2)}} + \frac{1}{2}\ln\left(1-\exp(-x^2)\right)$



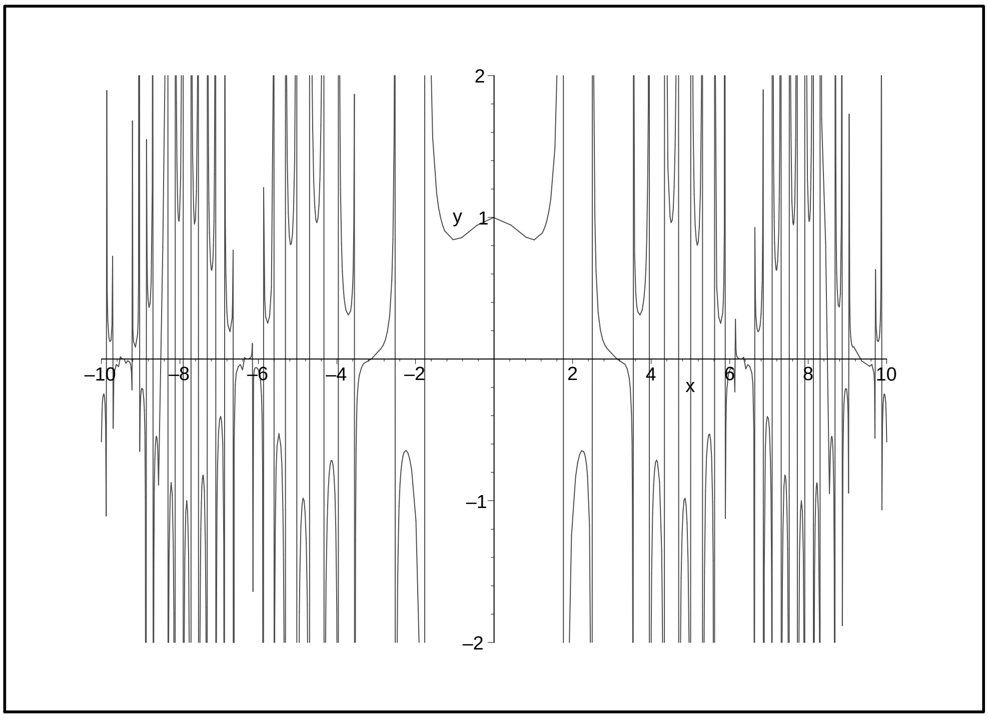
B.9 $f(x) = \ln(\cosh(x)) + \frac{1}{2\cosh^2(x)}$



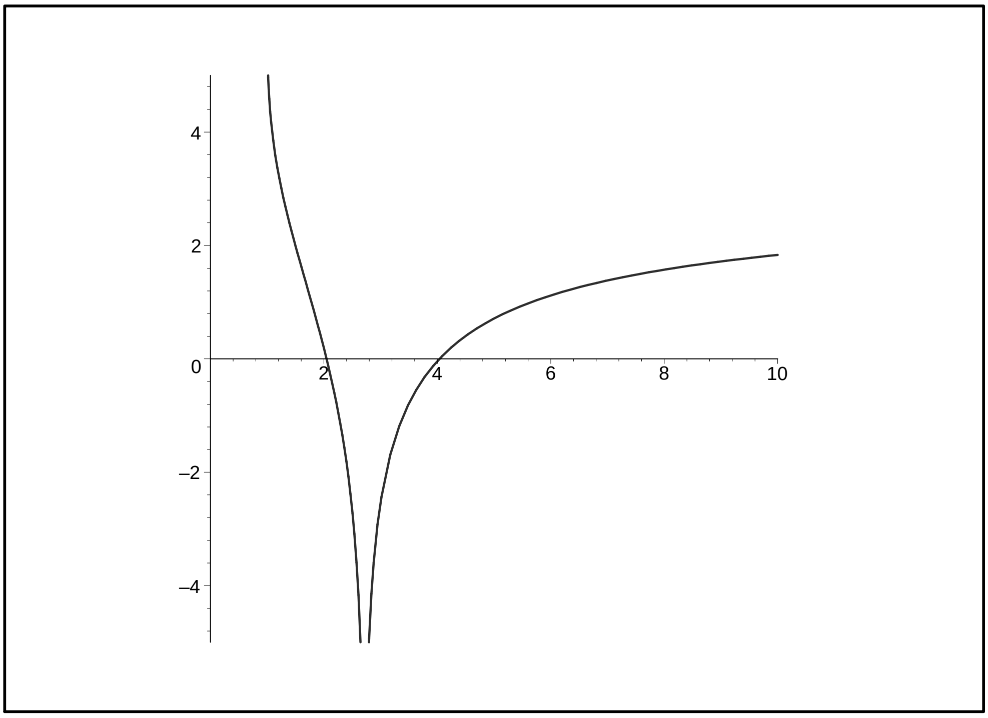
B.10 $f(x) = \mathbf{arctg}\ (x \tanh(x))$



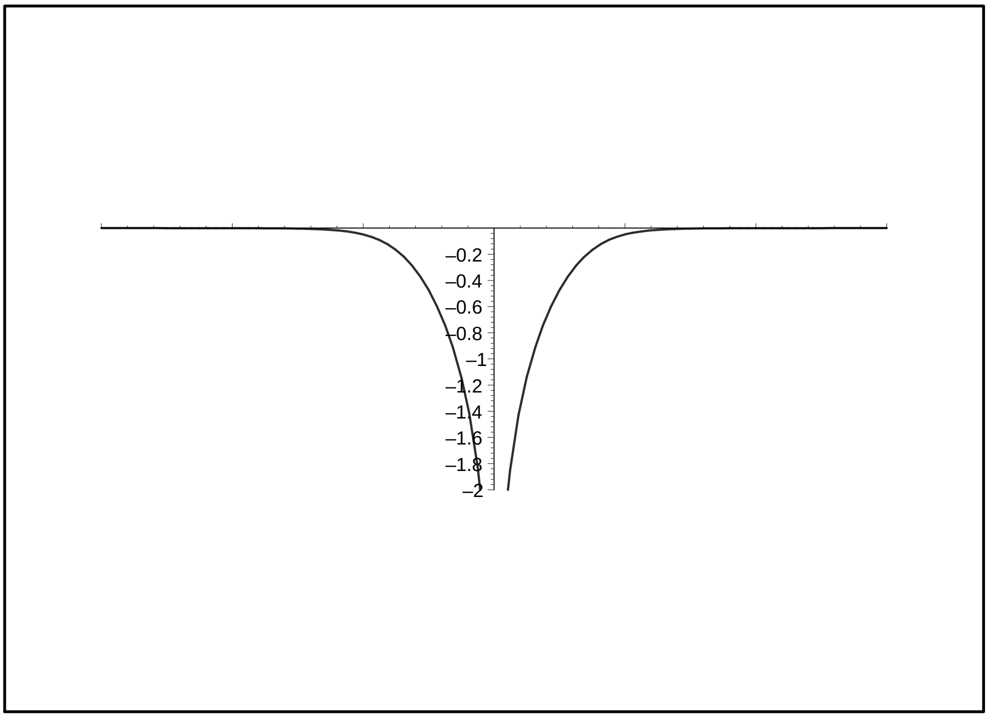
B.11 $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$



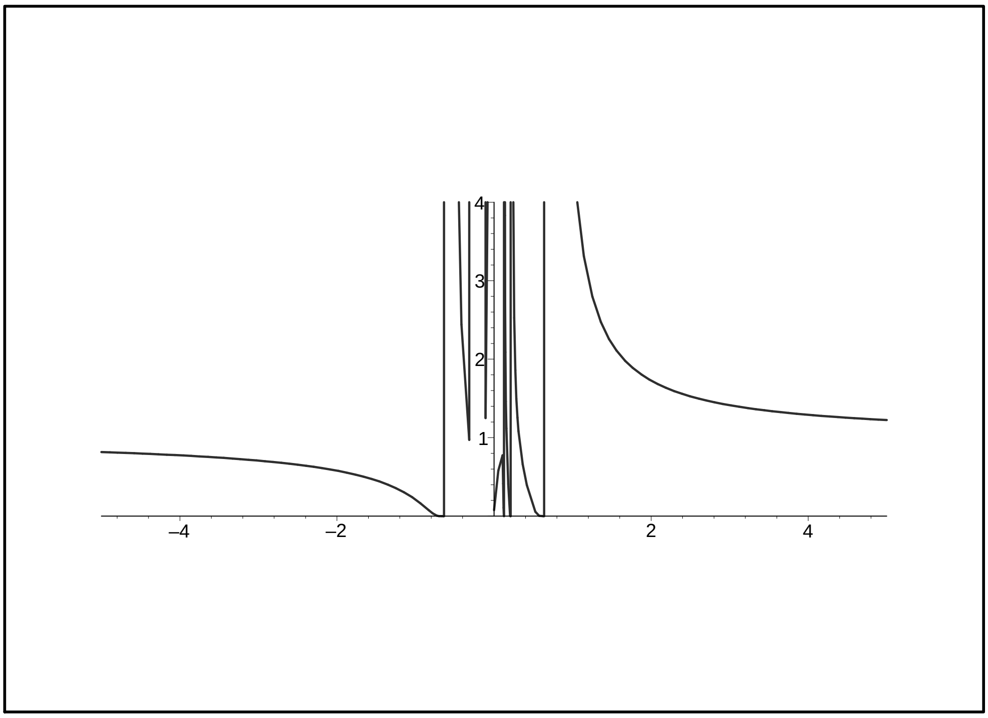
B.12 $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)^3)^2)$



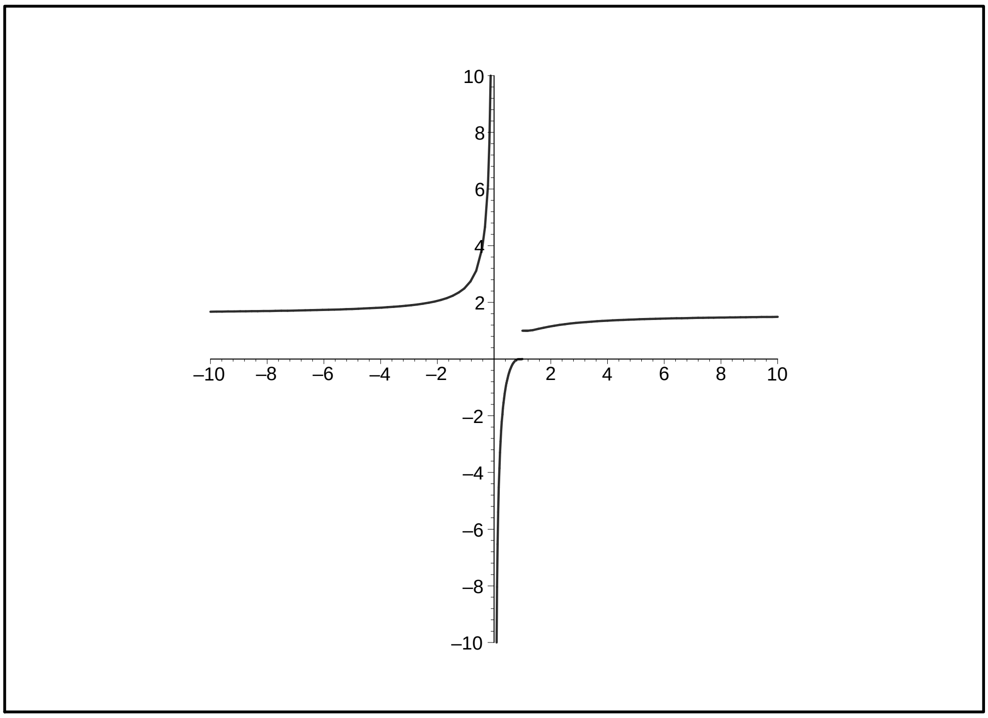
B.13 $f(x) = \frac{1}{4\cdot(1+x^4)} + \frac{1}{4}\ln(\frac{x^4}{1+x^4})$



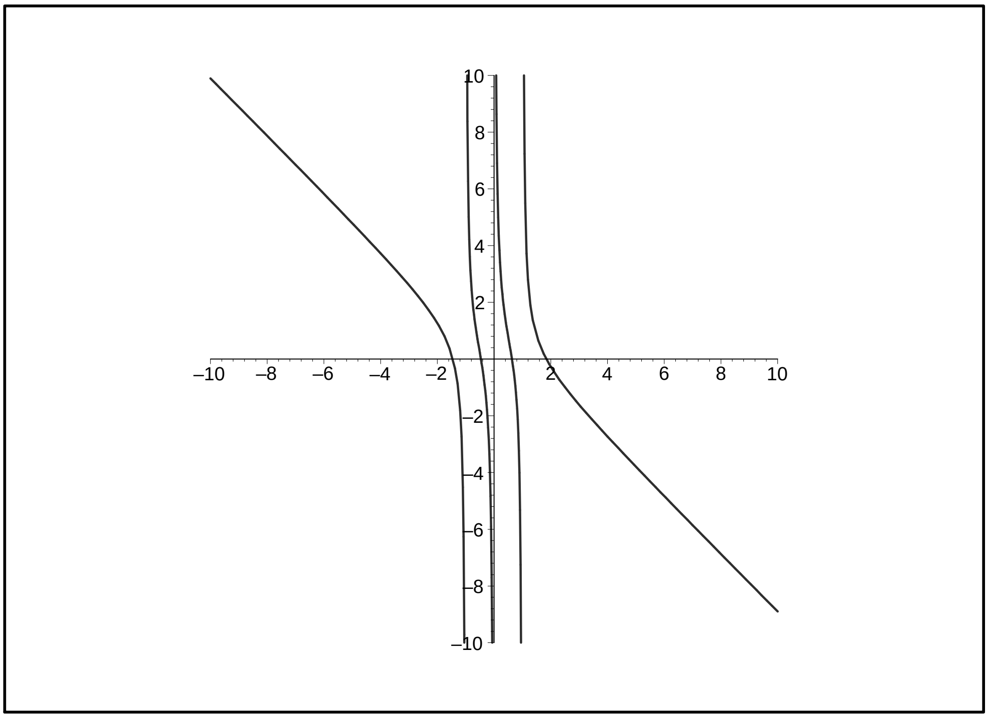
B.14 $f(x) = \exp(\mathbf{tg}\ (\frac{1}{x}))$



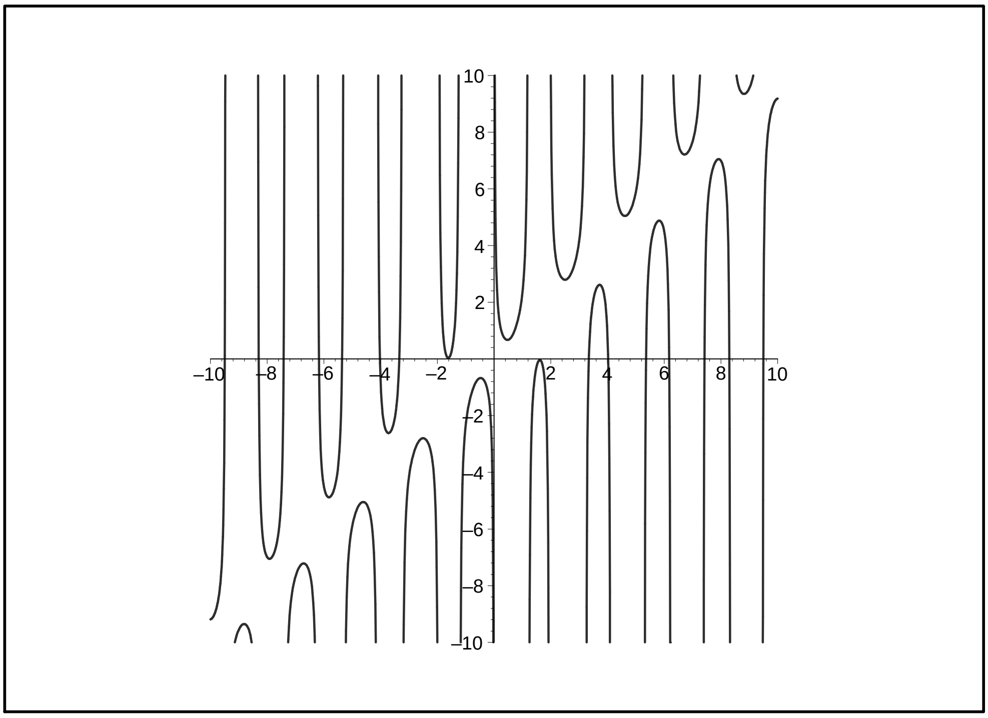
B.15 $f(x) = \frac{1}{1-\exp\left(\frac{x}{1-x}\right)}$



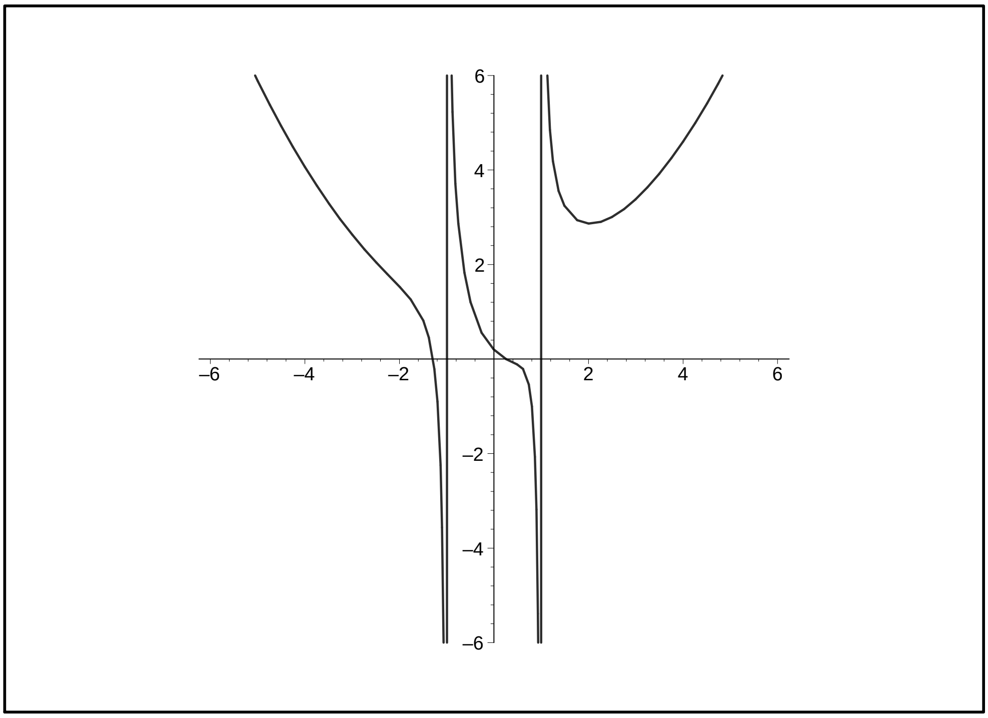
B.16 $f(x) = \frac{\ln(1+\exp(x))}{x} - \frac{x}{1-x^2} - x$



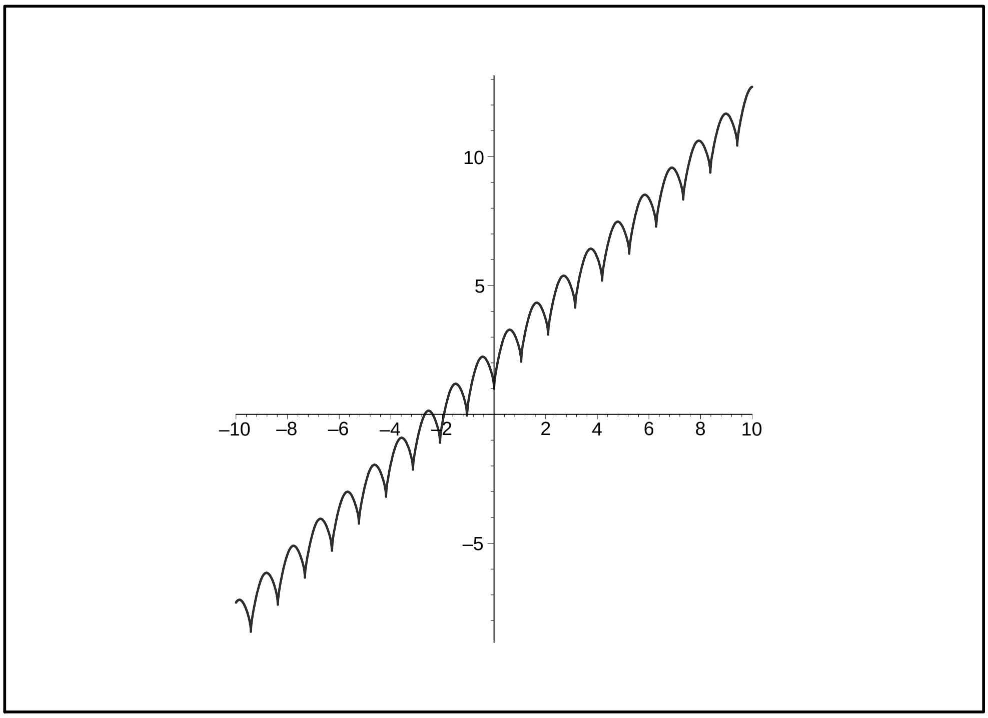
B.17 $f(x) = \dfrac{1}{\mathbf{tg}\left(\frac{x}{1+x^2}+\sin(3x)\right)} + x$



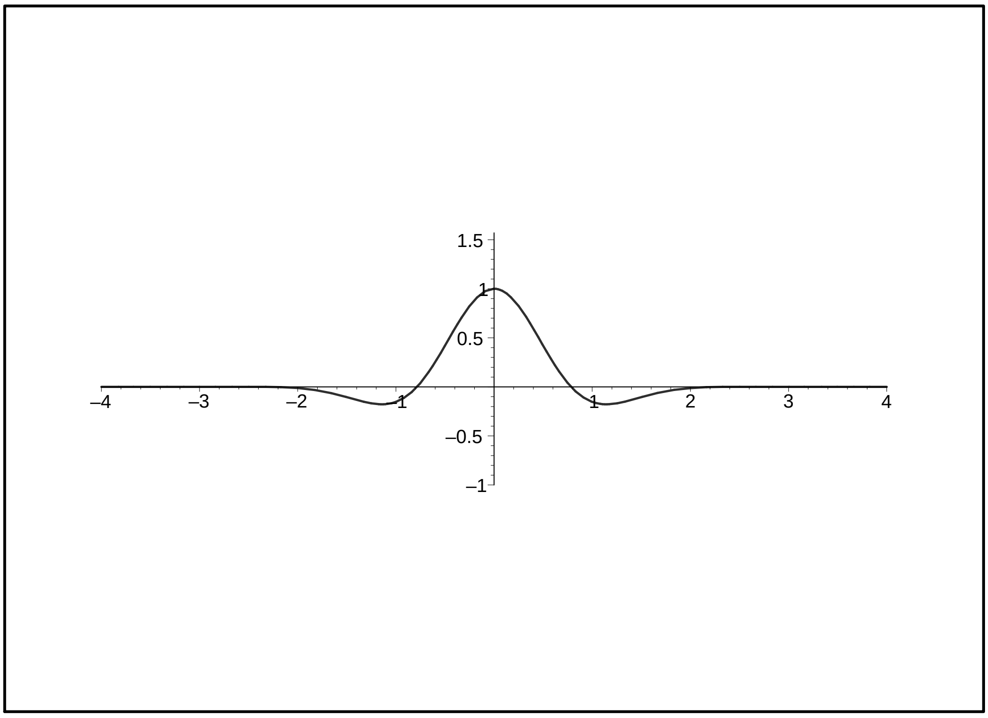
B.18 $f(x) = -\frac{x}{1-x^2} + \frac{x}{\sin\left(\frac{5x}{1+x^2}\right)}$



B.19 $f(x) = \exp(\sqrt{|\sin(3x)|}) + x$



B.20 $f(x) = \exp(-x^2) \cdot \cos(2x)$



Literatura

[1] B.P.Demidovič: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu, Nauka Moskva, 1977.

[2] Kopáček J.: Matematická analýza pro fyziky I., Matfyzpress Praha, 1997.

[3] Zápisky z přednášek z MA1, viz http://www.schovan.net

Rejstřík