Zápočtová práce k předmětu

PRM042 Matematika na počítači

LS 2002 / 2003

Jaroslava Schovancová

23. září 2003

Obsah

Kapitola 1

Teoretické základy

Při VYŠETŘOVÁNÍ PRŮBĚHU FUNKCE je potřeba udělat několik následujících kroků:

1. D_f, obor spojitosti
2. průsečíky se souřadnými osami
3. symetrie (sudost, lichost, periodicita)
4. limity - i jednostranné - v krajních bodech D_f
5. $f'(x)$, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy
6. $f''(x)$, intervaly konvexity a konkávity, inflexní body, H_f
7. f'_+, f'_- v bodech, kde neexistují f'
8. asymptoty v $\pm\infty$
9. graf funkce

Při vyšetřování průběhu funkcí jsem využila několik vět a definic. Definice a věty zde uvádím, důkazy vět jsou zazanamenány např. v [2], případně v [3].

1.1 Definiční obor, obor spojitosti

DEFINICE 1.1 Dány množiny M, N. Pak P je ZOBRAZENÍ (FUNKCE) množiny M do množiny N, jestliže platí

(i) $\forall x \in M \, \exists y \in N : [x, y] \in P$;

(ii) $\forall x \in M \, \forall y_1, y_2 \in N : [x, y_1] \in P \& [x, y_2] \in P \Rightarrow y_1 = y_2$;

(iii) $\forall [x, y] \in P \Rightarrow x \in M \,\&\, y \in N$.

DEFINICE 1.2 M nazýváme DEFINIČNÍM OBOREM ZOBRAZENÍ P.

DEFINICE 1.3 Množina $P(M) \subset N$, nazýváme OBOREM HODNOT ZOBRAZENÍ P.

DEFINICE 1.4 Řekneme, že funkce f je SPOJITÁ v bodě $a \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

DEFINICE 1.5 Funkce f je SPOJITÁ NA $(a; b)$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a; b)$.

VĚTA 1.1 (SPOJITÝ OBRAZ INTERVALU.) Spojitý obraz intervalu je interval (nebo 1 bod).

1.2 Symetrie (sudost, lichost, periodicita)

DEFINICE 1.6 LICHÁ funkce: $\forall\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \,\&\, f(-x) = -f(x)$

DEFINICE 1.7 SUDÁ funkce: $\forall\, x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \,\&\, f(-x) = f(x)$

DEFINICE 1.8 Funkce f je PERIODICKÁ , jestliže $p \in \mathbb{R}, \forall\, x \in D_f \Rightarrow x + p \in D_f \,\&\, f(x) = f(x+p)$.

1.3 Limity

DEFINICE 1.9 OKOLÍ BODU: Nechť $A \in \mathbb{R}$ $\epsilon > 0$, potom ϵ- okolím bodu A rozumíme množinu $\mathcal{U}^{\epsilon}(a) = (a - \epsilon; a + \epsilon)$.

Jednostranná okolí viz [2], případně v [3].

DEFINICE 1.10 PRSTENCOVÝM (REDUKOVANÝM) OKOLÍ BODU $a \in \mathbb{R}^*$ rozumíme množinu $\mathcal{P}^{\epsilon}_{(a)} = \mathcal{U}^{\epsilon}(a) \setminus \{a\}$.

DEFINICE 1.11 LIMITA FUNKCE. Nechť $a \in \mathbb{R}$, nehť f je reálná funkce, která je definována alespoň na nějakém redukovaném okolí bodu a. Potom řekneme, že f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže je splněn axióm $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in P^{\delta}_{(a)} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}^{\epsilon}(a)$.

Jednostranné limity viz [2], případně v [3].

1.4 První derivace

DEFINICE 1.12 Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$, $a \in D_f$. Pak řekneme, že f má v a DERIVACI $f'(a)$, jestliže existuje limita:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Jednostranné derivace viz [2], případně v [3].

VĚTA 1.2 (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE (LOKÁLNÍHO) EXTRÉMU.) Nechť $a \in \mathbb{R}$ je vnitřní bod intervalu $\mathcal{I}$. Nechť funkce f má v bodě a (lokální) extrém. Potom $f'(a)$ buď neexistuje, nebo je 0.

VĚTA 1.3 (O VZTAHU DERIVACE A MONOTONIE.) Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je interval (nedegenerovaný, tj. není to jeden bod) a nechť f je spojitá na $\mathcal{I}$. Nechť $\exists\, f'(a)$ v každém vnitřním bodu $a \in \mathcal{I}$.

Potom platí:

(i) Je-li $f' > 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je rostoucí NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

(ii) Je-li $f' \geq 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je neklesající NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

(iii) Je-li $f' < 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je klesající NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

(iv) Je-li $f' \leq 0$ NA INTERVALU $\mathcal{I}$, pak f je nerostoucí NA INTERVALU $\mathcal{I}$.

1.5 Druhá derivace

DEFINICE 1.13 Nechť $\exists\, f^{(n)}(x)$ vlastní pro $x \in \mathcal{P}^{\delta}_{(a)}$, $a \in \mathbb{R}$. Potom $(n+1)$-NÍ DERIVACÍ f v bodě a budeme rozumět $\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h)-f^{(n)}(a)}{h}$.

DEFINICE 1.14 Nechť $\exists\, f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $T_a = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2, y = f(a) + f'(a)(x-a)\}$ („TEČNA“).

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží NAD TEČNOU T_a, jestliže $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$.

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ grafu funkce f leží POD TEČNOU T_a, jestliže $f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$.

DEFINICE 1.15 Řekneme, že a je INFLEXNÍ BOD funkce f (f má v a inflexi), jestliže $\exists\, \delta > 0$ tak, že $[x, f(x)]$ leží nad T_a $\forall\, x \in (a-\delta; a)$

& $[x, f(x)]$ leží pod T_a $\forall\, x \in (a, a+\delta)$ nebo naopak.

DEFINICE 1.16 Řekneme, že funkce f je KONVEXNÍ na otevřeném intervalu $(a;b)$, jestliže $\forall\, x < y < z$, $x, y \in (a;b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

DEFINICE 1.17 Řekneme, že funkce f je KONKÁVNÍ na otevřeném intervalu $(a;b)$, jestliže $\forall\, x < y < z$, $x, y \in (a;b)$: platí $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Pro ryzí konvexitu nebo konkávitu funkce viz [2], případně v [3].

VĚTA 1.4 (NUTNÁ PODMÍNKA EXISTENCE INFLEXE.) Nechť $\exists\, f''(a) \neq 0$. Pak f nemá inflexi v bodě a.

VĚTA 1.5 (POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKA EXISTENCE INFLEXE.) Nechť f má spojitou první derivaci na $(a;b)$. Nechť $\exists\, y \in (a;b)$ takové, že $f''(x) > 0$ $\forall\, x \in (a, y)$ & $f''(x) < 0$ $\forall\, x \in (y;b)$.

Potom y je bodem inflexe funkce f.

VĚTA 1.6 (O VZTAHU KONVEXITY A DRUHÉ DERIVACE.) Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' > 0$ na $(a;b)$, pak f je ryze konvexní na $(a;b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' \geq 0$ na $(a;b)$, pak f je konvexní na $(a;b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' < 0$ na $(a;b)$, pak f je ryze konkávní na $(a;b)$.

Nechť f má spojitou první derivaci na otevřeném intervalu $(a;b)$. Potom je-li $f'' \leq 0$ na $(a;b)$, pak f je ryze konkávní na $(a;b)$.

1.6 Limity první derivace

VĚTA 1.7 (O LIMITĚ DERIVACÍ.) Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$, nechť existuje limita: $\lim_{x \to a+} f'_+(a) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $f'_+(a) = A$.

1.7 Asymptoty funkce v $\pm\infty$

DEFINICE 1.18 Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ je ASYMPTOTOU FUNKCE f v $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax - b) = 0$ $(\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0)$.

VĚTA 1.8 (O TVARU ASYMPTOTY.) Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b$ právě, když $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ (vlastní limitu) & $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ (vlastní limita).

Literatura

[1] B.P.Demidovič: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu, Nauka Moskva, 1977.

[2] Kopáček J.: Matematická analýza pro fyziky I., Matfyzpress Praha, 1997.

[3] Zápisky z přednášek z MA1, viz http://www.schovan.net

Rejstřík