METRICKÉ PROSTORY

V praxi se nelze obejít bez aproximací, zvláště v případech, kdy se řešení úlohy hledá numericky.

Pak je důležité mít k dispozici pojem konvergence.

Konvergence čehosi k čemusi. Začíná se to zašnodrchávat ...

V reálných číslech byla konvergence definována buď pomocí vzdálenosti dvou bodů nebo pomocí uspořádání. Druhý přístup už však nejde použít v euklidovských prostorech vyšší dimenze, a proto konvergence pomocí vzdálenosti je vhodnější.

Prohlédněte si definici konvergence posloupnosti. Pracuje se tam s absolutní hodnotou rozdílu dvou čísel, tedy s jejich vzdáleností na reálné ose.

A tak budeme definovat různé prostory objektů a mezi těmi objekty vzdálenost.

Tak budeme mít možnost vyslovit a dokázat jedno tvrzení (například větu o spojitosti složeného zobrazení) pro všechny možné situace (metrické prostory) a nemusíme ji dokazovat pro každou situaci zvlášť.

Tak mne napadá, že jsem to už tam nějak cítil v kostech u funkcí více proměnných. Dˇ.

METRICKÝ PROSTOR

Z chování vzdálenosti v euklidovských prostorech se vyberou základní vlastnosti, které se stanou axiomy pro abstraktní pojem vzdálenosti, nazvaný metrika.

Tvrzení dokázaná pro tento obecný pojem lze pak použít pro všechny struktury s konkrétní vzdáleností.

Důležitou aplikací budou metriky v prostorech funkcí.

Teď je poslední okamžik, kdy si můžete na geniální definici metrického prostory přijít sami. Je to neopakovatelná příležitost! Zavřete (popřípadě otevřete) oči, metrický prostor přichází.

Jestli jste vymyslili axiomy pro vzdálenost a máte jich tak akorát (t.j. 3), tak pokračujte ve čtení, jinak pokračujte v přemýšlení.

DEFINICE. Nechť X je množina a d funkce přiřazující každé dvojici (x, y) z X nezáporné reálné číslo $d(x, y)$ mající vlastnosti:

1. pro $x, y \in X$ je $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. (symetrie) $d(x, y) = d(y, x)$ pro každé $x, y \in X$;
3. (trojúhelníková nerovnost) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $x, y, z \in X$.

Funkce d se pak nazývá metrika na X a dvojice (X, d) se nazývá metrický prostor.

Zřejmým způsobem se definuje vzdálenost bodu a a množiny A od množiny B a průměr množiny A:

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}\,, \quad d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}\,,$$

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}\,.$$

Sqělé. Tuhle definici mám moc rád.

Přiznávám bez mučení: nepřišel jsem na žádný axiom.

Pomocí vzdálenosti se přirozeným způsobem definuje konvergence posloupností:

DEFINICE. V metrickém prostoru (X, d) posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k bodu $x \in X$ (nebo má za limitu bod $x \in X$), jestliže $d(x_n, x) \to 0$.

Značení: $x_n \to x$ nebo $\lim x_n = x$.

Analogicky situaci v euklidovských prostorech lze definovat okolí bodů:

DEFINICE. Okolí bodu x v metrickém prostoru (X, d) je každá množina obsahující otevřenou kouli $B_{x,r} = \{y; d(x, y) < r\}$ pro nějaké $r > 0$.

To mi něco připomíná. Teď bych si troufnul i na definici uzavřené koule.

Pomocí konvergence nebo okolí lze definovat všechny podstatné pojmy, které byly používány v euklidovských prostorech:

DEFINICE. Podmnožina A metrického prostoru (X, d) se nazývá otevřená, jestliže každý bod A má okolí celé ležící v A (tj. žádná posloupnost z $X \setminus A$ nekonverguje k bodu z A).

Podmnožina A metrického prostoru (X, d) se nazývá uzavřená, jestliže její doplněk $X \setminus A$ je otevřený (tj. limity konvergentních posloupností z A leží v A).

DEFINICE. Uzávěr množiny A v metrickém prostoru (X, d) je množina všech limitních bodů posloupností z A (a značí se $\overline{A}$).

Důkazy následujících tří tvrzení jsou jednoduché a měli byste je umět dokázat.

VĚTA. Soubor všech otevřených množin v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\emptyset$ a X jsou otevřené množiny;
2. sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina;
3. průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Pokud se při takových důkazech neskutečně nudíte, tak je to v pořádku.

Pomocí de Morganových vzorců o doplňcích množin se snadno dokáže následující důsledek:

DŮSLEDEK. Soubor všech uzavřených množin v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny;
2. průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina;
3. sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

VĚTA. Uzávěr v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$ pro každé $A \subset X$;

3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ pro každé $A, B \subset X$;

4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ pro každé $A \subset X$.

T.j. ta čárečka nad písmenkem není ani svatozář, ani zip. Je to prostě takový metrický uzávěr. Ani na láhev se nehodí.

Může se stát, že dvě různé metriky určují totožné konvergence (např. na $\mathbb{R}$ obvyklá metrika $|x - y|$ a metrika $2|x - y|$.

Pokud je pro další potřebu hlavní konvergence a nikoli vzdálenost, je možné použít vhodnější metriku, která má stejnou konvergenci.

Pozor! To je již zcela regulérní čarování. Chápete to? Například koule $\{x : d(x, x_0) < 1\}$ nemusí být kulatá.

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají (topologicky) ekvivalentní, jestliže metrické prostory (X, d) a (X, e) mají totožné konvergentní posloupnosti.

Ekvivalentní metriky (jinak řečeno: ekvivalentní metrické prostory) mají tedy stejné otevřené množiny, stejné uzavřené množiny, stejné uzávěry množin.

Čtěte pomalu. Ta věc není jednoduchá.

Ale je úžasná.

Pojmy, které se nezmění záměnou metrik za ekvivalentní, se nazývají topologické.

Kromě již uvedených tam náleží i následující vlastnosti:

Teď to bude hustý:

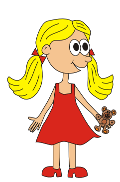
DEFINICE. Podmnožina metrického prostoru X se nazývá hustá, jestliže její uzávěr je celý prostor X.

Podmnožina metrického prostoru X se nazývá řídká, jestliže doplněk jejího uzávěr je hustý.

Podmnožina metrického prostoru X se nazývá 1.kategorie, jestliže je sjednocením spočetně mnoha řídkých množin.

Metrický prostor se nazývá separabilní, jestliže má spočetnou hustou část.

Bramboračka je hustá, česnečka je řídká a maminka dělá polívky první kategorie.



A polívčička s jemně nastrouhanou mrkvičkou je napotvoru separabilní.

Poznámky 1:

Metrika nemusí mít v aplikacích vždy význam vzdálenosti, ale např. čas.

Při měření času proběhnutých jevů může nastat situace, že příslušná funkce není symetrická (na kole ujedete stejnou vzdálenost rychleji z kopce než do kopce), v některých případech nemusí platit trojúhelníková nerovnost.

Existují samozřejmě modifikace vlastností metriky, které zachycují podobné situace, ale vždy se jedná o zjišťování, jak se vlastnosti metrik změní. Základem je teorie metrických prostorů.

Jedna modifikace axiomů metrik se však vyskytuje častěji. Je to slabší první axiom:
1'. pro $x \in X$ je $d(x,x) = 0$.

To znamená, že dva různé body mohou mít nulovou vzdálenost. Taková zobecněná metrika se nazývá pseudometrika; viz *Otázky* pro souvislost s metrikou.

V pseudometrickém prostoru lze stejnou definicí zavést všechny uvedené topologické pojmy.

Stejným způsobem jako u reálných číslech lze definovat hromadné body posloupnosti a množiny.

Není-li d v metrickém prostoru (X,d) podstatná, nebo je jasné, o jakou metriku se jedná, bude často v dalším textu vynechávat, tj. bude se mluvit o metrickém prostoru X (nebo Y, Z, apod.).

Konec poznámek 1.

Příklady 1:

1. Euklidovský n-dimenzionální prostor s obvyklou metrikou

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

tvoří metrický prostor.

2. Euklidovský n-dimenzionální prostor s metrikou

$$d_p(x,y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + ... + |x_n - y_n|^p}$$

, kde $p \geq 1$, tvoří metrický prostor, který se často značí $l_p(n)$.

Trojúhelníková nerovnost se nedokazuje snadno. Lze použít extrémy funkcí více proměnných.

Ukažte, že všechny metriky d_p jsou ekvivalentní. Nakreslete si, jak se mění jednotková koule při rostoucím p.

Pro $0 < p < 1$ uvedená funkce d_p nesplňuje trojúhelníkovou nerovnost.

3. Euklidovský n-dimenzionální prostor s metrikou

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$$

tvoří metrický prostor, který se často značí $l_\infty(n)$.

Ukažte, že i tato metrika je ekvivalentní předchozím metrikám d_p.

Víte jak vypadá jednotková koule? Je hranatá.

Dokažte, že $d_\infty = \lim_{p\to\infty} d_p$.

4. Metriky d_p lze použít i pro nekonečně dimenzionální prostor posloupností reálných čísel. Místo konečných součtů se použijí nekonečné součty:

$$d_p(\{x_n\},\{y_n\}) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p}\,.$$

Pro $p = \infty$ se dostane vzorec

$$d_\infty(\{x_n\},\{y_n\}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|\,.$$

Je zřejmé, že ne pro všechny posloupnosti uvedené součty nebo supremum jsou vlastní. Pro různá p je nutné se omezit na různé posloupnosti. Pro $1 \le p \le \infty$ je d_p metrikou na množině

$$l_p = \{\{x_n\}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\} < \infty\}\,, \quad l_\infty = \{\{x_n\}; \{x_n\} \text{ je omezená }\}\,.$$

Trojúhelníková nerovnost pro $d_p, 1 \le p < \infty$, se nazývá Minkowského nerovnost.

Uvědomte si, že prostor $\mathcal{F}_u(X,Y)$ (množina omezených zobrazení z X do Y se „supremovou" metrikou je zobecnění l_∞ (jaké jsou u l_∞ prostory X, Y?).

5. Funkce d na $X \times X$ rovná 0 na diagonále a 1 jinde, je metrika, často nazývaná diskrétní metrika.

Odevšad se kamkoliv dojede za kačku. Tak by to mělo být v metru.

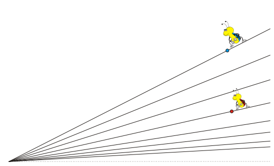
Jaká je konvergence v diskrétní metrice? Jak vypadají koule v této metrice? Je vždy uzávěr otevřené koule uzavřená koule se stejným poloměrem?

Některé otázky jsou až dojemně snadné. Ale i tak jsou hezké.

6. Opačným extrémem diskrétní metriky je tzv. *indiskrétní pseudometrika*, což je nulová funkce.

Jaká je konvergence v indiskrétní metrice? Jak vypadají koule v této metrice?

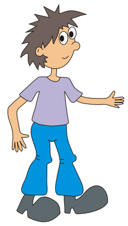
7. Nechť X je spočetný disjunktní součet intervalů $[0,1]$, ve kterém se ztotožní všechny body 0. Množina X se dá chápat jako součin $\mathbb{N} \times [0,1]$, kde všechny body $(n,0), n \in \mathbb{N}$, jsou totožné.



Následující funkce je metrikou na X.

$$d((n,x),(m,y)) = \begin{cases} |x-y|, & \text{pro } n=m; \\ |x|+|y|, & \text{pro } n \neq m. \end{cases}$$

Tento metrický prostor se často nazývá *ježek* nebo *vějíř*.



Někdy jsem taky ostříhaný na ježka.

8. Nechť p je prvočíslo. Pro racionální čísla $x \neq y$ se definuje $d(x,y) = p^{-k}$, kde $x - y = p^k \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ a p nedělí ani a ani b.

Uvedená metrika d na racionálních číslech se nazývá p-adická metrika.

K jakému číslu konverguje posloupnost $\{p^n\}_n$? A k čemu konverguje posloupnost $\{q^{-n}\}_n$ pro prvočíslo q různé od p?

Neporadím.

9. Na množině X posloupností lze zavést metriku i následovně. Pro různé posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ se definuje $d(\{x_n\}, \{y_n\}) = 1/k$, kde k je první takový index, že $x_k \neq y_k$.

Nebylo řečeno, v jaké množině P se posloupnosti berou. V případě, že se jedná o posloupnosti přirozených čísel (tj. $P = \mathbb{N}$), nazývá se tento metrický prostor Baireův prostor.

Obecně je tedy $X = P^{\mathbb{N}}$ kartézský součin spočetně mnoha množin P, tj. spočetná mocnina množin P. Baireův prostor je dvojice $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$.

Jaká je konvergence v prostoru (X, d)?

Konec příkladů 1.

Otázky 1:

1. Ukažte, že vztah $x \sim y \equiv d(x,y) = 0$ v pseudometrickém prostoru (X,d) je ekvivalence.

Pro třídy $[x], [y]$ této ekvivalence definujte $\rho([x],[y]) = d(x,y)$. Ukažte, že definice nezávisí na volbě prvků z příslušných tříd a že d je metrika na $X/\sim$.

2. Ukažte, že konvergence v metrickém prostoru splňuje obvyklé vlastnosti konvergence:

1. $\{x_n\}$ má nejvýše jednu limitu;
2. je-li posloupnost $\{x_n\}$ konstantní, $x_n = a$, pak $\lim x_n = a$;
3. jestliže $\lim x_n = a$, pak $\lim x_{k_n} = a$ pro každou podposloupnost $\{x_{k_n}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$;

4. jestliže z každé podposloupnosti $\{x_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergující k a, pak $\{x_n\}$ konverguje k a.

Uvědomte si, že v pseudometrickém prostoru neplatí první vlastnost, ostatní platí.

3. Dokažte, že množina A v metrickém prostoru je uzavřená právě když se rovná svému uzávěru.

Uzávěr množiny A je tedy nejmenší uzavřená množina obsahující A.

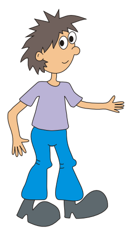
4. Lze definovat vnitřek množiny A jako největší otevřenou množinu obsaženou v A. Často se značí int A.

Ukažte, že vnitřek množiny vždy existuje a že je popsán jako $\overline{X \setminus \overline{X \setminus A}}$, nebo jako množina bodů, které leží v otevřené kouli celé obsažené v A.

Lze definovat i hranici množiny A jako $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Ukažte, že hranice je množina těch bodů x, že každá otevřená koule se středem v x protíná jak A tak $X \setminus A$. Uzávěr množiny je sjednocení této množiny a její hranice.

5. Dokažte uvedené vlastnosti otevřených a uzavřených množin a uzávěru.

6. Může být podmnožina neprázdného metrického prostoru současně hustá i řídká?



To je teda fakt hustý.

7. Dokažte, že metrické prostory $l_p(n)$ jsou separabilní pro $1 \leq p \leq \infty$.

8. Dokažte, že metrické prostory l_p jsou separabilní pro $1 \leq p < \infty$. Prostor l_∞ není separabilní.

9. Mohutnost separabilního prostoru je nejvýše rovna mohutnosti reálných čísel (tj. 2^ω).

10. Je každý spočetný metrický prostor 1.kategorie?

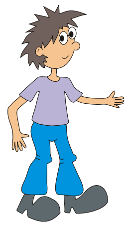
12. Ukažte, že bodová konvergence funkcí na intervalu $[0,1]$ není vytvořena žádnou metrikou.

13. Ukažte, že stejně jako v reálných číslech lze definovat i v metrických prostorech hromadný bod posloupnosti a hromadný bod množiny.

Dokažte, že pro tyto pojmy platí stejná tvrzení jako v reálných číslech: charakterizace hromadného bodu posloupnosti a její důsledky, vlastnosti hromadného bodu množiny a charakterizace hromadného bodu množiny.

14. Jestliže obsahuje (X,d) nespočetnou množinu A takovou, že pro nějaké kladné číslo r je $d(a_1,a_2) \geq r$ pro libovolné dva různé body $a_1, a_2 \in A$, není (X,d) separabilní.

Dáte matematikovi a definici a má druhé Vánoce.



To je teda nadělení. Teda vlastně matematická nadílka.

Konec otázek 1.

Učení 1:

Je-li na vektorovém prostoru definována metrika, tak asi existuje vždy norma, která tuto metriku indukuje?

Diskrétně ti sdělím, že diskrétní metrika jde definovat všude a nerozumí si skoro s nikým.

Konec učení 1.

Konstrukce

Je triviální, že zúžení d_Y metriky d z množiny X na množinu Y je opět metrika (přesněji by se mělo říci *zúžení z* $X \times X$ *na* $Y \times Y$).

DEFINICE. Je-li (X, d) metrický prostor a Y podmnožina X, nazývá se dvojice (Y, d_Y) metrický podprostor prostoru (X, d).

Podporučík taky může poroučet. To je svatá vojenská pravda.

DEFINICE. Jsou-li (X, d) a (Y, e) metrické prostory, pak jejich (kartézský) součin je metrický prostor $(X \times Y, \rho)$, kde $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + e(y_1, y_2)$.

Tato definice se snadno zobecní na součiny konečně mnoha metrických prostorů. Nekonečné součiny lze definovat jen pro spočetně mnoho prostorů:

DEFINICE. Jsou-li (X_n, d_n) pro $n \in \mathbb{N}$ metrické prostory, pak jejich (kartézský) součin je metrický prostor $(\Pi_{n=1}^{\infty} X_n, \rho)$, kde $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n(1+d_n(x_n, y_n))}$.

Následující tvrzení platí samozřejmě i pro konečné součiny:

POZOROVÁNÍ. Posloupnost $\{x_n\}$ v $(\Pi_{n=1}^{\infty} X_n, \rho)$ konverguje k bodu x právě když, pro každé $k \in \mathbb{N}$, projekce této posloupnosti do X_k konverguje k projekci bodu x do X_k.

To je pěkný předvidatelný "posložkizmus".

Na nespočetných součinech aspoň dvoubodových prostorů nelze definovat metriku tak, aby platila předchozí věta.

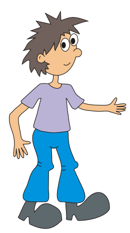
Nicméně, pro speciální podmnožinu i nespočetných mocnin lze definovat velmi důležitou metriku, která dává stejnoměrnou konvergenci:

DEFINICE. Symbolem $\mathcal{F}_u(X, Y)$ se značí množina omezených funkcí z množiny X do metrického prostoru (Y, d) opatřená metrikou $\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$.
Písmeno Y se v označení $\mathcal{F}_u(X, Y)$ vynechává, je-li $Y = \mathbb{R}$.

Matematika je prostě taková. Jako princezna se závojem. Pro nás je ale závoj průhledný a je to paráda.

POZOROVÁNÍ. Posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{F}_u(X,Y)$ konverguje k funkci f právě když konverguje stejnoměrně, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro všechna $n > k$ a všechna $x \in X$ je $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Pokud se vám spletou prvky, funkce, množiny, body a konvergence, je to normální.



Jsem normálně spletený.

Poznámky 2:

Metrika ρ definovaná na kartézském součinu $X \times Y$ odpovídá metrice prostoru $l_1(2)$.

Lze definovat metriky na $X \times Y$ odpovídající prostoru $l_p(2)$, popř. $l_p(n)$ pro součin n prostorů:

$$\rho_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt[p]{d(x_1,x_2)^p + e(y_1,y_2)^p}\,,$$

$$\rho_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max d(x_1,x_2), e(y_1,y_2)\,.$$

Všechny tyto metriky na $X \times Y$ jsou ekvivalentní.

Podobně i na spočetném kartézském součinu lze vzít jinak definované metriky, které jsou ekvivalentní metrice definované v textu.

Např. lze místo $\{1/2^n\}$ vzít jinou posloupnost kladných čísel mající konvergentní řadu.

Stejně tak lze vzít místo zlomků $d_n/(d_n+1)$ ekvivalentní metriky $\min(d_n, 1)$. Existuje řada dalších možností.

Je-li X nejvýše spočetná množina, pak kartézský součin Y^X a $\mathcal{F}_u(X,Y)$ jsou množinově stejné, pokud buď X je konečná nebo Y je omezený prostor.

Konvergence však mohou mít různé (viz*Otázky*). Samozřejmě tyto prostory splývají pokud je Y nejvýše jednobodová množina.

Konec poznámek 2.

Příklady 2:

1. $\mathbb{R}$ je metrický podprostor roviny.

2. $\mathbb{N}$ je diskrétní podprostor $\mathbb{R}$.

3. Na $\mathbb{R}^*$ nelze zadat metriku tak, aby $\mathbb{R}$ byl jeho podprostorem. Ale na $\mathbb{R}^*$ existuje metrika d taková, že její zúžení na $\mathbb{R}$ je ekvivalentní s původní metrikou na $\mathbb{R}$ (např. $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, kde se pro nevlastní x, y berou limity arctg v těchto bodech.

4. Euklidovské prostory jsou mocniny prostoru $\mathbb{R}$ s metrikou ρ_2 z *Poznámek*.

5. Baireův prostor $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ je ekvivalentní kartézskému součinu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Konec příkladů 2.

Otázky 2:

1. Ukažte, že pro každou metriku d je $\min(d, 1)$ metrika ekvivalentní s d. Každá metrika je tedy ekvivalentní s omezenou metrikou.

2. Dokažte tvrzení z *Poznámek* o ekvivalenci metrik ρ_p.

3. Dokažte tvrzení z *Poznámek* o ekvivalenci uvedených metrik na spočetných součinech.

4. Nechť (X, d) je diskrétní metrický prostor. Ukažte, že kartézský součin $(X, d)^{\mathbb{N}}$ je ekvivalentní prostoru z *Příkladu* 1.8.

5. Je-li $A \subset B \subset (X, d)$ a A je hustá v podprostoru B a B je hustá v X, pak A je hustá v X.

6. Je-li Y podprostor metrického prostoru X a $A \subset Y$, pak uzávěr množiny A v Y je průnik s Y uzávěru množiny A v X, tj. $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}^X$.

7. Ukažte, že podprostory separabilního prostoru jsou separabilní.

8. Ukažte, že součin (i spočetný) separabilních prostorů je separabilní.

9. Nechť X je dvoubodový metrický podprostor $\{0, 1\}$ reálných čísel a M je nespočetná množina. Ukažte, že na mocnině X^M (tj. množině souborů $\{a_m\}_{m \in M}$, kde a_m je buď 0 nebo 1) neexistuje metrika taková, že její konvergence je konvergence po souřadnicích.

10. Nechť Y je aspoň dvoubodová množina. Prostor $\mathcal{F}_u(X, Y)$ splývá (jako metrický prostor) s kartézským součinem Y^X, právě když je X konečná množina. Jaká je konvergence v $\mathcal{F}_u(X, Y)$, je-li Y diskrétní prostor?

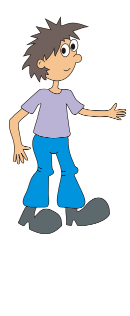
11. Prostor $\mathcal{F}_u(X)$ je separabilní právě když je X konečná množina.

Konec otázek 2.

SPOJITÁ ZOBRAZENÍ

Protože je na metrických prostorech definována konvergence i okolí bodů, lze definovat spojitost stejně jako v euklidovských prostorech.

Vzhledem ke srovnání s dalšími definicemi je lépe volit $\varepsilon - \delta$ definici.



Příště raději půjdu k volbám.

Ono je to takhle opravdu nejjednodušší.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X,d) \to (Y,e)$ mezi metrickými prostory se nazývá spojité, jestliže pro každé $x \in X$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li $d(x,y) < \delta$, je $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

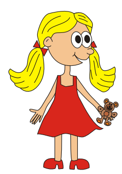
V řadě případů je vhodnější použít jiné charakterizace spojitosti:

POZOROVÁNÍ. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro $f : (X,d) \to (Y,e)$:

1. f je spojité.
2. Pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v (Y,e) existuje okolí U bodu x v (X,d), že $f(U) \subset V$.
3. Vzor $f^{-1}(G)$ každé otevřené množiny z (Y,e) je otevřená množina v (X,d).
4. Vzor $f^{-1}(G)$ každé uzavřené množiny z (Y,e) je uzavřená množina v (X,d).
5. f zachovává konvergenci, tj. $f(x_n) \to f(x)$ v prostoru (Y,e) pokud posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x v prostoru (X,d).
6. Pro každou množinu $A \subset X$ je $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Vyberte si, kterou chcete, pokud jí rozumíte.

Já ženským z principu nerozumím.

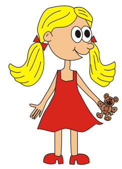


Mně si nikdo ještě nevybral, jenom maminka.

Následující termín pro současnou spojitost zobrazení i jeho inverzního zobrazení je neuvěřitelně výhodný v mnoha situacích.

DEFINICE. Má-li spojité zobrazení inverzní spojité zobrazení, nazývá se homeomorfismus.

Množina a její homeomorfní obraz mají stejné všechny důležité vlastnosti. Můžou být různě veliké, různě tvarované, ale v podstatě jsou si děsně podobné.



Ze všech navzájem homeomorfních jablíček si vybírám nejhranatější.

A kostka curku je taky v ohrožení, není-liž pravda?

Speciálním případem homeomorfismu je ekvivalence metrik:

POZOROVÁNÍ. Metriky d, e na množině X jsou ekvivalentní právě když obě identická zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ a $(X, e) \to (X, d)$ jsou spojitá (tj., identické zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ je homeomorfismus).

Zobrazení mezi metrickými prostory je spojité právě když je spojité mezi prostory, které jsou jim ekvivalentní.

To se hodí, pokud to dovedeme použít. Já například nemám rád kulatou metriku a nahrazuji ji ekvivalentní hranatou metrikou.

Existuje značně silnější pojem než ekvivalentní metriky, který dává jistou ekvivalenci mezi metrickými prostory.

Takto ekvivalentní prostory se nedají rozlišit metodami teorie metrických prostorů:

DEFINICE. Dva metrické prostory (X,d) a (Y,e) se nazývají isometrické, jestliže existuje zobrazení f z X na Y takové, že $e(f(x),f(y)) = d(x,y)$ pro všechna $x,y \in X$. Zobrazení f se pak nazývá isometrie.

Isometrické prostory jsou vlastně totožné. Tedy je to v podstatě čistej genetickej klon. A ty se nedají rozlišit metodami metrických prostorů.

Prostory spojitých omezených funkcí se stejnoměrnou konvergencí jsou velmi důležité a mají proto vlastní označení:

DEFINICE. Jsou-li X,Y metrické prostory, značí $\mathcal{C}_u(X,Y)$ podprostor $\mathcal{F}_u(X,Y)$ všech omezených spojitých zobrazení z X do Y.

Ty kroucený písmenka jsou in.

POZOROVÁNÍ. $\mathcal{C}_u(X,Y)$ je uzavřený v $\mathcal{F}_u(X,Y)$.

Poznámky 3:

1. Spojitost byl vlastně hlavní důvod, proč byly metrické prostory definovány. Hledaly se obecnější struktury, kde by se dala spojitost vhodně definovat.

Později se ukázalo, že metrické prostory jsou zbytečně „silné" pro spojitost (různé ekvivalentní metriky dávají stejnou spojitost).

Z charakterizace spojitosti je vidět, že stačí mít na množinách definovánu konvergenci splňující jisté přirozené axiomy, nebo soustavy otevřených množin splňující jisté přirozené axiomy, nebo uzávěry splňující jisté přirozené axiomy.

Všechny tyto možnosti vedou k obecnějším strukturám (konvergenčním, topologickým, uzávěrovým), které jsou obecně různé a každá má svá výhodná použití.

Nejvíce se používají topologické prostory definované pomocí soustav otevřených množin splňující vlastnosti uvedené v textu (jsou uzavřené na libovolná sjednocení a konečné průniky).

Topologické prostory jsou jako metrické, ale nemají metriku. Jasné?

Mají jenom systém otevřených množin. Celkově jsou jako z gumy, na velikosti nezáleží.

2. Metrické prostory a jejich základní vlastnosti zavedl M.Fréchet v r. 1906 (jejich název však pochází od F.Hausdorffa). Topologické prostory byly poprvé systematicky vyloženy F.Hausdorffem v r. 1914.

3. Pozorování o uzavřenosti $\mathcal{C}_u(X,Y)$ v $\mathcal{F}_u(X,Y)$ vlastně říká, že stejnoměrná limita spojitých zobrazení je spojité zobrazení. Důkaz je prakticky stejný jako pro obdobnou větu o stejnoměrné konvergenci spojitých funkcí v $\mathbb{R}$.

4. Charakterizace ekvivalence metrik pomocí spojitosti identických zobrazení dává možnost definovat jiné ekvivalence pomocí jiných druhů zobrazení. V další části bude tato možnost použita.

5. Tak jako isometrické prostory mají úplně stejné metrické vlastnosti, mají homeomorfní prostory úplně stejné topologické vlastnosti.

6. Velice často se isometrické prostory ztotožňují. Je-li např. f isometrické zobrazení (X,d) na podprostor (Y,e) metrického prostoru Z, lze ztotožnit X s Y a lze říkat, že (X,d) je podprostorem Z.

Např. X lze chápat jako podprostor $X \times Y$, pokud $Y \neq \emptyset$ (co se stane,když $Y = \emptyset$?). Stačí X ztotožnit s $X \times \{y\}$ pro nějaké $y \in Y$ (pro libovolnou metriku ρ_p).

Na spočetném součinu ΠX_n lze definovat ekvivalentní metriku tak, aby konečně mnoho prostorů X_n bylo podprostorem součinu, ale pro všech spočetně mnoho prostorů X_n to jít nemusí (najděte příklad). Půjde to, pokud $\sum diam\, X_n < +\infty$.

7. Není vůbec snadné ukázat, že euklidovské prostory různé dimenze nejsou homeomorfní. Je tu jediná výjimka, a to, je-li jeden z prostorů dimenze nejvýše 1 (zkuste to pro tento případ dokázat).

Dimenze je tedy topologická vlastnost.

BTW, ani samotným topologům jedna definice dimenze nestaci.

Konec poznámek 3.

Příklady 3:

1. Každé zobrazení z diskrétního prostoru do libovolného metrického prostoru je spojité.

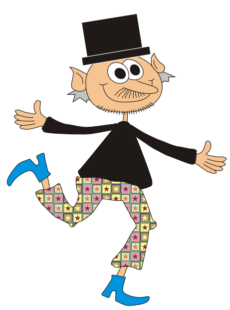
2. Každé zobrazení z libovolného metrického prostoru do pseudometrického prostoru (X, d), kde $d = 0$, je spojité.

3. Je-li X spočetná množina, je identické zobrazení $\varphi : \mathcal{F}_u(X, Y) \to Y^X$ spojité (tj. $\varphi(f) = \{f(x)\}_{x \in X}$). Jinými slovy, stejnoměrná konvergence omezených funkcí implikuje bodovou konvergenci.

4. Je-li f spojitá prostá funkce na nějakém intervalu J v $\mathbb{R}$, je obvyklá metrika na J ekvivalentní metrice $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.
Zobecněte toto tvrzení z J na metrický prostor X.

5. Je-li f spojitá funkce na metrickém prostoru (X, d), je $e(x, y) = |f(x) - f(y)|$ pseudometrika na množině X a identické zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ je spojité. Kdy je e metrika?

Ty metriky jsou neuvěřitelně vynalézavé. Až to člověka pseudookouzlí.



Kouzelný metr mi někdo nevrátil.

Konec příkladů 3.

Otázky 3:

1. Dokažte, že složení spojitých zobrazení je spojité.

2. Ukažte, že isometrie je homeomorfismus a že opak neplatí.

3. Ukažte, že je-li $f : (X, d) \to (Y, e)$ spojité a A je hustá v X, je $f(A)$ hustá v $f(X)$.

Odvoďte odtud, že je-li X separabilní, je i Y separabilní, pokud je f zobrazení na celé Y (nebo na jeho hustou část).

Je spojitý obraz řídké množiny řídká množina?

4. Vezmete-li v úvahu, že řetězové zlomky dávají bijekci mezi iracionálními čísly a množinou všech posloupností přirozených čísel, zkuste dokázat, že metrický prostor iracionálních čísel (braný jako podprostor $\mathbb{R}$) je homeomorfní s Baireovým prostorem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a tedy se spočetným součinem spočetných diskrétních prostorů.

5. Ukažte, že spojitá zobrazení zachovávají hromadné body. Je-li $f : (X, d) \to (Y, e)$ spojité a x je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\}$ v X, pak $f(x)$ je hromadným bodem posloupnosti $\{f(x_n)\}$ v Y.

Takovéto tvrzení neplatí pro hromadné body množin. Proč?

Konec otázek 3.

Cvičení 3: Příklad. Dokažme, že každé zobrazení f z metrického prostoru X s diskrétní metrikou do libovolného metrického prostoru Y je spojité.

Řešení. Podle definice spojitosti máme ověřit, že vzor každé otevřené množiny $A \subset Y$ je otevřená množina v X.

Jelikož v diskrétní metrice jsou všechny množiny otevřené (s každým bodem leží v množině koule o poloměru 1/2), je i $f^{-1}(A)$ otevřená, což jsme měli dokázat.

Můžeme postupovat i jinak. Podle Heineho věty stačí ověřit, že pro každou posloupnost $(x_n) \subset X$ konvergující k nějakému $x \in X$ platí $f(x_n) \to f(x)$.

Protože však v diskrétní metrice konvergují pouze konstantní posloupnosti (umíte to vysvětlit?), platí tedy zřejmě pro takovou posloupnost i $f(x_n) \to f(x)$.

Nemám, co bych dodal. V diskrétním prostoru u bankomatu je to stejné.

Konec cvičení 3.

STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST

Stejně jako na $\mathbb{R}$ lze definovat stejnoměrnou spojitost i v metrických prostorech.

Uvědomte si, že následující definice se liší od definice spojitosti jen v posunutí kvantifikátoru *pro každé* x.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi metrickými prostory se nazývá stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li $x, y \in X$ a $d(x, y) < \delta$, je $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Zřejmě je každé stejnoměrně spojité zobrazení spojité.

Stejnoměrná spojitost má méně hezkých charakterizací než spojitost.

Nelze použít konvergenci posloupností, ale lze použít konvergence dvojice posloupností k diagonále, jak je uvedeno ve druhé položce. Třetí položka je velmi zajímavá a to, že implikuje stejnoměrnou spojitost není zcela snadné (důkaz tu nebude uveden. nicméně nevyžaduje žádných dalších znalostí a můžete se pokusit ho provést, návod je v *Poznámkách*).

POZOROVÁNÍ. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$:

1. f je stejnoměrně spojité.
2. Jestliže $d(x_n, y_n) \to 0$, pak $e(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, pro libovolné posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v X.
3. Je-li $A, B \subset X$ a $d(A, B) = 0$, pak $e(f(A), f(B)) = 0$.

Pro definici stejnoměrné ekvivalence metrik se hodí použít analogie charakterizace topologické ekvivalence pomocí identických zobrazení:

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ a $(X, e) \to (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Více než stejnoměrná ekvivalence metrik se používá tzv. lipschitzovská ekvivalence odvozená z lipschitzovských zobrazení.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi metrickými prostory se nazývá lipshitzovské, jestliže existuje nezáporné číslo k tak, že $e(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $(X, d) \to (X, e)$ a $(X, e) \to (X, d)$ jsou lipshitzovské, tj. existují kladné konstanty k, l tak, že $k\, d(x, y) \leq e(x, y) \leq l\, d(x, y)$.

POZOROVÁNÍ. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité a tedy lipschitzovsky ekvivalentní metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní.

Aneb, je vhodné být ekvivalentnější než ekvivalentní. Teda, pokud chceme.

Poznámky 4:

1. Stejnoměrně ekvivalentní metriky jsou zřejmě ekvivalentní, opak obecně neplatí.

Ekvivalentní metriky mají stejné topologické vlastnosti, stejnoměrně ekvivalentní metriky mají stejné tzv. uniformní vlastnosti. Zatím žádná specificky uniformní vlastnost uvedena nebyla (dále bude uvedena úplnost a totální omezenost).

Stejnoměrně ekvivalentní metriky mají stejná stejnoměrně spojitá zobrazení, tj. jsou-li d, d' (nebo e, e') stejnoměrně ekvivalentní metriky na X (resp. na Y), pak $f : (X, d) \to (Y, e)$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité zobrazení $f : (X, d') \to (Y, e')$ (ukažte to).

2. Lipschitzovská zobrazení lze zobecnit na tzv. hölderovská zobrazení. Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ je hölderovské stupně $\alpha > 0$ s konstantou $k > 0$, jestliže pro libovolná $x, y \in X$ platí

$$d(f(x), f(y)) \leq ke^{\alpha}(x, y) .$$

Lipschitzovská zobrazení jsou tedy speciálním případem pro $\alpha = 1$. Více o těchto zobrazeních v *Otázkách* a *Příkladech*.

Někdy se používá i případ $\alpha = 0$, kdy se dostanou omezená zobrazení.

3. Třetí vlastnost charakterizující stejnoměrnou spojitost mluví o zachovávání blízkosti množin.

Jak je naznačeno v textu, důkaz toho, že zobrazení zachovávající blízkost množin je stejnoměrně spojité, není úplně jednoduchý.

Zhruba řečeno, ze dvou posloupností $\{x_n\}, \{y_n\}$, pro které je $d(x_n, y_n) > r$ pro nějaké $r > 0$ a každé n, je nutné vybrat podposloupnosti $\{x_{k_n}\}, \{y_{k_n}\}$ v X tak, že $d(x_{k_n}, y_{k_m}) > s$ pro nějaké $s > 0$ a všechna k_n, k_m. Jedná se o kombinatorickou záležitost, zkuste to dokázat.

4. Lze definovat $\mathcal{U}_u(X, Y)$ jako podprostor $\mathcal{C}_u(X, Y)$ všech omezených stejnoměrně spojitých zobrazení z X do Y.

Snadno se ukáže, že $\mathcal{U}_u(X, Y)$ je uzavřený v $\mathcal{F}_u(X, Y)$, tj., že stejnoměrná limita stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité.

Konec poznámek 4.

Příklady 4:

1. funkce na metrickém prostoru (X, d), která bodu x přiřazuje vzdálenost od pevně dané podmnožiny A, je lipschitzovská s konstantou 1.

2. Metrika, jako funkce na součinu $X \times X$, je stejnoměrně spojité zobrazení. Je lipschitzovské?

3. Funkce $f(x) = 1/\log x$ pro $0 < x \leq 0.5$ a $f(0) = 0$ je stejnoměrně spojitá na $[0, 0.5]$, ale není hölderovské.

4. Funkce x^{α} pro $\alpha \in (0, 1]$ je hölderovské stupně α na $[0, \infty)$.

5. Funkce x^{α} pro $\alpha \in (0, 1]$ není hölderovské stupně β na $[0, 1]$ pro žádné $\beta \in (\alpha, 1]$.

6. Funkce x le lipschitzovská na libovolné množině $A \subset \mathbb{R}$, ale není hölderovská stupně menšího než 1 na žádné neomezené množině $A \subset \mathbb{R}$.

Konec příkladů 4.

Otázky 4:

1. Složení stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité.

2. Najděte metriku ekvivalentní obvyklé metrice na $\mathbb{R}$ takovou, že existuje stejnoměrně spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která není stejnoměrně spojitá v nové metrice.

Znamená to, že obě metriky nejsou stejnoměrně ekvivalentní?

3. Kdy je metrika na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ definovaná pomocí zobrazení f, jako v příkladu 3.4, stejnoměrně ekvivalentní obvyklé metrice?

4. Ukažte, že každé hölderovské zobrazení je stejnoměrně spojité.

5. Ukažte, že má-li spojitá funkce f na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ derivaci, pak f je lipschitzovská na J právě když je její derivace omezená funkce.

6. Každá hölderovská funkce na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ stupně většího než 1 je konstantní.

7. Složení dvou hölderovských zobrazení stupňů α, resp. β, je hölderovské zobrazení stupně $\alpha.\beta$. To znamená, že složení dvou lipschitzovských zobrazení je opět lipschitzovské zobrazení.

8. Najděte příklad stejnoměrně ekvivalentních metrik, které nejsou lipschitzovsky ekvivalentní.

Konec otázek 4.

Učení 4:

Funkce $1/x$ je spojitá a stejnoměrně klesá na $(0, \infty)$. Je tam tedy stejnoměrně spojitá?

Stejnoměrnost se musí dokázat a ne šidit.

Mně už mockrát ošidili. A byli to samí chlapi …

Konec učení 4.

ÚPLNOST

Z reálných čísel si pamatujete Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, která říká, že každá cauchyovská posloupnost v $\mathbb{R}$ je konvergentní.

Je to velmi důležité tvrzení a je vhodné prostorům s podobnou vlastností dát název. Definice cauchyovských posloupností je stejná jak v $\mathbb{R}$:

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru (X, d) se nazývá cauchyovská, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m.n > k$ je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

DEFINICE. Metrický prostor (X, d) se nazývá úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Prostory $\mathbb{R}^n$ jsou úplné pro všechna přirozená n.

POZOROVÁNÍ.

1. Stejnoměrně spojité zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ zobrazuje cauchyovské posloupnosti v X do cauchyovských posloupností v Y.
2. Uzavřený podprostor úplného prostoru je úplný.
3. Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřený.
4. Součin úplných prostorů je úplný.

Úplná láhev je uzavřená a uzavřená láhev je úplná.

Následující příklad je velmi důležitý. Přestože důkaz není složitý, bude proveden, protože je návodem pro důkaz úplnosti i jiných prostorů funkcí.

VĚTA. Prostor $\mathcal{F}_u(X,Y)$ (a tedy i prostory $\mathcal{C}_u(X,Y)$ a $\mathcal{U}_u(X,Y)$) je úplný, pokud je prostor Y úplný.

Důkaz. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $\mathcal{F}_u(X,Y)$. Když napíšete, co to znamená podle definice cauchyovské posloupnosti a podle definice metriky v $\mathcal{F}_u(X,Y)$, dostanete ihned, že pro každé $x \in X$ je posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v Y a má tedy limitu, která se označí $f(x)$. Tím je definováno zobrazení $f : X \to Y$.

Zbývá dokázat, že $f \in \mathcal{F}_u(X,Y)$ a že $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně. Pro dané $\varepsilon > 0$ je od určitého indexu $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ pro všechna $x \in X$; jestliže na tuto nerovnost provedete limitu pro $m \to \infty$, dostanete $d(f_n(x), f(x)) \le \varepsilon$ pro všechna $x \in X$ od nějakého indexu n počínaje. To znamená, že zobrazení f_n konvergují k f stejnoměrně. Důkaz omezenosti zobrazení f plyne snadno z této stejnoměrné konvergence.

BTW, jinak to ani nešlo, není-liž pravda?

Následující tvrzení patří mezi velmi důležité věty o rozšiřování zobrazení.

VĚTA. Nechť f je stejnoměrně spojité zobrazení podmnožiny A metrického prostoru (X,d) do úplného metrického prostoru (Y,e). Pak existuje stejnoměrně spojité zobrazení $F : \overline{A} \to (Y,e)$, které se na A shoduje s f.

Rozšiřoval jsem kouzla už jako mladý kouzelníček.

Důkaz. Nechť $x \in \overline{A}$ a $\{x_n\}$ je nějaká posloupnost v A konvergující k x.

Protože $\{x_n\}$ je cauchyovská v A, je její stejnoměrně spojitý obraz $\{f(x_n)\}$ cauchyovská posloupnost v Y, která tedy konverguje k nějakému bodu, označíme ho $F(x)$.

Zbývá dokázat, že hodnota $F(x)$ nezávisí na volbě posloupnosti $\{x_n\}$ a že vzniklé zobrazení F má požadované vlastnosti:

Je-li $\{y_n\}$ jiná posloupnost v A konvergující k x, konverguje k x i posloupnost $\{z_n\}$ s lichými členy $z_{2k-1} = x_k$ a sudými členy $z_{2k} = y_k$. Posloupnost $\{f(z_n)\}$ tedy v Y konverguje a jediná možnost je $F(x)$. Takže i posloupnost $\{f(y_n)\}$ konverguje k $F(x)$. Je-li nyní $x \in A$, lze vzít konstantní posloupnost $x_n = x$, což implikuje $F(x) = f(x)$.

To, že F je stejnoměrně spojité, plyne z následujících nerovností:

$$|F(x) - F(y)| \leq |F(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - F(y)|$$

a z úvahy, že jsou-li body x, y blíže než δ, budou i skoro všechny dvojice $f(x_n), f(y_n)$ blíže než ε, kde δ je z definice stejnoměrné spojitosti f.

Zobrazení na množině B, které se shoduje na množině $A \subset B$ se zobrazením f se nazývá rozšířením zobrazení f (z množiny A) na množinu B.

Každé stejnoměrně spojité zobrazení do úplného prostoru se tedy dá stejnoměrně spojitě rozšířit na uzávěr svého definičního oboru. Aha.

Reálná čísla byla konstruována jako jisté úplné rozšíření racionálních čísel.

Tento postup lze použít i obecněji v metrických prostorech.

VĚTA. Každý metrický prostor je (hustým) podprostorem nějakého úplného prostoru.

A co myslíte, je to možné více způsoby? Neporadím.

Důkaz. Nechť (X, d) je neprázdný metrický prostor a a je zvolený bod X.
Pro $x \in X$ se definuje zobrazení $f_x : X \to \mathbb{R}$ rovností $f_x(y) = d(a, y) - d(y, x)$.
Protože $f_x(y) \leq d(a, x)$ pro každé $y \in X$, je f_x omezená (dokonce spojitá) funkce na X.
Zobrazení $\varphi : (X, d) \to \mathcal{F}_u(X)$, které přiřazuje bodu x funkci f_x je isometrické (dokažte).
Uzávěr $\overline{\varphi(X)}$ v $\mathcal{F}_u(X)$ je (po případném ztotožnění bodů X a jeho obrazu $\varphi(X)$) hledaný úplný prostor.

Předchozí věta o rozšíření stejnoměrně spojitého zobrazení implikuje jednoznačnost úplných rozšíření:

VĚTA. Je-li metrický prostor (X, d) hustým podprostorem dvou úplných prostorů Z_1, Z_2, pak existuje isometrické zobrazení Z_1 na Z_2, které je identické na X.

Důkaz. Označí se $f_i : X \to Z_i, i = 1, 2$, vložení X do Z_i, tj. $f_i(x) = x$.
Podle věty o rozšíření lze tato stejnoměrně spojitá zobrazení rozšířit na stejnoměrně spojitá zobrazení $F_1 : Z_2 \to Z_1$ a $F_2 : Z_1 \to Z_2$.
Snadno se nyní ukáže, že obě zobrazení F_1, F_2 jsou vzájemně inverzní isometrická zobrazení.

DEFINICE. Úplný prostor, který obsahuje metrický prostor X jako hustý podprostor, se nazývá zúplnění prostoru X.

Každý metrický prostor tedy má zúplnění, které je, až na isometrii, určeno jednoznačně.

BTW, nebylo to státní tajemství. Já bych klidně předtím poradil.

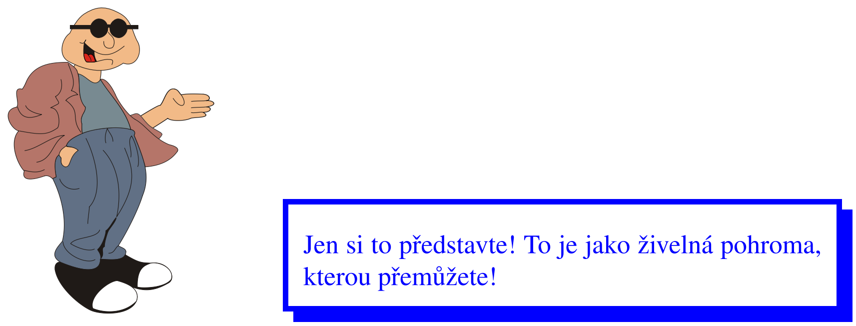
Na závěr této části o úplnosti budou uvedena některá tvrzení platná v úplných prostorech.
První dvě tvrzení byla dokazována v části o reálných číslech.

VĚTA. (Cantor) Metrický prostor (X, d) je úplný, právě když každá monotónní posloupnost neprázdných uzavřených množin, jejichž průměry konvergují k 0, má neprázdný průnik.

Důkaz. Nechť $\{A_n\}$ je klesající posloupnost neprázdných uzavřených množin s diam $A_n \to 0$. Zvolte v každém A_n bod a_n. Posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská a konverguje k bodu z průniku množin A_n.

Obráceně, je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v X, vezměte množiny $a_n = \overline{\{x_m; m \geq n\}}$. Průnik těchto množin je limita posloupnosti $\{x_n\}$.

VĚTA. (Baire) Průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v úplném metrickém prostoru je hustý.



Důkaz. Nechť $G_n, n \in \mathbb{N}$, jsou husté otevřené množiny a G je neprázdná otevřená množina, vše v úplném prostoru X.

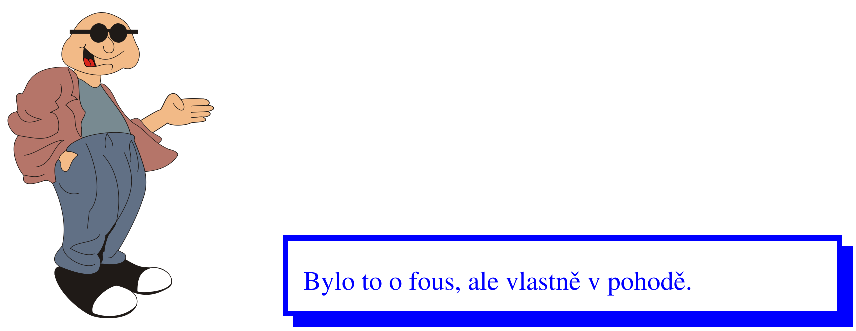
Má se dokázat, že $G \cap \bigcap G_n \neq \emptyset$.

Protože G_1 je hustá, obsahuje $G \cap G_1$ otevřenou kouli B_1 (i s jejím uzávěrem) o poloměru nejvýše 2^{-1}.

Protože G_2 je hustá, obsahuje $B_1 \cap G_2$ otevřenou kouli B_2 (i s jejím uzávěrem) o poloměru nejvýše 2^{-2}.

Tímto postupem se dostane klesající posloupnost otevřených koulí B_n o poloměru 2^{-n}, které jsou i s uzávěrem obsaženy v G a ve všech $G_k, k \leq n$.

Podle Cantorovy věty mají uzávěry těchto koulí neprázdný průnik a ten leží v $G \cap \bigcap G_n \neq \emptyset$.



Lipschitzovské zobrazení s konstantou menší než 1 se nazývá kontrakce.

VĚTA. (Banach) Nechť f je kontrakce v neprázdném úplném metrickém prostoru X. Pak existuje $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.

Důkaz. Zvolte libovolný bod $x_1 \in X$ a definujte rekurentně $x_{n+1} = f(x_n)$. Ukažte, že tato posloupnost je cauchyovská a její limita je hledaný bod x_0.

Bod x_0 s vlastností z předchozí věty se nazývá pevný bod zobrazení f.

To je věta, která je stále in. Mám ji ráda.

Touto větou se nachází řešení jako limita postupných aproximací. A to se bez této věty skoro nikdy nepodaří. Takže: kdo se směje s kontrakcí, ten se směje nejlépe.

Poznámky 5:

1. Konstrukci zúplnění prostoru X lze provést i klasickým (ale pracnějším) způsobem, že se k X přidají všechny nekonvergentní cauchyovské posloupnosti (každá takováto posloupnost jako jeden nový bod) a vzdálenost $\{x_n\}, \{y_n\}$ bude limita vzdáleností bodů x_n, y_n.

Tím se dostane pseudometrický prostor a musí se ztotožnit nové body mající nulovou vzdálenost.

Pak se dokážem že vzniklý metrický prostor je úplný.

Lze sestrojit i nový prostor sestávající se ze všech cauchyovských posloupností v X a body x v původním prostoru X se dostanou jako ekvivalentní třídy posloupností konvergujících k x.

V případě konstrukce v textu bylo nutné vědět, že $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor. V právě uvedené konstrukci je úplnost $\mathbb{R}$ použita v existenci limity vzdáleností bodů x_n, y_n.

To je nutné obejít v případě, že se konstruuje zúplnění $\mathbb{Q}$ a není nic známo o $\mathbb{R}$. Pak je posloupnost vzdáleností bodů x_n, y_n opět cauchyovská posloupnost a tedy prvek nového prostoru.

Reálná čísla tedy lze zkonstruovat jako zúplnění metrického prostoru racionálních čísel. Teorie dává jednoznačnost takového zúplnění, je však třeba jisté práce pro rozšíření algebraických operací z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$. Toto rozšíření vyplývá ze stejnoměrné spojitosti operací (vhodně zúžených).

2. Banachova věta o pevném bodě je jedno z nejvíce používaných tvrzení. S její pomocí je možné dokázat existenci řešení různých typů rovnic (např. integrálních). Používá se i v důkazech různých tvrzení (např. ve větě o implicitních funkcích).

Uvedený základní typ tvrzení je možné všelijak modifikovat.

V Banachově větě je důležité, že se může začít s libovolným bodem x_1 jako prvním v rekurentní posloupnosti. Je však zřejmé, že ne pro každou volbu konverguje vzniklá posloupnost dost rychle.

Odhad rychlosti konvergence však také vyplývá z postupu důkazu.

Zkuste ukázat, že (ve značení důkazu Banachovy věty) je $d(x_n, x_0) \leq k^{n-2} d(x_1 - f(x_1))$, kde $k < 1$ je lipschitzovská konstanta zobrazení f.

3. Všimněte si jednoho rozdílu mezi Cantorovou a Baireovou větou. V Cantorově větě se výslovně používá metrika (pro průměry množin), v Bairově větě nikoli.

Pokud tedy změníte danou metriku na ekvivalentí, přičemž nová metrika je opět úplná, Cantorova věta pro tuto novou metriku platit nemusí, kdežto Bairova věta zůstává v platnosti.

Baireova věta tedy platí i v prostorech, které nejsou úplné, ale mají ekvivalentní metriku, která je úplná.

Tyto prostory se nazývají topologicky úplné. Např. prostor iracionálních čísel není v obvyklé metrice úplný, ale je homeomorfní Baireovu prostoru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, který je (jako součin úplných prostorů) úplný.

Baireova věta tedy platí i v prostoru iracionálních čísel (Cantorova nikoli).

4. Z prostorů uvedených v Příkladech 1 jsou úplné prostory $l_p(n), l_p$ pro $1 \leq p \leq \infty$, diskrétní i indiskrétní prostor, Baireův prostor, ježek.

Prostor racionálních čísel s p-adickou metrikou není úplný a jeho zúplnění jsou tzv. p-adická čísla. Množina p-adických čísel tvoří množinu v mnoha směrech analogickou množině reálných čísel, ale zcela různou.

Bojím bojím.

Konec poznámek 5.

Příklady 5:

1. Označte $\mathcal{L}(X,Y)$ množinu všech lipschitzovských zobrazení z X do Y.

Na této množině lze definovat tzv. pseudonormu $\|f\|$ jako nejmenší konstantu k ve vyjádření lipschitzovskosti $e(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$. Ekvivalentním vyjádřením je

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{e(f(x), f(y))}{d(x,y)}; x \neq y\right\}.$$

Pak lze na $\mathcal{L}(X,Y)$ definovat pseudometriku $\rho(f,g) = \|f-g\|$ (ověřte, že se dostane pseudometrika).

2. Ve speciálním případě $X = [0,1], Y = \mathbb{R}$ se prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ bude značit jen jako $\mathcal{L}$. Které funkce mají navzájem vzdálenost 0?

Ukažte, že podprostor $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ těch funkcí, které se anulují v 0, je už metrický prostor.

Prostor $\mathcal{L}_0$ je úplný (důkaz je skoro stejný jako je důkaz úplnosti prostoru $\mathcal{F}_u$).

Prostor $\mathcal{L}_0$ není separabilní (zjistěte vzdálenost funkcí, které se rovnají 0 na $[0,r]$ a potom se rovnají $x-r$, pro různá $r \in [0,1]$).

3. To, co bylo v předchozích bodech prováděno pro lipschitzovské funkce, je možné skoro stejně provést pro hölderovské funkce.

Změna je v definici $\|f\|$, kde je místo $d(x,y)$ výraz $d^\alpha(x,y)$. Získaná metrika se bude značit ρ_α.

Označte $\mathcal{H}_\alpha$ prostor všech hölderovských funkcí stupně α na intervalu $[0,1]$, které se anulují v 0, ρ_α je příslušná metrika.

Pak $\mathcal{H}_\alpha$ jsou úplné prostory (pro $\alpha = 0$ se dostane prostor $\mathcal{F}_u([0,1])$). Tyto prostory nejsou separabilní (oproti předchozímu bodu vezměte místo $x-r$ funkce $(x-r)^\alpha$).

Je-li $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, je $\mathcal{H}_\alpha$ podmnožina $\mathcal{H}_\beta$ (ukažte to) a toto vložení množin je spojité (ukažte to).

Uvedené vložení množin jednak není na a jednak jeho inverzní zobrazení není spojité. Lze totiž dokázat, že podmnožina $\mathcal{H}_\alpha$ v metrickém prostoru $\mathcal{H}_\beta$ je 1.kategorie a podle Baireovy věty tedy (jako podprostor) není úplná, kdežto s metrikou ρ_α je úplná.

4. Lze uvést příklady úplných prostorů funkcí, ve kterých je metrika definována pomocí integrálu.

Je však nutné použít L-integrál nebo K-integrál. Pak lze definovat např. prostory $L_p(J)$ jako množinu všech funkcí na intervalu J, pro které existuje $\int_J |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$ a kde je vzdálenost dvou funkcí f,g definována jako $\sqrt[p]{\int_J |f(x)-g(x)|^p \,\mathrm{d}x}$. Číslo p je opět v intervalu $[1,\infty)$.

Vhodně lze definovat tyto prostory i pro $p = \infty$. Uvedení vzdálenost je pseudometrika, pro získání metriky se musí ztotožnit funkce, které se rovnají až na množinu míry 0.

Konec příkladů 5.

Otázky 5:

1. Ukažte, že ekvivalentní formulace Bairovy věty je: *Úplný metrický prostor není 1.kategorie.*

Je-li tedy úplný prostor vyjádřen jako spočetné sjednocení uzavřených množin A_n, musí mít alespoň jedna z těchto množin neprázdný vnitřek.

2. Cantorova věta v $\mathbb{R}$ měla obecnější formulaci: *Klesající posloupnost uzavřených omezených intervalů má neprázdný průnik.* (místo uzavřených omezených intervalů lze vzít uzavřené omezené podmnožiny $\mathbb{R}$). Zkuste ukázat, že takováto formulace neplatí v obecných úplných metrických prostorech.

3. Ukažte, že každá isometrie dvou hustých částí úplného prostoru lze rozšířit na isometrii celého prostoru.

4. Najděte příklad spojité funkce na husté části $\mathbb{R}$, která nelze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$.

5. Ukažte, že je-li spojitá funkce stejnoměrně spojitá na husté podmnožině svého definičního oboru, je stejnoměrně spojitá na celém definičním oboru.

Konec otázek 5.

Cvičení 5: Příklad. Dokažme, že důsledkem Bairovy věty není žádný úplný metrický prostor X 1. kategorie.

Cítíte tu nespravedlnost? Přece láhev rumu první kategorie musí být úplná.

Řešení. Nechť (Y_n) je posloupnost řídkých množin.

Pak

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \supset X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{Y}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \bar{Y}_n\right).$$

Jelikož množiny $X \setminus \bar{Y}_n$ jsou husté a otevřené, je podle Bairovy věty jejich průnik hustý a tudíž neprázdný.

Tedy

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \neq \emptyset.$$

Tím je důkaz hotov.

A to ještě ten rum musí být hustý.

Konec cvičení 5.

KOMPAKTNOST

V úplných prostorech má každá cauchyovská posloupnost hromadný bod.

Jestliže se tato vlastnost zesílí na libovolné posloupnosti, dostane se značně silnější vlastnost, která do jisté míry nahrazuje konečnost v nekonečných prostorech.

DEFINICE. Metrický prostor se nazývá kompaktní, jestliže každá jeho posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost.

Definujeme kompaktnost přes podposloupnosti. Jde to i jinak.

Některé následující vlastnosti jsou podobné vlastnostem úplnosti.

POZOROVÁNÍ.

1. Uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.
2. Kompaktní podprostor metrického prostoru je uzavřený.
3. Součin kompaktních prostorů je kompaktní.
4. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní.
5. Podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.

Nyní budou uvedeny hlubší vlastnosti kompaktnosti. K tomu je potřeba několika definic.

Soustava $\mathcal{S}$ (otevřených) podmnožin X se nazývá (otevřené) pokrytí X, jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Podmnožina A metrického prostoru X se (pro $r > 0$) nazývá r-síť, jestliže vzdálenosti různých bodů množiny A jsou alespoň r. Podle Zornova lemmatu existuje v X maximální r-síť, tj. taková r–síť, že každý bod X je od nějakého bodu této sítě vzdálen o méně než r.

VĚTA.

1. Kompaktní prostor je separabilní.
2. Pro každé otevřené pokrytí kompaktního prostoru X existuje kladné číslo r (tzv. Lebesgueovo číslo) takové, že libovolná podmnožina X o průměru nejvýš r je obsažena v nějaké množině z daného pokrytí.

Důkaz. Nechť X je kompaktní prostor.

Buď K_n maximální $1/n$-síť Podmnožiny K_n jsou uzavřené a diskrétní a musí tedy být konečné (žádná prostá posloupnost z K_n nemůže mít limitu).

Jejich sjednocení je spočetná hustá množina v X.

Nechť pro otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ žádné takové číslo r neexistuje.

To znamená, že lze v X sestrojit posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ tak, že vzdálenost x_n od y_n je nejvýše $1/n$ a dvojice bodů $\{x_n, y_n\}$ neleží v žádné množině z $\mathcal{G}$.

Lze najít konvergentní podposloupnosti $\{x_{k_n}\}$ a $\{y_{k_n}\}$; vzhledem k první vlastnosti čísel x_n a y_n mají obě podposloupnosti stejnou limitu, která leží v nějakém $G \in \mathcal{G}$.

Množina G je okolím limity a tedy v ní musí ležet i skoro všechny prvky obou podposloupností, což je spor s druhou vlastností čísel x_n a y_n.

Dokázala jsem to bez nadechnutí. Co vy?

Následující charakterizace kompaktnosti je podstatná.

VĚTA. Metrický prostor X je kompaktní právě když z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat konečné pokrytí X.

Pro dva někdy stačí jedna deka. Znám.

Důkaz. Nechť X je kompaktní a $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí X a nechť r je Lebesgueovo číslo tohoto pokrytí.

Podle předchozího důkazu existuje konečná maximální $r/2$-síť A.

Množina otevřených koulí $\{B_a; a \in A\}$ o poloměru $r/2$ a středech v $a \in A$ je konečná a pokrývá X.

Každá koule B_a je částí některé množiny $G_a \in \mathcal{G}$. Tedy konečná soustava $\{G_a; a \in A\}$ pokrývá X.

Nechť X není kompaktní.

Existuje tedy posloupnost $\{x_n\}$ v X, která nemá žádnou konvergentní podposloupnost.

Množina A těchto bodů x_n je tedy uzavřená a každý bod x_n má kladnou vzdálenost r_n ke zbylým bodům množiny A.

Otevřené pokrytí skládající se z množiny $X \setminus A$ a otevřených koulí o středu x_n a poloměru r_n neobsahuje konečné pokrytí.

To bylo jako akční film.

Když se v definici kompaktnosti uvažují pokrytí jen koulemi se stejnými poloměry, dostane se větší třída prostorů, která je také důležitá:

DEFINICE. Metrický prostor X se nazývá totálně omezený, jestliže, pro každé $r > 0$, z libovolného pokrytí X otevřenými koulemi s průměrem alespoň r lze vybrat konečné pokrytí X.

POZOROVÁNÍ.

1. Metrický prostor je totálně omezený právě když, pro každé $r > 0$, libovolná r-síť v X je konečná.
2. Podprostor totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
3. Uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
4. Součin totálně omezených prostorů je totálně omezený.
5. Stejnoměrně spojitý obraz totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
6. Podmnožina euklidovského prostoru je totálně omezená právě když je omezená.

Předchozí pojmy jsou v následujícím vztahu (důkazy jsou jednoduché)

VĚTA. Metrický prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.

DŮSLEDEK. Zúplnění totálně omezeného prostoru je kompaktní.

DODATKY

V těchto závěrečných poznámkách budou uvedeny dvě velmi důležité věty mající mnoho různých použití.

Kdo s čím zachází, s tím také schází.

VĚTA. (Tietze) Každé spojité zobrazení z uzavřené podmnožiny metrického prostoru X do $\mathbb{R}$ lze spojitě rozšířit na celé X.

A někdy to jde více způsoby. Ano.

VĚTA. (Stone, Weierstrass) Nechť X je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A}$ je podokruh $\mathcal{C}_u(X)$ obsahující konstantní zobrazení a oddělující body X. Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $\mathcal{C}_u(X)$.

To jsi přečtu, až to budu potřebovat.

BTW, nebylo to už někdy potřeba?

Poznámky 6:

1. Žádný z prostorů v Příkladech 1 není kompaktní a v některých případech není ani jednoduché charakterizovat jejich kompaktní podmnožiny.

V euklidovských prostorech jsou kompaktní právě omezené a uzavřené podmnožiny.

Ježek je omezený, ale není kompaktní (zkuste najít všechny jeho kompaktní podmnožiny, i ty, co protínají nekonečně mnoho jeho „bodlin").

Není ani jednoduché popsat kompaktní podmnožiny racionálních čísel. Jsou tu souvislosti s podmnožinami všech spočetných ordinálních čísel.

2. Každý metrický prostor je podprostorem úplného prostoru.

Je možné dokázat podobné tvrzení pro vložení do kompaktních prostorů?

Uvědomte si, že kompaktní prostor je separabilní a každý jeho podprostor též.

Otázka tedy má smysl jen pro separabilní prostory.

To je zatím pohled jen topologický. Pokud vložením myslíme isometrické vložení, jako v případě úplnosti, musí být vkládaný prostor i totálně omezený (proč?). Tím se zúžila otázka jen na totálně omezené prostory a pro ty je odpověď kladná, protože jejich zúplnění je kompaktní.

Není-li prostor totálně omezený, nejde ho isometricky vložit do kompaktního prostoru. Lze ho vložit homeomorfně do kompaktního prostoru? O této otázce již víte, že má smysl jen pro separabilní prostory.

V tomto případě je odpověď kladná. Vezměte spočetnou hustou množinu M a ekvivalentní metriku omezenou 1. Pak zobrazení f_m, které přiřazuje bodu x jeho vzdálenost od daného $m \in M$, je spojité zobrazení X do $[0,1]$. Zobrazení $f(x) = \{f_m(x)\}_{m \in M}$ je homeomorfní zobrazení X do $[0,1]^{\mathbb{N}}$, což je kompaktní prostor. Uzávěr množiny $f(X)$ v $[0,1]^{\mathbb{N}}$ je hledaný kompaktní prostor.

3. Postup v předchozím bodě dává důležitý výsledek, že *každý separabilní prostor je homeomorfní nějakému podprostoru mocniny* $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

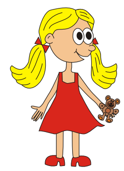
TO JE PECKA!!!

Jinými slovy se říká, že každý separabilní prostor lze topologicky vložit do $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Protože $[0,1]^{\mathbb{N}}$ je sám separabilní prostor, je to tzv. univerzální prostor pro všechny separabilní prostory (z topologického hlediska).

Existuje i tzv. Urysohnův universální prostor, který je separabilní a obsahuje jako podprostory (isometricky) všechny separabilní prostory.

Navíc je z jistého hlediska (tzv. homogenita) jednoznačně určený. Jeho konstrukce je ale obtížná.

Tady se nestyďte říci, že ničemu nerozumíte.



Já ti rozumím.

Konec poznámek 6.

Příklady 6:

1. Ukažte, že diskrétní prostor je kompaktní právě když je konečný. Jak je to s úplností diskrétních prostorů?

2. Indiskrétní prostor je kompaktní.

3. Cantorova množina je homeomorfní mocnině $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dvoubodového prostoru.

4. Každý kompaktní prostor je spojitým obrazem Cantorovy množiny.

Konec příkladů 6.

Otázky 6:

1. Ukažte, že každá spojitá funkce na kompaktním prostoru nabývá své maximální a minimální hodnoty.

2. Každá spojitá funkce na kompaktním prostoru je stejnoměrně spojitá.

3. Ukažte, že každý metrický separabilní prostor má ekvivalentní totálně omezenou metriku. Může to platit i pro neseparabilní prostory?

4. Najděte ekvivalentní totálně omezenou metriku pro ježka.

5. Na kompaktním prostoru jsou ekvivalentní metriky stejnoměrně ekvivalentní.

6. Uveďte příklad, že stejnoměrně spojitý obraz úplného prostoru nemusí být úplný.

Konec otázek 6.

Cvičení 6: Příklad. Dokažme, že každý centrovaný systém kompaktů v Hausdorffově prostoru má neprázdný průnik. Připomeňme, že systém množin se zove centrovaný, má-li každý konečný podsystém neprázdný průnik.

Řešení. Jinak řečeno, dokážeme, že pokud pro systém (libovolné kardinality) kompaktů K_α platí

$$\bigcap_\alpha K_\alpha = \emptyset,$$

pak existuje konečný podsystém, který má také prázdný průnik.

Položme $V_\alpha = K_\alpha^c$ a zvolme prvek K_1 ze systému K_α.

Protože žádný prvek z K_1 nepadne do všech K_α, je systém V_α otevřeným pokrytím množiny K_1.

Díky kompaktnosti lze vybrat konečné podpokrytí, takže

$$K_1 \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}.$$

Potom ale

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_1} = \emptyset,$$

což jsme měli dokázat.

Konec cvičení 6.